# Ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables

Stefan Neuwirth

**Résumé**

Les deux théorèmes essentiels de ce mémoire, dus à John J. F. Fournier [9], à I. M. Miheev [17] et à Kathryn E. Hare [12], étendent les propriétés de 2-association établies par Aline Bonami [4] aux ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables. L'instrument essentiel de cette généralisation est une caractérisation des ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables par des propriétés d'intégrabilité uniforme et d'espaces d'Orlicz [9], qui remplace les caractérisations usuelles des ensembles $\Lambda(p)$, $p > 2$. On aborde aussi le problème de la réunion de deux ensembles $\Lambda(2)$.

## Table des matières

# 1 Introduction

Après un court historique et la définition des différentes notations, j'introduis les espaces d'Orlicz et leur connexion avec la notion d'intégrabilité uniforme, comme outil de travail essentiel pour la suite.

## 1.1 Historique

Les ensembles lacunaires sont d'abord apparus dans la construction de contre-exemples en analyse : Karl Weierstraß [23] a exhibé en 1872 une fonction à spectre dans $\{\lambda^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda \geq 3$, qui est continue mais nulle part différentiable. Puis, en 1892, Jacques Hadamard [11] a démontré un théorème resté célèbre : soit $E = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \geq q > 1$. Alors une série de Taylor $\}a_n z^n\{_{n\in E}$ dont le rayon de convergence est 1 ne peut être prolongée analytiquement au-delà du cercle de convergence.
Simon Sidon [22] a provoqué un revirement en démontrant que les ensembles lacunaires de Hadamard avaient une propriété en termes d'espaces fonctionnels. Stefan Banach [1] a repris ce mouvement en étudiant des ensembles lacunaires caractérisés par des propriétés fonctionnelles. Après l'introduction des ensembles de Sidon (Jean-Pierre Kahane [14]), Walter Rudin [20] a défini dans la même optique les ensembles $\Lambda(p)$.
L'intérêt des ensembles lacunaires provient des propriétés remarquables dont ils jouissent. En particulier, en réponse à une question générale de Szolem Mandelbrojt [16] — quelles propriétés globales d'une fonction à spectre lacunaire peut-on déduire de ses propriétés locales ? —, Antoni Zygmund [27] a démontré les résultats de la section 6 pour les ensembles lacunaires de Hadamard.

## 1.2 Notations

### 1.2.1 Suites

Les suites et séries de terme général $u_n$ seront notées $\{u_n\}$ et $\}u_n\{$ respectivement. La différenciée de $\{u_n\}$ est la suite de terme général $\Delta u_n = u_n - u_{n+1}$. On dira que $\{u_n\}$ est convexe si

$$\forall n \quad \Delta^2 u_n = \Delta u_n - \Delta u_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \geq 0.$$

### 1.2.2 Cadre fonctionnel

Les fonctions trigonométriques seront notées $s_n(x) = \sin nx$, $c_n(x) = \cos nx$ et $e_n(x) = e^{i\,nx}$. Tous les calculs se feront dans le cadre du groupe compact $\mathbb{T} = [0,\, 2\pi[$ muni de l'addition modulo $2\pi$ et de sa mesure de Haar normalisée $dm = \dfrac{dt}{2\pi}$, et de son groupe dual $(\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}, +)$. On note $\mathscr{P}$ l'espace engendré par $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. La mesure de $S \subseteq \mathbb{T}$ est notée $|S|$. On note

$$\langle f,\, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f(-t)g(t)\, dm(t).$$

Le spectre de $f$, qu'on note $\operatorname{spec} f \subseteq \mathbb{Z}$, est défini comme le support de sa transformée de Fourier $\widehat{f}$. Un ensemble lacunaire $E$ est alors un sous-ensemble propre de $\mathbb{Z}$ : pour les divers espaces $X = \mathscr{C}$, $L^p$, $M$ de fonctions et de mesures sur $T$, on considérera à chaque fois le sous-espace des éléments de $X$ dont le spectre tombe dans $E$, noté $X_E$. Pour tout espace normé $X$, $B_X$ désigne la boule unité fermée de $X$. On notera $l^2(E)$ l'espace des suites de carré sommable indexées par $E$.

### 1.2.3 Noyau de Dirichlet et noyau de Fejér

Le noyau de Dirichlet $\{D_n\}$ est la suite des

$$D_n = \sum_{|j|\leq n} e_j.$$

Le noyau de Fejér $\{K_n\}$ est la suite des

$$K_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j = \sum_{|j|\leq n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e_j.$$

$K_n$ est alors positive et $\|K_n\|_1 = 1$ pour tout $n$. On démontre que $\{K_n\}$ est une approximation de l'identité [8] : si $X = L^p$, $1 \leq p < \infty$, et si $X = \mathscr{C}$, on a

$$\forall f \in X \quad K_n \star f \xrightarrow[n\to\infty]{X} f.$$

## 1.3 Espaces d'Orlicz

Nous aurons besoin de plusieurs théorèmes sur les espaces d'Orlicz. Leur démonstration est empruntée de préférence à [6].

### 1.3.1 Définitions

Les espaces d'Orlicz généralisent de manière adéquate les espaces $L^p$. Ils sont définis à partir d'une fonction d'Orlicz.

**Définition 1.3.1.1 (Wladyslaw Orlicz [19])** $\Phi : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$ *est une fonction d'Orlicz si*
***(i)*** $\Phi(0) = 0$,
***(ii)*** $\Phi$ *est convexe et*
***(iii)*** $\dfrac{\Phi(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$.

Il en résulte que $\Phi$ est croissante et continue. On peut définir $\Phi$ de manière équivalente par sa dérivée $\phi$, dont on exige que

**Définition 1.3.1.2** $\phi : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$ *est une dérivée d'Orlicz si*
***(i)*** $\phi$ *est croissante,*
***(ii)*** $\phi$ *est continue à gauche et*
***(iii)*** $\phi(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

On pose alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \Phi(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt.$$

### 1.3.2 Fonctions conjuguées

Définissons l'inverse généralisée $\psi$ de $\phi$ par

$$\psi(y) = \inf_{\phi(x)\geq y} x.$$

On remarque que $\psi$ est une dérivée d'Orlicz si $\phi$ en est une et que $\phi$ est l'inverse généralisée de $\psi$. On définit la conjuguée de $\Phi$ comme étant la fonction dont la dérivée d'Orlicz est $\psi$.

**Proposition 1.3.2.1 (Inégalité de William H. Young [24])** *Soient $\Phi$ et $\Psi$ deux fonctions d'Orlicz conjuguées de dérivées $\phi$ et $\psi$ respectivement. Alors*

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}^+ \quad xy \leq \Phi(x) + \Psi(y).$$

*On a égalité si et seulement si $y = \phi(x)$ ou $x = \psi(y)$.*

**Proposition 1.3.2.2** *Soient $\Phi$ et $\Psi$ deux fonctions d'Orlicz conjuguées. Alors*

$$\frac{\Phi(x)}{x^2} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Psi(y)}{y^2} \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*Démonstration.* ($\Rightarrow$) La dérivée $\phi$ de $\Phi$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \Phi(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt \leq x\phi(x).$$

Si $\dfrac{\Phi(x)}{x^2} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, alors $\dfrac{\phi(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Soient donc $A$ et $X$ tels que $x \geq X \Rightarrow \phi(x) \geq Ax$. Soit $Y > \phi(X)$. Alors $\phi(x) \geq Y \Rightarrow x \geq X$ et par définition,

$$\forall y \geq Y \quad \psi(y) = \inf_{\phi(x)\geq y} x \leq \inf_{Ax\geq y} x = \frac{y}{A}.$$

Comme $A$ est arbitraire, $\dfrac{\psi(y)}{y} \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et puisque $\Psi(y) \leq y\psi(y)$,

$$\frac{\Psi(y)}{y^2} \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

($\Leftarrow$) L'inégalité de Young 1.3.3 s'écrit

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}^+ \quad \Phi(x) \geq xy - \Psi(y),$$

et en posant $y = Ax$,

$$\forall A \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{\Phi(x)}{x^2} \geq A - \frac{\Psi(Ax)}{x^2}.$$

Or par hypothèse,

$$\forall A \quad \frac{\Psi(Ax)}{x^2} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme $A$ est arbitraire, on obtient $\dfrac{\Phi(x)}{x^2} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. ∎

### 1.3.3 Espaces d'Orlicz

La fonction d'Orlicz $\Phi$ sert à présent à définir un espace de Banach $L^\Phi$.

**Définition 1.3.3.1**
***(i)*** *On appelle module d'Orlicz de $f$*

$$M_\Phi(f) = \int_{\mathbb{T}} \Phi(|f|)\,dm,$$

***(ii)*** *On définit la norme de Luxemburg [15] de $f$ par*

$$\|f\|_\Phi = \inf\{a > 0;\ M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \leq 1\}.$$

*On note $L^\Phi = \{f;\ \|f\|_\Phi < \infty\}$.*

En fait, $\|\ \|_\Phi$ est la jauge de Minkowski du convexe $\{f;\ M_\Phi(f) \leq 1\}$.

**Proposition 1.3.3.2**
***(i)*** *$M_\Phi$ est convexe.*
***(ii)*** *Si $\|f\|_\Phi > 0$, alors $M_\Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right) \leq 1$.*
***(iii)*** *Si $\|f\|_\Phi \leq 1$, alors $M_\Phi(f) \leq \|f\|_\Phi$.*
***(iv)*** *Si $\|f\|_\Phi > 1$, alors $M_\Phi(f) \geq \|f\|_\Phi$.*
***(v)*** *$B_{L^\Phi} = \{f;\ M_\Phi(f) \leq 1\}$.*
***(vi)*** *$f_n \xrightarrow{L^\Phi} f \implies f_n \xrightarrow{mesure} f$.*
***(vii)*** *(Lemme de Fatou) Si $0 \leq f_n \nearrow f$ et $\|f_n\|_\Phi \leq 1$ pour tout $n$, alors $f \in L^\Phi$ et $\|f\|_\Phi \leq 1$.*

*Démonstration.* ***(i)*** résulte de ce que $\Phi$ est convexe croissante :

$$\begin{aligned}
\forall\ 0 \leq \lambda \leq 1 \quad M_\Phi(\lambda f + (1-\lambda)g) &= \int_{\mathbb{T}} \Phi(|\lambda f + (1-\lambda)g|)\,dm \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \Phi(\lambda|f| + (1-\lambda)|g|)\,dm \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} (\lambda\Phi(|f|) + (1-\lambda)\Phi(|g|))\ dm \\
&= \lambda M_\Phi(f) + (1-\lambda)M_\Phi(g).
\end{aligned}$$

***(ii)*** On a $M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \leq 1$ pour tout $a > \|f\|_\Phi$. Si $a \searrow \|f\|_\Phi$,

$$\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \nearrow \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right)$$

et par le théorème de convergence monotone $M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \nearrow M_\Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right)$.
***(iii)*** Comme $M_\Phi$ est convexe, on a

$$M_\Phi(f) = M_\Phi\left(\|f\|_\Phi \frac{f}{\|f\|_\Phi}\right) \leq \|f\|_\Phi M_\Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right) \leq \|f\|_\Phi.$$

***(iv)*** On a

$$\forall\ 1 < a < \|f\|_\Phi \quad 1 < M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \leq \frac{1}{a} M_\Phi(f)$$

et donc $M_\Phi(f) > a$ pour tout $1 < a < \|f\|_\Phi$. Donc $M_\Phi(f) \geq \|f\|_\Phi$.
***(v)*** résulte de *(iii)* et *(iv)*.

**(vi)** Il faut démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $|\{|f_n - f| > \varepsilon\}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Soit donc $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $x_0$ tel que $\Phi(x_0) \neq 0$. Alors

$$\int_{\mathbb{T}} \Phi\left(\frac{x_0}{\varepsilon}|f_n - f|\right) dm \geq \Phi(x_0)|\{|f_n - f| > \varepsilon\}|.$$

Or $\|f_n - f\|_\Phi \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et $(iii)$ entraîne que $M_\Phi\left(\frac{x_0}{\varepsilon}(f_n - f)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

**(vii)** On a $\int_{\mathbb{T}} \Phi(f_n) \leq 1$ pour tout $n$. Par continuité et croissance de $\Phi$, $\Phi(f_n) \nearrow \Phi(f)$. Par le théorème de convergence monotone, $\int_{\mathbb{T}} \Phi(f_n) \nearrow \int_{\mathbb{T}} \Phi(f)$ ; on a donc $\int_{\mathbb{T}} \Phi(f) \leq 1$ et $\|f\|_\Phi \leq 1$. ■

**Proposition 1.3.3.3** $\| \|_\Phi$ *est une norme qui fait de* $L^\Phi$ *un espace de Banach.*

*Démonstration.* En effet,

- $\|\lambda f\|_\Phi = \inf\{a > 0;\ M_\Phi\left(\frac{\lambda f}{a}\right) \leq 1\} = |\lambda|\, \|f\|_\Phi$.
- Soient $a = \|f\|_\Phi$ et $b = \|g\|_\Phi$. Alors par convexité

$$\begin{aligned} M_\Phi\left(\frac{f+g}{a+b}\right) &= M_\Phi\left(\frac{a}{a+b}\frac{f}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{g}{b}\right) \\ &\leq \frac{a}{a+b}M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) + \frac{b}{a+b}M_\Phi\left(\frac{g}{b}\right) \leq 1 \end{aligned}$$

et donc $\|f + g\|_\Phi \leq \|f\|_\Phi + \|g\|_\Phi$.

- Si $f \not\equiv 0$, on peut choisir $A$ de mesure strictement positive et $\delta > 0$ tels que $|f_{|A}| \geq \delta$. Alors

$$M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \geq \int_A \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) dm \geq |A|\Phi\left(\frac{\delta}{a}\right)$$

et comme $\Phi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$, on peut choisir $a > 0$ tel que $M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \geq 1$. Donc $\|f\|_\Phi \neq 0$.

- Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans $L^\Phi$. On peut choisir une suite d'indices $\{n_k\}$ strictement croissante telle que $\|\Delta f_{n_k}\| \leq 2^{-k}$. Soit $g = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta f_{n_k}|$. Par la proposition 1.3.6 $(vii)$, $\|g\|_\Phi \leq 1$, d'où $M_\Phi(g) \leq 1$, et comme $\Phi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$, $g$ est finie presque partout. Donc la série $\}\Delta f_{n_k}\{$ converge vers une limite finie presque partout. Alors $f = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta f_{n_k}$ vérifie $f \in L^\Phi$ et de plus $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^\Phi} f$. ■

### 1.3.4 Comparaison d'espaces d'Orlicz

On peut comparer les espaces d'Orlicz à partir de la fonction qui les définit.

**Définition 1.3.4.1** *On note* $\Phi_1 \succ \Phi_2$ *s'il existe* $a$, $b$, $x_0 > 0$ *tels que* $b\Phi_1(ax) \geq \Phi_2(x)$ *pour* $x \geq x_0$.

**Proposition 1.3.4.2** *Soient* $\Phi_1$ *et* $\Phi_2$ *deux fonctions d'Orlicz. Alors*

$$\Phi_1 \succ \Phi_2 \iff L^{\Phi_1} \subseteq L^{\Phi_2}.$$

*Démonstration.* ($\Rightarrow$) Soient $a$, $b$, $x_0 > 0$ tels que $b\Phi_1(ax) \geq \Phi_2(x)$ pour $x \geq x_0$. Si $f \in L^{\Phi_1}$, alors il existe $k$ tel que $M_{\Phi_1}\left(\frac{f}{k}\right) < \infty$. Alors

$$\begin{aligned} M_{\Phi_2}\left(\frac{f}{ka}\right) &= \int_{\mathbb{T}} \Phi_2\left(\frac{|f|}{ka}\right) dm \\ &\leq \int_{|f|<kax_0} \Phi_2(x_0)\, dm + \int_{|f|\geq kax_0} b\Phi_1\left(\frac{|f|}{k}\right) dm \\ &\leq \Phi_2(x_0) + bM_{\Phi_1}\left(\frac{f}{k}\right) < \infty \end{aligned}$$

et $f \in L^{\Phi_2}$.
($\Leftarrow$) Si on n'a pas $\Phi_1 \succ \Phi_2$, alors on peut construire une suite $\{x_n\}$ telle que, pour chaque $n$, $1 \leq \Phi_1(2^n x_n) < 2^{-n}\Phi_2(x_n)$. Soit une suite de $S_n \subseteq \mathbb{T}$ disjoints tels que

$$|S_n| = \frac{2^{-n}}{\Phi_1(2^n x_n)}.$$

Alors $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_n 1_{S_n}$ vérifie

$$M_{\Phi_1}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_1(2^n x_n)\frac{2^{-n}}{\Phi_1(2^n x_n)} = 1 < \infty$$

et $f \in L^{\Phi_1}$. Par contre, pour tout $a > 0$, il existe $N$ tel que $\frac{2^n x_n}{a} > x_n$ pour $n \geq N$, d'où

$$M_{\Phi_2}\left(\frac{f}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_2\left(\frac{2^n x_n}{a}\right)\frac{2^{-n}}{\Phi_1(2^n x_n)} \geq \sum_{n=N}^{\infty} \Phi_2(x_n)\frac{2^{-n}}{\Phi_1(2^n x_n)} \geq \sum_{n=N}^{\infty} 1 = \infty$$

et $f \notin L^{\Phi_2}$. ∎

### 1.3.5 Norme d'Orlicz

Wladyslaw Orlicz a initialement muni ses espaces de la norme suivante.

**Définition 1.3.5.1** *Soit $\Phi$ une fonction d'Orlicz et $\Psi$ sa conjuguée. On définit la norme d'Orlicz par*

$$\|f\|_\Psi^* = \sup_{\|g\|_\Psi \leq 1} |\langle f,\, g\rangle| = \sup_{\|g\|_\Psi \leq 1} \int_{\mathbb{T}} |fg|\, dm.$$

**Proposition 1.3.5.2** *La norme d'Orlicz est équivalente à la norme de Luxemburg.*

*Démonstration.* Nous démontrerons la double inégalité

$$\forall f \in L^\Phi \quad \|f\|_\Phi \overset{(i)}{\leq} \|f\|_\Psi^* \overset{(ii)}{\leq} 2\|f\|_\Phi.$$

***(ii)*** est une conséquence de l'inégalité de Young 1.3.3 : en effet, elle s'écrit, pour tout $f \in B_{L^\Phi}$,

$$\forall g \in B_{L^\Psi} \quad |\langle f,\, g\rangle| \leq \int_{\mathbb{T}} (\Phi(|f|) + \Psi(|g|))\; dm = M_\Phi(f) + M_\Psi(g) \leq 2.$$

***(i)*** résulte du cas d'égalité dans l'inégalité de Young. Soit $f \in L^\Phi$ et posons $a = \|f\|_\Psi^*$. En notant $\phi$ la dérivée de $\Phi$ et en posant $g = \phi\left(\frac{|f|}{a}\right)$, on obtient

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{|f|}{a}|g|\, dm = M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) + M_\Psi(g).$$

■ Si $M_\Psi(g) \le 1$ et donc $\|g\|_\Psi \le 1$, alors $\int_{\mathbb{T}} |fg|\, dm \le \|f\|_\Psi^* = a$ et

$$M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \le M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) + M_\Psi(g) = \int_{\mathbb{T}} \frac{|fg|}{a}\, dm \le 1.$$

■ Si $M_\Psi(g) = b > 1$, alors par convexité $M_\Psi(\frac{g}{b}) \le \frac{1}{b} M_\Psi(g) = 1$, d'où $\|\frac{g}{b}\|_\Phi \le 1$ et donc $\int_{\mathbb{T}} |fg|\, dm \le \|f\|_\Psi^* b = ab$. On obtient

$$M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) + M_\Psi(g) = \int_{\mathbb{T}} \frac{|fg|}{a}\, dm \le \frac{bo70}{a} = M_\Psi(g)$$

et $M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) = 0$.

Dans les deux cas, $M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \le 1$ et donc $\|f\|_\Phi \le a = \|f\|_\Psi^*$. ■

## 1.4 Espaces d'Orlicz et ensembles uniformément intégrables

### 1.4.1 Ensembles uniformément intégrables

**Définition 1.4.1.1** *Soit $\mathscr{F} \subseteq L^1$.*
***(i)*** *$\mathscr{F}$ est uniformément intégrable si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda \quad \forall f \in \mathscr{F} \qquad \int_{|f| \ge \lambda} |f|\, dm < \varepsilon.$$

***(ii)*** *$\mathscr{F}$ est uniformément absolument continu si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in \mathscr{F} \quad \forall S \quad |S| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_S |f|\, dm < \varepsilon.$$

Dans le cas de la mesure de Haar de $\mathbb{T}$, sans atome, les deux notions coïncident.

**Proposition 1.4.1.2** *$\mathscr{F}$ est uniformément intégrable si et seulement si $\mathscr{F}$ est uniformément absolument continu.*

*Démonstration.* ($\Rightarrow$) Soient $\mathscr{F}$ un ensemble uniformément intégrable et $\varepsilon > 0$. Soit alors $\lambda$ tel que

$$\forall f \in \mathscr{F} \qquad \int_{|f| \ge \lambda} |f|\, dm < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient $\delta > 0$ et $S$ tel que $|S| < \delta$. On peut alors écrire pour tout $f \in \mathscr{F}$

$$\int_S |f|\, dm \;=\; \int_{S \cap \{|f| \ge \lambda\}} |f|\, dm + \int_{S \cap \{|f| < \lambda\}} |f|\, dm \;\le\; \frac{\varepsilon}{2} + \delta\lambda.$$

Il suffit de choisir $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\lambda}$ pour conclure que $\mathscr{F}$ est uniformément absolument continu.
($\Leftarrow$) Soient $\mathscr{F}$ un ensemble uniformément absolument continu et $\varepsilon > 0$. Alors on peut fixer $\delta > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathscr{F} \quad \forall S \quad |S| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_S |f|\, dm < \varepsilon.$$

Démontrons alors par l'absurde que $\left|\{|f| \geq \lambda\}\right| < \delta$ pour $\lambda = \dfrac{2\varepsilon}{\delta}$. Soit donc $f \in \mathscr{F}$ tel que $\left|\{|f| \geq \lambda\}\right| \geq \delta$. Comme $dm$ est sans atome, il existe $S \subseteq \{|f| \geq \lambda\}$ de mesure $\dfrac{\delta}{2}$. Alors

$$\varepsilon > \int_S |f|\, dm \geq \frac{\lambda\delta}{2} = \varepsilon,$$

d'où la contradiction. ■

### 1.4.2 Le lien avec les espaces d'Orlicz

Le critère suivant était connu bien avant la définition formelle des espaces d'Orlicz.

**Théorème 1.4.2.1 (Critère de de la Vallée-Poussin)** *Soit $\mathscr{F} \subseteq L^1$. Sont alors équivalentes*
**(1)** *$\mathscr{F}$ est uniformément intégrable.*
**(2)** *Il existe une fonction d'Orlicz $\Phi$ telle que $\mathscr{F}$ est bornée dans $L^\Phi$.*
**(3)** *Il existe une fonction d'Orlicz $\Phi$ telle que $\sup\limits_{f \in \mathscr{F}} M_\Phi(f) < \infty$.*

*Démonstration.* **(3 ⇒ 2)** On a pour tout $f \in L^\Phi$, $\|f\|_\Phi \leq \max(M_\Phi(f), 1)$.
**(2 ⇒ 1)** Supposons que $\sup\limits_{f \in \mathscr{F}} \|f\|_\Phi \leq 1$. Pour $K > 0$ donné, soit $\lambda$ tel que $x \geq \lambda \Rightarrow \dfrac{\Phi(x)}{x} > K$. Alors

$$\int_{|f| \geq \lambda} |f|\, dm \leq \frac{1}{K} \int_{|f| \geq \lambda} \Phi(|f|)\, dm \leq \frac{1}{K}.$$

Comme $K$ est arbitraire, $\mathscr{F}$ est uniformément intégrable.
**(1 ⇒ 3)** Supposons que $\mathscr{F}$ est uniformément intégrable. Alors

$$C(\lambda) = \sup_{f \in \mathscr{F}} \int_{|f| \geq \lambda} |f|\, dm \underset{\lambda \to \infty}{\searrow} 0.$$

Choisissons $\lambda_0$ tel que $C(\lambda_0) < 1$. Alors $-\log C(\lambda) \underset{\lambda_0 \leq \lambda \to \infty}{\nearrow} \infty$. On peut alors construire une fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$ continue telle que

$$\begin{cases} \phi(x) = 0 \text{ sur } ]0, \lambda_0], \\ \phi(x) < -\log C(x) \text{ sur } [\lambda_0, \infty[, \\ \phi \text{ croît strictement vers l'infini.} \end{cases}$$

Par exemple, soit $\lambda_n = \inf\limits_{-\log C(\lambda) \geq n} \lambda$ pour $n \geq 1$ et soit $\phi$ la fonction affine par morceaux supportée par les points

$$\begin{cases} (0, 0), \quad (\lambda_0, 0), \quad (\lambda_1, \min(-\log C(\lambda_0), \lambda_1)); \\ \text{pour } n \geq 2, \quad (\lambda_n, \min(-\log C(\lambda_{n-1}), \lambda_n)) \quad \text{si} \quad C(\lambda_{n-1}) \neq C(\lambda_{n-2}). \end{cases}$$

C'est une dérivée d'Orlicz. Notons $\Phi$ la fonction d'Orlicz correspondante et $\psi$ l'inverse de $\phi$. Comme $\phi$ est strictement croissante sur $[\lambda_0, \infty[$, on a $\phi(\psi(y)) = y$ et $y \leq -\log C(\psi(y))$, *i.e.,* $C(\psi(y)) \leq e^{-y}$

pour $y \geq 0$. On peut alors calculer

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathscr{F} \quad M_\Phi(f) &= \int_{\mathbb{T}} \Phi(|f|)\, dm \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} |f|\phi(|f|)\, dm \\ &= \int_{\mathbb{T}} \int_0^{\phi(|f|)} dx\, |f|\, dm \\ &= \int_0^\infty \int_{|f|\geq\psi(y)} |f|\, dm\, dy \\ &\leq \int_0^\infty C(\psi(y))\, dy \leq \int_0^\infty e^{-y}\, dy = 1.\end{aligned}$$

■

# 2 Ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables

## 2.1 Une caractérisation des ensembles $\Lambda(2)$

La définition des ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables provient de la généralisation d'une des caractérisations des ensembles $\Lambda(2)$. Pour obtenir celle-ci, Walter Rudin utilise un théorème de factorisation dû initialement à Raphaël Salem [21]. Bien que ce théorème de factorisation ait aujourd'hui sa place dans le cadre général des algèbres de Banach (voir [13]), j'ai préféré garder la démarche initiale. On peut néanmoins se passer de ce biais, comme le montre la section 2.1.3.

### 2.1.1 Préparatifs

Nous aurons besoin du théorème suivant de factorisation :

**Théorème 2.1.1.1 (Raphaël Salem [21])** *Soient $1 < q < \infty$ et $h \in L^q$. Alors il existe $f \in L^1$ et $g \in L^q$ telles que $h = f \star g$ presque partout.*

Sa démonstration repose sur l'enchaînement des trois lemmes suivants, tirés de [29] :

**Lemme 2.1.1.2 (Sommation par parties)** *Soient $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Alors*

***(i)*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} U_k \Delta v_k + U_n v_n.$

***(ii)*** *Posons $U_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} u_j$. Si $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante, alors*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_k\right| \leq v_0 \max_{0\leq k\leq n} |U_k|.$$

**Lemme 2.1.1.3** *Les sommes partielles $\sigma_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$ sont uniformément bornées.*

*Démonstration.* On a $\sigma_n(x) = \displaystyle\int_0^x \sum_{k=1}^{n} \cos kt\, dt$ et

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\cos\frac{n+1}{2}t \sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\sin nt \cot\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cos nt - \frac{1}{2}.$$

Or $\int_0^x \frac{1}{2}\sin nt \cot\frac{t}{2}\,dt$ est du même ordre de grandeur que $\int_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt$ : $\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}-\frac{1}{t}$ est borné sur $]0,2\pi[$. De plus, $\int_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt = \int_0^{nx} \frac{\sin u}{u}\,du$ est bornée en $n$ et en $x$. Finalement, $\sigma_n(x)$ est bien bornée en $n$ et en $x$. ■

**Lemme 2.1.1.4 (William H. Young [25])** *Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convexe qui tend vers 0. La série $\}a_{|n|}e_n\{_{n\in\mathbb{Z}}$ converge alors, sauf peut-être en 0, vers une fonction $f$ de $L^1$ dont elle est la série de Fourier.*

*Démonstration.* En sommant deux fois par parties, on obtient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=-n}^{n} a_{|k|}e_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(D_k - D_{k-1}) \qquad [D_{-1}=0] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k D_k + a_n D_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k((k+1)K_k - kK_{k-1}) + a_n D_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 a_k (k+1)K_k + \Delta a_{n-1} nK_{n-1} + a_n D_n, \end{aligned}$$

où $\{D_n\}$ et $\{K_n\}$ sont les noyaux de Dirichlet et de Fejér respectivement. Si $x\neq 0$, $nK_{n-1}(x)$ et $D_n(x)$ sont bornés en $n$. De plus, en sommant par parties, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 a_k(k+1) = (n-1)\Delta a_{n-1} + a_0 - a_{n-1}.$$

Or $\Delta a_n \searrow 0$ et en écrivant

$$a_0 - \lim_n a_n = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta a_i,$$

la comparaison avec $\}\frac{1}{n}\{$ donne que $n\Delta a_n \to 0$. Comme $|K_k(x)|\leq 1$, $S_n(x)$ converge donc absolument vers

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 a_k (k+1) K_k(x)$$

pour $x\neq 0$. Cette convergence est uniforme sur tout intervalle $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$.
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe et $K_k$ positive : $f$ est donc positive et

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{T}} f\,dm = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 a_k(k+1) = a_0 < \infty.$$

Il reste à montrer que $\}a_{|n|}e_n\{_{n\in\mathbb{Z}}$ est la série de Fourier de $f$. Or la série $\}\frac{a_n}{n}s_n\{_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément :

- comme $a_n \searrow 0$, le lemme 2.1.2 s'applique et

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{k}\sin kx\right| \leq a_n \max_{n\leq j\leq m} \left|\sum_{k=n}^{j} \frac{\sin kx}{k}\right|;$$

- selon le lemme 2.1.3, les sommes partielles $\sigma_n$ sont uniformément bornées.

$\}\frac{a_n}{n}s_n\{_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la série de Fourier de sa somme $F$. De plus, par le théorème de dérivation sous le signe somme, $F' = f$ sur tout intervalle $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ et donc sur $]0, 2\pi[$. Comme $F(2\pi) = F(0) = 0$, on a par intégration par parties pour $n > 0$

$$\frac{a_n}{n} = 2 \int_{\mathbb{T}} F s_n \, dm = \frac{2}{n} \int_{\mathbb{T}} f c_n \, dm$$

et

$$a_n = 2 \int_{\mathbb{T}} f c_n \, dm.$$

Pour $n = 0$, on sait déjà que $\int_{\mathbb{T}} f \, dm = a_0$. ■

Munis de ces lemmes, nous pouvons passer à la

*Démonstration du théorème 2.1.1.* Soit $S_k$ la $k^{\text{ème}}$ somme partielle de la série de Fourier de $h$ et $\varepsilon_k = \|h - S_k\|_q$. Puisque $q > 1$, $\varepsilon_k \to 0$. Choisissons $\{a_k\}$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} a_k \text{ décroît strictement} \\ \}a_k\{ \text{ diverge} \\ \}a_k \varepsilon_{k-1}\{ \text{ converge.} \end{array} \right.$

Posons $S_{-1} = 0$. Alors $\}a_k(h - S_{k-1})\{$ converge normalement dans $L^q$ vers $g \in L^q$. Donc

$$\sum_{j=0}^{k} a_j [\widehat{h}(n) - \widehat{S_{j-1}}(n)] \xrightarrow[k \to \infty]{} \widehat{g}(n)$$

avec

$$\widehat{h}(n) - \widehat{S_{j-1}}(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } j - 1 \geq n \\ \widehat{h}(n) & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

D'où $\widehat{g}(n) = \widehat{h}(n)(a_0 + \cdots + a_{|n|})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. $C_n = \left( \sum_{k=0}^{n} a_k \right)^{-1}$ est alors le terme général d'une suite convexe :

$$C_n \searrow 0 \quad \text{et} \quad \Delta C_n = \frac{a_{n+1}}{\left( \sum_{k=0}^{n} a_k \right) \left( \sum_{k=0}^{n+1} a_k \right)} \searrow 0.$$

En appliquant le lemme 2.1.4, on obtient $f \in L^1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = C_{|n|}$. On a donc $\widehat{h} = \widehat{f}\widehat{g}$ et prouvé le théorème. ■

### 2.1.2 Le résultat

**Définition 2.1.2.1 (Walter Rudin [20])** *Soit $p > 1$. $E \subseteq \mathbb{Z}$ est un ensemble $\Lambda(p)$ s'il existe $C$ tel que*

$$\forall P \in \mathscr{P}_E \quad \|P\|_p \leq C \|P\|_1.$$

**Proposition 2.1.2.2 (Walter Rudin [20])** *Soit $p > 1$. Alors sont équivalentes*
**(1)** *$E$ est un ensemble $\Lambda(p)$,*
**(2)** *Pour tout $g \in L^{p'}$, il existe $h \in L^\infty$ telle que $\widehat{h}_{|E} = \widehat{g}_{|E}$,*
**(3)** *Pour tout $g \in L^{p'}$, il existe $h \in \mathscr{C}$ telle que $\widehat{h}_{|E} = \widehat{g}_{|E}$.*

*Démonstration.* **(1 ⇒ 2)** Soit $E$ un ensemble $\Lambda(p)$ de constante $C$. Pour tout $g \in L^{p'}$, on peut définir une forme linéaire $G$ sur $\mathscr{P}_E$ par $Gf = \langle f, g \rangle$. Alors

$$|Gf| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \leq (C \|g\|_{p'}) \|f\|_1.$$

$G$ est donc bornée sur $(\mathscr{P}_E, \| \ \|_1)$. En plongeant cet espace dans $L^1$, le théorème de Hahn-Banach fournit une extension $\widetilde{G} \in L^{1'}$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} \|\widetilde{G}\| \leq \|G\| \\ \widetilde{G}_{|\mathscr{P}_E} = G. \end{array} \right.$

$\widetilde{G}$ s'écrit donc sous la forme $\widetilde{G} f = \langle f, h \rangle$ avec $h \in L^\infty$. De plus,

$$\forall n \in E \quad \widehat{h}(n) = \langle e_n, h \rangle = \widetilde{G} e_n = G e_n = \widehat{g}(n).$$

**(2 ⇒ 3)** Soit $g \in L^{p'}$. Le théorème 2.1.1 permet de factoriser $g$ en $g = f \star g_1$, avec $f \in L^1$ et $g_1 \in L^{p'}$. Par hypothèse, on peut choisir une fonction $h_1 \in L^\infty$ telle que $\widehat{h_1}_{|E} = \widehat{g_1}_{|E}$. Alors $h = f \star h_1$ est continue et vérifie

$$\forall n \in E \quad \widehat{h}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{h_1}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g_1}(n) = \widehat{g}(n).$$

**(3 ⇒ 1)** (3) signifie

$$L^{p'}/L^{p'}_{{}^cE} \subseteq \mathscr{C}/\mathscr{C}_{{}^cE}.$$

Cette inclusion est continue : le théorème du graphe fermé produit une constante $C$ telle que

$$\forall g \in L^{p'} \quad \exists h \in \mathscr{C} \quad \widehat{h}_{|E} = \widehat{g}_{|E} \quad et \quad \|h\|_{\mathscr{C}} \leq C\|g\|_{p'}.$$

Soit $g \in L^{p'}$. On peut donc choisir $h \in \mathscr{C}$ de sorte que

$$\forall f \in \mathscr{P}_E \quad |\langle f, g\rangle| = |\langle f, h\rangle| \leq \|f\|_1\|h\|_\infty \leq C\|f\|_1\|g\|_{p'}.$$

Comme $g \in L^{p'}$ est arbitraire, on en déduit que

$$\forall f \in \mathscr{P}_E \quad \|f\|_p \leq C\|f\|_1.$$

■

**Corollaire 2.1.2.3** *Si $p = 2$, les conditions* (1), (2) *et* (3) *sont équivalentes à*
**(4)** *Il existe une constante $C$ telle que*

$$\forall v \in l^2(E) \quad \exists g \in \mathscr{C} \quad \widehat{g}_{|E} = v \quad et\ \|g\|_{\mathscr{C}} \leq C\|v\|_2.$$

*Démonstration.* L'existence de $g \in \mathscr{C}$ est assertée par une reformulation de (3) et la constante $C$ est donnée par le raisonnement qui engage la preuve de (3 ⇒ 1). ■

### 2.1.3 Une autre démonstration du résultat

On peut se passer des préparatifs : les conditions (2) et (3) de la proposition 2.1.6 signifient en fait respectivement

$$L^\infty/L^\infty_{{}^cE} = L^{p'}/L^{p'}_{{}^cE}$$

et

$$\mathscr{C}/\mathscr{C}_{{}^cE} = L^{p'}/L^{p'}_{{}^cE}.$$

On procède alors de la manière suivante.

**Lemme 2.1.3.1** *Soient $E \subseteq \mathbb{Z}$ et $X = L^p$, $1 \leq p < \infty$, ou $X = \mathscr{C}$. Alors $(X_E)' = X'/X'_{{}^cE}$.*

*Démonstration.* En effet, $(X_E)' = X'/X_E^\perp$ et, pour toute $g \in X'$,

$$(\forall f \in X_E \quad \langle f,\, g\rangle = 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{g}_{|E} = 0.$$

■

**Lemme 2.1.3.2** *Soit $p > 1$. Si $E$ est un ensemble $\Lambda(p)$, alors $M_E = L^1_E$.*

*Démonstration.* On a $L^1_E = L^p_E$ et par le lemme 2.1.8, $L^\infty/L^\infty_{{}^cE} = L^{p'}/L^{p'}_{{}^cE}$. Par le théorème de Banach, on a une constante $C$ telle que

$$\forall g \in L^{p'}\ \exists h \in L^\infty \quad g + L^{p'}_{{}^cE} = h + L^\infty_{{}^cE} \text{ et } \|\dot{h}\|_{L^\infty/L^\infty_{{}^cE}} \leq C\|\dot{g}\|_{L^{p'}/L^{p'}_{{}^cE}}.$$

Soit alors $\mu \in M_E$. On a

$$|\langle \mu,\, g\rangle| = |\langle \mu,\, h\rangle| \leq \|\mu\|_{M_E}\|\dot{h}\|_{L^\infty/L^\infty_{{}^cE}} \leq C\|\mu\|_{M_E}\|\dot{g}\|_{L^{p'}/L^{p'}_{{}^cE}}.$$

Donc $\mu \in (L^{p'}/L^{p'}_{{}^cE})' = L^p_E = L^1_E$. ■

*Nouvelle démonstration de la proposition 2.1.6.* **(1 ⇒ 3)** Par le lemme 2.1.9,

$$L^1_E = M_E = (\mathscr{C}/\mathscr{C}_{{}^cE})'$$

et donc $(\mathscr{C}/\mathscr{C}_{{}^cE})'' = L^\infty/L^\infty_{{}^cE}$. Or $L^\infty/L^\infty_{{}^cE} = L^{p'}/L^{p'}_{{}^cE}$ par le lemme 2.1.8 et donc $L^\infty/L^\infty_{{}^cE}$ est réflexif. Donc

$$\mathscr{C}/\mathscr{C}_{{}^cE} = L^\infty/L^\infty_{{}^cE} = L^{p'}/L^{p'}_{{}^cE}.$$

**(3 ⇒ 2)** est immédiat.
**(2 ⇒ 1)** résulte d'une reformulation de (3 ⇒ 1) de la démonstration antérieure. ■

## 2.2 Définition

La caractérisation des ensembles $E$ de type $\Lambda(2)$ obtenue dans le corollaire 2.1.7 ne permet pas de contrôler la transformée de Fourier de $g \in \mathscr{C}$, qui sur $E$ interpole $v \in l^2(E)$, hors de $E$. Simplement, si

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{g}_{|E} = v \\ \|g\|_{\mathscr{C}} \le C\|v\|_2, \end{array} \right.$$

alors

$$\|\widehat{g}_{|^cE}\|_2^2 = \|g\|_2^2 - \|v\|_2^2 \le (C^2-1)\|v\|_2^2.$$

On définit alors les ensembles $E$ de type $\Lambda(2)$ uniformisable comme ceux pour lesquels la transformée de Fourier de $g$ peut en plus être rendue arbitrairement petite hors de $E$, *i.e.*,

**Définition 2.2.0.3 (Ron C. Blei [3])** *$E \subseteq \mathbb{Z}$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C$ tel que*

$$\forall v \in l^2(E) \quad \exists g \in \mathscr{C} \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{g}_{|E} = v \\ \|g\|_{\mathscr{C}} \le C\|v\|_2 \\ \|\widehat{g}_{|^cE}\|_2 \le \varepsilon\|v\|_2. \end{array} \right.$$

Ron C. Blei avait en fait introduit cette notion pour donner une nouvelle preuve de l'inégalité de Grothendieck [2] et pour la généraliser [3].

**Proposition 2.2.0.4 (Ron C. Blei [2])** *Soit $E$ un ensemble $\Lambda(2)$. Si*

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \mu \in M \quad \left\{ \begin{array}{ll} \widehat{\mu} = 1 & \textit{sur } E \\ |\widehat{\mu}| < \delta & \textit{sur } {}^cE, \end{array} \right.$$

*alors $E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable.*

*Démonstration.* Soient $\varepsilon > 0$ et $v \in l^2(E)$. Selon le corollaire 2.1.7, il existe $C$ indépendante de $v$ et $f \in \mathscr{C}$ telle que $\|f\|_\infty \le C\|v\|_2$. Par hypothèse, on peut choisir une mesure $\mu$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \widehat{\mu} = 1 & \text{sur } E \\ |\widehat{\mu}| < \frac{\varepsilon}{C} & \text{sur } {}^cE. \end{array} \right.$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} (\widehat{f}\widehat{\mu})_{|E} = v \\ \|f \star \mu\|_{\mathscr{C}} \le C\|\mu\|_M\|v\|_2 \\ \|(\widehat{f}\widehat{\mu})_{|^cE}\|_2 \le \frac{\varepsilon}{C}\|\widehat{f}_{|E}\|_2 \le \frac{\varepsilon}{C}\|f\|_\infty \le \varepsilon\|v\|_2. \end{array} \right.$$

■

## 2.3 Deux propositions éclairantes

### 2.3.1 Un résultat de Gilles Pisier

En contraste avec les ensembles $\Lambda(p)$, $p > 2$, on ne connaît pas d'exemple d'un ensemble $\Lambda(2)$ qui ne soit aussi un ensemble $\Lambda(p)$ pour quelque $p > 2$. La proposition suivante montre donc que tous les ensembles $\Lambda(2)$ *connus* sont uniformisables.

**Proposition 2.3.1.1 (Gilles Pisier [3])** *Soit $p > 2$. Tout ensemble $\Lambda(p)$ est alors un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable.*

*Démonstration.* Soient $E$ un ensemble $\Lambda(p)$ et $v \in l^2(E)$. On a une constante $C_p$ qui ne dépend que de $E$ et de $p$ telle que

$$\|\widehat{v}\|_p \le C_p\|v\|_2. \tag{1}$$

Soient $M > 0$ et $S = \{|\widehat{v}| \le M\|\widehat{v}\|_p\}$. Posons

$$h_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \widehat{v}(x) & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad h_2 = \widehat{v} - h_1.$$

Alors $\|h_1\|_\infty \leq M\|\widehat{v}\|_p \leq MC_p\|v\|_2$ et

$$\|h_2\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |h_2|^2\, dm = \int_{{}^cS} |\widehat{v}|^p |\widehat{v}|^{2-p}\, dm.$$

Or $2-p<0$ et sur ${}^cS$, $|\widehat{v}(x)|^{2-p} < M^{2-p}\|\widehat{v}\|_p^{2-p}$. Donc

$$\|h_2\|_2^2 \leq M^{2-p}\|\widehat{v}\|_p^{2-p} \int_{{}^cS} |\widehat{v}|^p\, dm \leq M^{2-p}\|\widehat{v}\|_p^{2-p}\|\widehat{v}\|_p^p$$

et

$$\|h_2\|_2 \leq M^{\frac{2-p}{2}}\|\widehat{v}\|_p. \tag{2}$$

Écrivons alors $h_2 = \widehat{w} + P$ avec $w \in l^2(E)$ et $P \in L^2_{{}^cE}$. (2) et (1) donnent

$$\|w\|_2 \leq M^{\frac{2-p}{2}} C_p \|v\|_2.$$

Comme E est *a fortiori* un ensemble $\Lambda(2)$, la caractérisation du corollaire 2.1.7 donne une constante $C_2$ indépendante de $w$ et une fonction $f \in L^\infty$ telles que

$$\widehat{f}_{|E} = w \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty \leq C_2\|w\|_2 \leq M^{\frac{2-p}{2}} C_2 C_p \|v\|_2.$$

Alors $g = h_1 + f = \widehat{v} - h_2 + f = \widehat{v} - P - \widehat{w} + f$ vérifie

$$\begin{cases} \widehat{g}_{|E} = v, \\ \|g\|_\infty \leq \left(MC_p + M^{\frac{2-p}{2}} C_2 C_p\right)\|v\|_2, \\ \|\widehat{g}_{|{}^cE}\|_2 = \|f - h_2\|_2 \leq \|h_2\|_2 + \|f\|_2 \leq M^{\frac{2-p}{2}}(C_p + C_2 C_p)\|v\|_2. \end{cases}$$

Comme $2-p<0$ et que $M$ est arbitrairement grand, $E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable. ■

On aurait pu aussi démontrer ultérieurement cette proposition comme corollaire du théorème 3.0.1 $(4 \Rightarrow 1)$ pour $\Phi(x) = \dfrac{x^p}{p}$.

### 2.3.2 Une caractérisation des ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables

Nous allons établir une caractérisation qui sera utile pour appréhender le problème de l'union de deux ensembles $\Lambda(2)$, ainsi que pour le théorème 3.0.1.

**Proposition 2.3.2.1 (John J. F. Fournier [9])** *$E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c$ tel que*

$$\forall f \in L^2_E \quad \exists g \in L^\infty \quad \begin{cases} \|g\|_\infty \leq c\|f\|_2 \\ \|g - f\|_2 \leq \varepsilon\|f\|_2. \end{cases} \tag{3}$$

*Démonstration.* $(\Rightarrow)$ Soient $E$ un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable et $\varepsilon > 0$. Soit $C$ tel que pour tout $f \in L^2_E$, on peut choisir $g \in L^\infty$ vérifiant

$$\begin{cases} \widehat{g}_{|E} = \widehat{f}_{|E}. \\ \|g\|_\infty \leq C\|\widehat{f}_{|E}\|_2 = C\|f\|_2 \\ \|\widehat{g}_{|{}^cE}\|_2 \leq \varepsilon\|f\|_2. \end{cases}$$

Alors, pour tout $f \in L^2_E$, un tel $g$ vérifie aussi

$$\|g - f\|_2 = \|\widehat{g} - \widehat{f}\|_2 = \|(\widehat{g} - \widehat{f})_{|{}^cE}\|_2 = \|\widehat{g}_{|{}^cE}\|_2 \leq \varepsilon\|f\|_2.$$

$(\Leftarrow)$ Fixons $0 < \varepsilon < 1$ et $c$ tels que (3). Soit $\delta$ tel que $\varepsilon < \delta < 1$. Soit $v \in l^2(E)$ et $f_1 \in L^2_E$ telle que $\widehat{f_1} = v$. Nous allons construire par récurrence une série $\}P_i\{$ de polynômes trigonométriques, à l'aide d'une suite $\{f_i\}$ de fonctions de $L^2_E$, telle que

$$\begin{cases} \|P_i - f_i\|_2 \leq \delta\|f_i\|_2 \\ \|P_i\|_\infty \leq c\|f_i\|_2 \\ \widehat{f_{i+1}} = \widehat{f_i} - \widehat{P}_{i|E}. \end{cases} \tag{4}$$

■ Soit donc $i \geq 1$. (3) nous fournit une fonction $h_i$ telle que

$$\begin{cases} \|h_i\|_\infty \leq c\|f_i\|_2 \\ \|h_i - f_i\|_2 \leq \varepsilon\|f_i\|_2. \end{cases}$$

La convolution de $h_i$ avec le noyau de Fejér $\{K_n\}$ fournit une suite de polynômes trigonométriques $\{K_n \star h_i\}$ telle que $\begin{cases} \|K_n \star h_i\|_\infty \leq \|K_n\|_1\|h_i\|_\infty \leq \|h_i\|_\infty \\ \|K_n \star h_i - h_i\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{cases}$

On peut donc choisir un polynôme trigonométrique $P_i$ tel que

$$\begin{cases} \|P_i\|_\infty \leq \|h_i\|_\infty \leq c\|f_i\|_2 \\ \|P_i - h_i\|_2 \leq (\delta - \varepsilon)\|f_i\|_2, \end{cases}$$

qui vérifie alors

$$\|P_i - f_i\|_2 \leq \|P_i - h_i\|_2 + \|h_i - f_i\|_2 \leq \delta\|f_i\|_2.$$

On achève la construction par récurrence en définissant $f_{i+1} \in L^2_E$ par $\widehat{f_{i+1}} = \widehat{f_i} - \widehat{P}_{i|E}$.

■ Alors $\|f_{i+1}\|_2 \leq \|f_i - P_i\|_2 \leq \delta\|f_i\|_2$, d'où $\|f_i\|_2 \leq \delta^{i-1}\|v\|_2$. Donc

$$\begin{cases} \|f_i - P_i\|_2 \leq \delta^i\|v\|_2. \\ \|P_i\|_\infty \leq c\delta^{i-1}\|v\|_2 \end{cases}$$

De plus, par (4), $v - \sum_{k=1}^{i} \widehat{P_{k|E}} = \widehat{f_{i+1}}$. On en conclut

$$\|v - \sum_{k=1}^{i} \widehat{P_{k|E}}\|_2 \leq \delta^i\|v\|_2.$$

La série $\}P_i\{$ converge donc normalement vers une fonction continue $g$ qui vérifie

$$\begin{cases} \|g\|_\infty \leq \frac{c}{1-\delta}\|v\|_2 \\ \widehat{g}_{|E} = \widehat{f_1} = v \\ \|\widehat{g}_{|^cE}\|_2 = \|\sum_{i=1}^{\infty} \widehat{P}_{i|^cE}\|_2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|P_i - f_i\|_2 \leq \frac{\delta}{1-\delta}\|v\|_2. \end{cases}$$

Comme $\delta$ est arbitrairement petit avec $\varepsilon$, $E$ est bien $\Lambda(2)$ uniformisable. ■

Si $E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable, on peut donc choisir $c$ tel que les éléments de $B_{L^2_E}$ sont uniformément approximables par des éléments de $cB_{L^\infty}$. D'ailleurs, pour $c$ donné, la meilleure approximation selon (3) d'une fonction $f \in L^2$ est connue : en notant $S = \{|f| > c\|f\|_2\}$, il suffit de prendre $g \in L^\infty$ définie par

$$\begin{cases} g = f & \text{sur } {}^cS \\ g = c\|f\|_2 \operatorname{sgn} f & \text{sur } S. \end{cases}$$

## 2.4 La réunion de deux ensembles $\Lambda(2)$

L'étude des ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables est motivée en partie par la question suivante : la réunion de deux ensembles $\Lambda(2)$ est-elle aussi un ensemble $\Lambda(2)$ ? La même question a déjà été résolue par Rudin [20] pour les ensembles $\Lambda(p)$, $p > 2$.

**Proposition 2.4.0.2 (Walter Rudin [20])** *Soit $p > 2$. Si $E_1$ et $E_2$ sont des ensembles $\Lambda(p)$, alors il en est de même pour $E_1 \cup E_2$.*

*Démonstration.* On peut choisir $C_i$ $(1 \leq i \leq 2)$ tels que

$$\forall f_i \in \mathscr{P}_{E_i} \ \|f_i\|_p \leq C_i\|f_i\|_2 \qquad (1 \leq i \leq 2).$$

Si $f \in P_{E_1 \cup E_2}$, alors $f$ peut s'écrire $f = f_1 + f_2$, avec $f_i \in \mathscr{P}_{E_i}$ $(1 \leq i \leq 2)$ et $\operatorname{spec} f_1 \cap \operatorname{spec} f_2 = \emptyset$. Donc

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p \leq C_1\|f_1\|_2 + C_2\|f_2\|_2 \leq (C_1 + C_2)\|f\|_2$$

et $E$ est un ensemble $\Lambda(p)$. ■

L'introduction d'une fonction d'ensemble $\varepsilon(E)$ et les caractérisations de la proposition 2.4.3 permettent de donner des réponses partielles.

**Définition 2.4.0.3** *Soit $E \subseteq \mathbb{Z}$. Alors $\varepsilon(E)$ est l'infimum des $\varepsilon$ tels qu'il existe $c$ tel que le (3) du lemme 2.3.2 est réalisée.*

**Proposition 2.4.0.4**
***(i)*** $0 \leq \varepsilon(E) \leq 1$.
***(ii)*** $\varepsilon(E \cup F) \leq (\varepsilon(E)^2 + \varepsilon(F)^2)^{\frac{1}{2}}$.
***(iii)*** *$E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable si et seulement si $\varepsilon(E) = 0$.*
***(iv)*** *$E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ si et seulement si $\varepsilon(E) < 1$.*

*Démonstration.* ***(i)*** découle de la définition 2.4.2 en considérant le choix $g \equiv 0$.
***(ii)*** Soient $\varepsilon$ et $\delta$ tels que $\varepsilon(E) < \varepsilon$ et $\varepsilon(F) < \delta$. Soient alors $c$ et $d$ tels que la propriété (3) soit vrai pour $\varepsilon$ et $\delta$ respectivement. Alors tout $f \in L^2_{E\cup F}$ s'écrit $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in L^2_E$, $f_2 \in L^2_F$ et $\operatorname{spec} f_1 \cap \operatorname{spec} f_2 = \emptyset$. On peut trouver $g_1$ et $g_2$ tels que

$$\begin{cases} \|g_1 + g_2\|_\infty \leq c\|f_1\|_2 + d\|f_2\|_2 \leq (c+d)\|f\|_2 \\ \|g_1 + g_2 - f\|_2 \leq \|g_1 - f_1\|_2 + \|g_2 - f_2\|_2 \leq \varepsilon\|f_1\|_2 + \delta\|f_2\|_2. \end{cases}$$

En posant $g = g_1 + g_2$, on a donc aussi

$$\begin{aligned} \|g-f\|_2^2 &\leq \varepsilon^2\|f_1\|_2^2 + \delta^2\|f_2\|_2^2 + 2\varepsilon\delta\|f_1\|_2\|f_2\|_2 \\ &\leq (\varepsilon^2+\delta^2)\|f\|_2 - \varepsilon^2\|f_2\|_2^2 - \delta^2\|f_1\|_2^2 + 2\varepsilon\delta\|f_1\|_2\|f_2\|_2 \\ &\leq (\varepsilon^2+\delta^2)\|f\|_2 \end{aligned}$$

et donc, en passant à l'infimum, $\varepsilon(E \cup F) \leq (\varepsilon(E)^2 + \varepsilon(F)^2)^{\frac{1}{2}}$.
***(iii)*** découle de la proposition 2.3.2.
***(iv)*** $(\Leftarrow)$ Soient $\varepsilon$ et $\delta$ tels que $\varepsilon(E) < \varepsilon < \delta < 1$. On peut choisir $c$ tel que (3) est vrai pour $\varepsilon$. Alors on voit que la démonstration du lemme 2.3.2 est construite de manière à produire, pour tout $v \in l^2(E)$, une fonction $g \in L^\infty$ telle que

$$\begin{cases} \|g\|_\infty \leq \frac{c}{1-\delta}\|v\|_2 \\ \widehat{g}_{|E} = v. \end{cases}$$

Donc $E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ par la proposition 2.1.6.
$(\Rightarrow)$ Réciproquement, soit $C$ telle que

$$\forall f \in L^2_E \quad \|f\|_2 \leq C\|f\|_1.$$

Soit $c$ à choisir ultérieurement. Posons $M = c\|f\|_2$, $S = \{|f| > M\}$ et

$$\begin{cases} g = f & \text{sur } {}^cS \\ g = M \operatorname{sgn} f & \text{sur } S. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |g-f|^2\,dm = \int_S (|f|-M)^2\,dm &\leq \int_{\mathbb{T}} (|f|-M)^2\,dm \\ &\leq \|f\|_2^2 - 2M\|f\|_1 + M^2 \\ &\leq \|f\|_2^2 - \frac{2M}{C}\|f\|_2 + M^2. \end{aligned}$$

En choisissant $M = \dfrac{\|f\|_2}{C}$, on obtient

$$\|g-f\|_2 \leq \sqrt{1 - \frac{1}{C^2}}\|f\|_2.$$

et donc $\varepsilon(E) < 1$. ■

**Théorème 2.4.0.5 (John J. F. Fournier [9])**
***(i)*** *La réunion d'un ensemble* $\Lambda(2)$ $E$ *et d'un ensemble* $\Lambda(2)$ *uniformisable* $F$ *est un ensemble* $\Lambda(2)$.
***(ii)*** *Soient* $E$ *et* $F$ *des ensembles* $\Lambda(2)$ *de constante* $C$ *et* $D$ *respectivement. Si* $C^{-2}+D^{-2}>1$, *alors* $E\cup F$ *est un ensemble* $\Lambda(2)$.

*Démonstration.* ***(i)*** En effet, selon la proposition 2.4.3, $\varepsilon(E)<1$, $\varepsilon(F)=0$ et aussi

$$\varepsilon(E\cup F)\leq(\varepsilon(E)^2+\varepsilon(F)^2)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon(E)<1.$$

Donc $E\cup F$ est un ensemble $\Lambda(2)$.
***(ii)*** En reprenant les estimations de $\varepsilon(E)\leq(1-C^{-2})^{\frac{1}{2}}$ et de $\varepsilon(F)\leq(1-D^{-2})^{\frac{1}{2}}$ obtenues dans la démonstration de la proposition 2.4.3 (*iv*), on obtient, en utilisant 2.4.3 (*ii*) et l'hypothèse,

$$\varepsilon(E\cup F)\leq(\varepsilon(E)^2+\varepsilon(F)^2)^{\frac{1}{2}}\leq(2-C^{-2}-D^{-2})^{\frac{1}{2}}<1.$$

Donc $E\cup F$ est un ensemble $\Lambda(2)$. ∎
Comme on n'a pas en général, pour un ensemble $\Lambda(2)$ de constante $C$, $C<\sqrt{2}$, le théorème 2.4.4 (*ii*) ne permet pas de répondre complètement à la question initiale.

## 3 Ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables et ensembles uniformément absolument continus

On notera $\mathscr{F}_E=\{|f|^2;\ f\in B_{L^2_E}\}$. Le premier grand théorème présenté dans ce mémoire est le

**Théorème 3.0.0.1 (John J. F. Fournier [9])** *Sont équivalentes*
**(1)** $E$ *est un ensemble* $\Lambda(2)$ *uniformisable.*
**(2)** $\mathscr{F}_E$ *est uniformément absolument continu.*
**(3)** *Il existe une fonction d'Orlicz* $\phi$ *telle que* $\mathscr{F}_E$ *est bornée dans* $L^\phi$.
**(4)** *Il existe une fonction d'Orlicz* $\Phi$ *vérifiant*

$$\frac{\Phi(x)}{x^2}\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$$

*telle que* $L^2_E\subseteq L^\Phi$.
**(5)** *Il existe une fonction d'Orlicz* $\Psi$ *vérifiant*

$$\frac{\Psi(x)}{x^2}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

*telle que pour toute* $f\in L^\Psi$, $\widehat{f}_{|E}$ *est dans* $l^2(E)$.

*Démonstration.* **(1 ⇒ 2)** Soit $E$ un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable. Soient $f\in B_{L^2_E}$ et $\varepsilon>0$ et appliquons la proposition 2.3.2 : on a donc une fonction $g\in L^\infty$ telle que $\begin{cases}\|g\|_\infty\leq C\\ \|g-f\|_2\leq\varepsilon.\end{cases}$
Alors on peut écrire pour tout sous-ensemble mesurable $S$ de $\mathbb{T}$

$$\left(\int_S|f|^2\,dm\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\int_S|g|^2\,dm\right)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon\leq|S|^{\frac{1}{2}}C+\varepsilon$$

et

$$\int_S|f|^2\,dm\leq\left(|S|^{\frac{1}{2}}C+\varepsilon\right)^2.$$

Comme cette borne est uniforme par rapport à $f$ et que $\varepsilon$ est arbitraire, on en conclut que $\mathscr{F}_E$ est uniformément absolument continu.
**(2 ⇒ 1)** Soient $\varepsilon>0$ et $f\in B_{L^2_E}$. Soit $C>0$ à choisir ultérieurement et notons $S=\{|f|>C\}$. Définissons $g$ par

$$\begin{cases}g=0 & \text{sur } S\\ g=f & \text{sur } {}^cS\end{cases}$$

Alors $\|g\|_\infty \le C$ et $\|g-f\|_2 = \left(\int\limits_S |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. De plus, par l'inégalité de Tchebycheff,

$$|S| = |\{|f|^2 > C^2\}| \le \frac{\int_{\mathbb{T}} |f|^2\,dm}{C^2} \le \frac{1}{C^2}.$$

Or par hypothèse, $\mathscr{F}_E$ est uniformément absolument continu, *i.e.* on peut choisir $\delta$ tel que

$$|S| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|g-f\|_2 < \varepsilon.$$

En posant $C = \dfrac{2}{\sqrt{\delta}}$, on satisfait aux conditions de la proposition 2.3.2 : $E$ est donc un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable.
**(2 ⇒ 3)** Il s'agit d'une application directe du critère de de la Vallée-Poussin 1.4.3.
**(3 ⇒ 4)** (3) s'écrit

$$\forall f \in B_{L^2_E} \quad \int\limits_{\mathbb{T}} \phi(|f|^2)\,dm \le M$$

pour une fonction d'Orlicz $\phi$ et une constante $M$. Soit $\Phi$ définie par $\Phi(x) = \phi(x^2)$. Alors $\Phi$ est une fonction d'Orlicz : la croissance et la convexité de $\phi$ et l'inégalité $xy \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$ donnent

$$\begin{array}{rcl} \Phi(\lambda x + (1-\lambda)y) & = & \phi(\lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2) \\ & \le & \lambda^2\phi(x^2) + 2\lambda(1-\lambda)\phi(xy) + (1-\lambda)^2\phi(y^2) \\ & \le & \lambda^2\Phi(x) + 2\lambda(1-\lambda)\dfrac{\Phi(x)+\Phi(y)}{2} + (1-\lambda)^2\Phi(y) \\ & = & \lambda\Phi(x) + (1-\lambda)\Phi(y). \end{array}$$

et donc (3) donne

$$\forall f \in B_{L^2_E} \quad \int\limits_{\mathbb{T}} \Phi(|f|)\,dm \le M,$$

*i.e.*, $L^2_E \subseteq L^\Phi$, avec

$$\frac{\Phi(x)}{x^2} = \frac{\phi(x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty.$$

**(4 ⇒ 2)** Démontrons que

$$L^2_E \overset{\Theta}{\hookrightarrow} L^\Phi$$

est continue en appliquant le théorème du graphe fermé : si $x_n \xrightarrow{L^2_E} x$ et $\Theta x_n = x_n \xrightarrow{L^\Phi} y$, alors, par la proposition 1.3.6 $(vi)$, $x_n \xrightarrow{mesure} x$ et $x_n \xrightarrow{mesure} y$, d'où $x = y$. La continuité de $\Theta$ produit une constante $M$ telle que

$$\forall f \in B_{L^2_E} \quad \int\limits_{\mathbb{T}} \Phi\left(\frac{|f|}{M}\right)\,dm \le 1.$$

Il suffit alors d'appliquer le raisonnement de la démonstration du critère de de la Vallée Poussin 1.3.3 : pour $K > 0$ donné, soit $\lambda$ tel que $x \ge \lambda \Rightarrow \dfrac{\Phi(x)}{x^2} > \dfrac{K}{M^2}$. Alors

$$\int\limits_{|f|\ge\lambda} \frac{|f|^2}{M^2}\,dm \le \frac{1}{K} \int\limits_{|f|\ge\lambda} \Phi\left(\frac{|f|}{M}\right)\,dm \le \frac{1}{K}.$$

Donc $\mathscr{F}$ est uniformément intégrable.
**(4 ⇒ 5)** Le raisonnement précédent donne une constante $M$ telle que

$$\forall g \in L^2_E \quad \|g\|_\Phi \le M\|g\|_2.$$

Soit $\Psi$ la fonction conjuguée de $\Phi$. Alors $\dfrac{\Psi(y)}{y^2} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$. Soit $f \in L^\Psi$. Alors

$$\begin{aligned}\forall g \in L^2_E \quad |\langle f,\, g\rangle| = \left|\sum_{n\in E} \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)\right| &\leq 2\|f\|_\Psi \|g\|_\Phi \\ &\leq 2M\|f\|_\Psi\|g\|_2.\end{aligned}$$

Comme $g \in L^2_E$ est arbitraire, $\widehat{f}_{|E}$ est dans $l^2(E)$.
**(5 ⇒ 4)** Démontrons que

$$\begin{array}{ccc} L^\Psi & \xrightarrow{\Theta} & l^2(E) \\ g & \longmapsto & \widehat{g}_{|E} \end{array}$$

est continue en appliquant le théorème du graphe fermé : si $g_n \xrightarrow{L^\Psi} g$ et $\Theta g_n = \widehat{g_n}_{|E} \xrightarrow{l^2(E)} v$, alors

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \langle e_k,\, g_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \widehat{g}(k)$$

et

$$\forall k \in E \quad \widehat{g_n}(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} v_k,$$

d'où $\Theta g = v$. La continuité de $\Theta$ produit une constante $M$ telle que

$$\forall g \in L^\Psi \quad \|\widehat{g}_{|E}\|_2 \leq M\|g\|_\Psi.$$

Soit $\Phi$ la fonction conjuguée de $\Psi$. Alors $\dfrac{\Phi(y)}{y^2} \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$. Soit $f \in L^2_E$. Alors

$$\begin{aligned}\forall g \in L^\Psi \quad |\langle f,\, g\rangle| = \left|\sum_{n\in E} \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)\right| &\leq \|f\|_2\|\widehat{g}_{|E}\|_2 \\ &\leq M\|f\|_2\|g\|_\Psi.\end{aligned}$$

Donc $\|f\|^*_\Psi \leq M\|f\|_2$ et $f$ est dans $L^\Phi$ par une application de la proposition 1.3.11. ■

**Corollaire 3.0.0.2** *Si $E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable, alors il existe un espace d'Orlicz $L^\Phi$ tel que $L^2_E \subseteq L^\Phi \subsetneq L^2$.*

*Démonstration.* Il s'agit de la condition (4) : en effet, si $\dfrac{\Phi(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$, alors $L^\Phi \subsetneq L^2$ par une application de la proposition 1.3.9. ■

Ce théorème ressemble aux caractérisations usuelles des ensembles $\Lambda(p)$, $p > 2$ : en effet, on a trouvé un espace $L^\Phi$ strictement contenu dans $L^2$ tel que $L^\Phi_E = L^2_E$. Mais le corollaire 3.0.2 ne permet pas de caractériser les ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables : il est en effet possible de construire une fonction d'Orlicz $\Phi$ telle que

$$0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x^2} < \limsup_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x^2} = \infty.$$

En effet, il suffit de considérer la fonction affine par morceaux et convexe définie par

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0; x_n = 2^{2^n}; \\ \Phi(x_{2n}) = x^2_{2n}; \\ \Phi(x_{2n+1}) = n x^2_{2n+1}. \end{cases}$$

Dans ce cas, la proposition 1.3.9 entraîne que $L^\Phi \subsetneq L^2$, mais on ne sait pas si alors $E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable, ou même un ensemble $\Lambda(2)$.

# 4 Ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables et 2-association — les résultats de John J. F. Fournier

## 4.1 Définitions

**Définition 4.1.0.3** *Soient $E \subseteq \mathbb{Z}$ et $S$ un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{T}$.*
**(1)** *Alors $E$ est strictement 2-associé avec $S$ s'il existe $\kappa > 0$ tel que*

$$\forall f \in \mathscr{P}_E \quad \|1_S f\|_2 \geq \kappa \|f\|_2.$$

**(2)** *$E$ et $S$ sont 2-associés au sens fort si*

$$\forall \lambda > 1 \quad \exists F \ fini \quad \forall f \in \mathscr{P}_{E \setminus F} \quad \frac{\|f\|_2^2}{\lambda} \leq \frac{1}{|S|} \int\limits_S |f|^2 \, dm \leq \lambda \|f\|_2^2.$$

**(3)** *On dit que le pas de $E$ tend vers l'infini si $E$ est fini ou si, pour tout $M$, les éléments de $E$ diffèrent de plus de $M$ hors d'un sous-ensemble fini.*

La propriété de 2-association est invariante par translation dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{T}$.

**Proposition 4.1.0.4** *Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{T}$. Si $E$ est strictement 2-associé (resp. 2-associé au sens fort) avec $S$, alors $E + n$ est aussi strictement 2-associé (resp. 2-associé au sens fort) avec $S + t$.*

*Démonstration.* En effet, si $f \in P_{E+n}$, alors $e_{-n} f \in P_E$. De plus, en notant $f_t$ la fonction définie par $f_t(x) = f(x - t)$, on a $\|f_t\|_2 = \|f\|_2$, et comme $\widehat{f_t}(n) = e^{-int} \widehat{f}(n)$,

$$f \in \mathscr{P}_E \Rightarrow f_t \in \mathscr{P}_E.$$

Il suffit d'appliquer ceci à chacune des définitions. ■

## 4.2 2-association au sens strict

### 4.2.1 Le résultat antérieur

Aline Bonami a démontré la

**Proposition 4.2.1.1 (Aline Bonami [4])** *Soit $q > 2$. Soient $\Lambda$ un ensemble $\Lambda(q)$ et $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ strictement 2-associé avec $\Lambda$ . Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\Lambda$ soit strictement 2-associé avec tout ensemble $A_1$ tel que $|A \setminus A_1| < \delta$.*

*Démonstration.* Soit $P \in \mathscr{P}_\Lambda$. Fixons $C$ indépendante de $P$ telle que

$$\|P\|_q \leq C \|P\|_2. \tag{5}$$

Il existe $\kappa$ indépendante de $P$ telle que

$$\int\limits_A |P|^2 \, dm \geq \kappa^2 \int\limits_{\mathbb{T}} |P|^2 \, dm.$$

On a, par l'inégalité de Hölder, puis par (5),

$$\forall B \subseteq \mathbb{T} \quad \int\limits_{\mathbb{T}} 1_B |P|^2 \, dm \leq |B|^{1-\frac{2}{q}} \left( \int\limits_{\mathbb{T}} |P|^q \, dm \right)^{\frac{2}{q}} \leq C |B|^{1-\frac{2}{q}} \int\limits_{\mathbb{T}} |P|^2 \, dm.$$

Fixons $\delta$ telle que $C\delta^{1-\frac{2}{q}} \leq \frac{1}{2}\kappa^2$. Alors

$$\forall B \subseteq \mathbb{T} \quad |B| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_B |P|^2\, dm \leq \frac{1}{2}\kappa^2 \int_{\mathbb{T}} |P|^2\, dm$$

et soit $A_1$ tel que $|A \setminus A_1| < \delta$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{A_1} |P|^2\, dm &\geq \int_A |P|^2\, dm - \int_{A\setminus A_1} |P|^2\, dm \\ &\geq \left(\kappa^2 - \frac{1}{2}\kappa^2\right) \int_{\mathbb{T}} |P|^2\, dm = \frac{1}{2}\kappa^2 \int_{\mathbb{T}} |P|^2\, dm.\end{aligned}$$

Donc $\Lambda$ est strictement 2-associé avec $A_1$. ■

### 4.2.2 Le progrès réalisé par John J. F. Fournier

On pallie l'absence de l'inégalité (5) par la caractérisation du théorème 3.0.1 ($1 \Rightarrow 2$).

**Théorème 4.2.2.1 (John J. F. Fournier [9])** *Soient $E$ un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable et $S$ un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ strictement 2-associé avec $E$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $E$ soit strictement 2-associé avec tout ensemble $S_1$ tel que $|S \setminus S_1| < \delta$.*

*Démonstration.* On a une constante $\kappa$ telle que

$$\forall P \in \mathscr{P}_E \cap B_{L^2} \quad \int_S |P|^2\, dm \geq \kappa^2.$$

Or le théorème 3.0.1 ($1 \Rightarrow 2$) énonce que $\mathscr{F}_E$ est uniformément absolument continu : on peut choisir $\delta$ tel que

$$\forall R \subseteq \mathbb{T} \quad |R| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_R |P|^2\, dm \leq \frac{1}{2}\kappa^2.$$

Soit alors $S_1$ tel que $|S \setminus S_1| < \delta$. On obtient

$$\forall P \in \mathscr{P}_E \cap B_{L^2} \quad \int_{S_1} |P|^2\, dm \geq \int_S |P|^2\, dm - \int_{S\setminus S_1} |P|^2\, dm \geq \kappa^2 - \frac{1}{2}\kappa^2 = \frac{1}{2}\kappa^2.$$

Donc $E$ est strictement 2-associé avec $S_1$. ■

## 4.3 2-association au sens fort

### 4.3.1 Les exemples et résultats classiques

Les deux exemples originels de 2-association au sens fort sont les ensembles lacunaires de Hadamard et le cas plus général des ensembles $\Lambda(4)$ dont le pas tend vers l'infini. La démonstration, commune aux deux exemples, est due à Antoni Zygmund [26] et a été adaptée aux ensembles $\Lambda(4)$ par Aline Bonami.

**Proposition 4.3.1.1 (Aline Bonami [4])** *Les ensembles $\Lambda(4)$ dont le pas tend vers l'infini sont associés au sens fort avec tout sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure strictement positive.*

*Démonstration.* Soient donc $\Lambda$ un ensemble $\Lambda(4)$ dont le pas tend vers l'infini, $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure strictement positive et $\varepsilon > 0$.
Soit $f \in \mathscr{P}_\Lambda$ et posons $g = |f|^2$. Alors

$$\int_A g\, dm = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n)\widehat{1_A}(-n).$$

Or
$$\widehat{g}(n) = \sum_{k\in\Lambda} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{f}(k-n)},$$
et comme $n = k - (k-n)$, $\widehat{g}(n) \neq 0$ seulement si $n \in \Lambda - \Lambda$. D'autre part
$$\widehat{g}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2$$
et donc
$$\int_A |f|^2\, dm = \|f\|_2^2 |A| + \sum_{\substack{n\in\Lambda-\Lambda\\ n\neq 0}} \widehat{g}(n)\widehat{1_A}(-n). \tag{6}$$
Or ce dernier terme est, par une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, majoré en module par
$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{n\in\Lambda-\Lambda\\ n\neq 0}} |\widehat{1_A}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Comme $\Lambda$ est un ensemble $\Lambda(4)$, on peut choisir $C$ indépendante de $f$ telle que
$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_4^2 \leq C^2\|f\|_2^2.$$
Comme le pas de $\Lambda$ tend vers l'infini, on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, en ôtant de $\Lambda$ un ensemble fini $\Lambda_1$, faire en sorte que
$$\left(\sum_{\substack{n\in\Lambda\setminus\Lambda_1-\Lambda\setminus\Lambda_1\\ n\neq 0}} |\widehat{1_A}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon\frac{|A|}{C^2}.$$
On obtient finalement grâce à (6)
$$\forall f \in \mathscr{P}_{\Lambda\setminus\Lambda_1} \quad \left| \|f\|_2^2 - \frac{1}{|A|}\int_A |f|^2\, dm \right| \leq \varepsilon\|f\|_2^2,$$
ce qui veut bien dire que $\Lambda$ et $A$ sont 2-associés au sens fort. ∎

### 4.3.2 Le progrès réalisé par John J. F. Fournier

**Théorème 4.3.2.1 (John J. F. Fournier [9])** *Soit $E$ un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable dont le pas tend vers l'infini. Alors $E$ est 2-associé au sens fort avec tout ensemble de mesure strictement positive.*

*Démonstration.* Soit $S$ un ensemble de mesure strictement positive. Soit $\{K_n\}$ le noyau de Fejér ; notons $\{P_n\}$ la suite des $K_n \star 1_S$. Soit $N$ un entier à choisir ultérieurement. Comme le pas de $E$ tend vers l'infini, on peut choisir $F$ fini de sorte que les éléments de $E \setminus F$ soient à des distances mutuelles supérieures à $N$. Alors
$$\forall f \in \mathscr{P}_{E\setminus F} \quad \forall n \in E\setminus F \quad \widehat{P_N f}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{P_N}(k)\widehat{f}(n-k) = \widehat{P_N}(0)\widehat{f}(n) = |S|\widehat{f}(n),$$
puisque si $0 < |k| \leq N$, alors $n - k \notin E\setminus F$ et $\widehat{f}(n-k) = 0$. Donc
$$\forall f \in \mathscr{P}_{E\setminus F} \quad \frac{1}{|S|}\int_{\mathbb{T}} P_N|f|^2\, dm = \frac{1}{|S|}\sum_{n\in E\setminus F} \widehat{P_N f}(n)\overline{\widehat{f}(n)} = \|f\|_2^2. \tag{7}$$

Nous avons presque obtenu la conclusion : il reste à montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall f \in \mathscr{P}_E \quad \left| \int_{\mathbb{T}} P_N |f|^2 \, dm - \int_{\mathbb{T}} 1_S |f|^2 \, dm \right| \leq \varepsilon |S| \, \|f\|_2^2. \tag{8}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons les caractérisations (3) et (4) du théorème 3.0.1 à $E$ et choisissons des fonctions d'Orlicz finies $\phi$ et $\Phi$ telles que

$$\begin{cases} \frac{\phi(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty, \\ \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \Phi(x) = \phi(x^2), \\ L^2_E \hookrightarrow L^\Phi \text{ est continue, de norme } M < \infty. \end{cases}$$

Soient $\psi$ la conjuguée de $\phi$ et $\Psi$ définie par $\Psi(x) = \psi(x^2)$. On a alors par une application de la proposition 1.3.11

$$\forall F \in B_{L^\phi} \quad \forall G \in B_{L^\psi} \quad \int_{\mathbb{T}} |FG| \, dm \leq 2$$

et donc

$$\forall f \in B_{L^\Phi} \quad \forall g \in B_{L^\Psi} \quad \int_{\mathbb{T}} |fg|^2 \, dm \leq 2,$$

*i.e.*,

$$\forall f \in L^\Phi \quad \forall g \in L^\Psi \quad \|fg\|_2 \leq \sqrt{2}\, \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi.$$

Selon la proposition 1.3.4, $\dfrac{\Psi(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Donc $L^2 \subseteq L^\Psi$. Une application du théorème du graphe fermé donne que

$$L^2 \hookrightarrow L^\Psi$$

est continue. Donc

$$P_n \xrightarrow{L^2} 1_S \quad \Longrightarrow \quad P_n \xrightarrow{L^\Psi} 1_S.$$

Soit $\delta > 0$ et choisissons $N$ tel que $\|P_N - 1_S\|_\Psi \leq \delta$. On a

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathscr{P}_E \quad \left| \int_{\mathbb{T}} P_N |f|^2 \, dm - \int_{\mathbb{T}} 1_S |f|^2 \, dm \right| &\leq \int_{\mathbb{T}} |P_N - 1_S| |f|^2 \, dm \\ &\leq \|(1_S - P_N) f\|_2 \|f\|_2 \\ &\leq \sqrt{2}\, \|1_S - P_N\|_\Psi \|f\|_\Phi \|f\|_2 \\ &\leq \sqrt{2}\, \delta M \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

En prenant $\delta = \dfrac{|S|\varepsilon}{\sqrt{2}M}$, on obtient (8). (7) et (8) se combinent pour donner

$$\forall f \in \mathscr{P}_{E \setminus F} \quad \left| \|f\|_2^2 - \frac{1}{|S|} \int_S |f|^2 \, dm \right| \leq \varepsilon \|f\|_2^2,$$

ce qui veut bien dire que $E$ et $S$ sont 2-associés au sens fort. ■

### 4.3.3 Un contre-exemple de John J. F. Fournier

Il est en général nécessaire que le pas de $E$ tende vers l'infini pour que $E$ soit 2-associé au sens fort avec tout ensemble $S$ de mesure strictement positive. Sinon, dès que $|{}^cS| > 0$, on peut construire un ensemble de Sidon qui ne soit pas 2-associé au sens fort avec $S$.
En effet, comme $1_{^cS} \in L^2$, il existe une suite de polynômes trigonométriques qui tend vers $1_{^cS}$ ; de plus, $\|1_{^cS}\|_2 > 0$. Donc

$$\forall M \quad \exists P \in \mathscr{P} \quad \|P\|_2 > M \|P 1_S\|_2.$$

Choisissons de tels $M > 1$ et $P$. Soient $F = \operatorname{spec} P$, $D$ un ensemble de Sidon infini et $E = F + D$. Comme $F$ est fini et que, par le théorème de Drury [5], une réunion finie d'ensembles de Sidon en est un, $E$ est un ensemble de Sidon. Soit alors $E' \subseteq E$ fini. Il reste une infinité de $n \in D$ tels que $F + n \subseteq E \setminus E'$. Soit un tel $n$. Alors $P_n = e_n P \in \mathscr{P}_{E \setminus E'}$ et néanmoins

$$\|P_n\|_2 > M\|P_n 1_S\|_2,$$

*i.e.*, $E$ et $S$ ne sont pas 2-associés au sens fort.

# 5 Ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables et 2-association — les travaux de I. M. Miheev, revus par Kathryn E. Hare

Nous allons démontrer le théorème suivant.

**Théorème 5.0.3.1 (Kathryn E. Hare [12])** *Si $E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable, alors $E$ est strictement 2-associé avec tout ensemble $S$ de mesure strictement positive.*

En fait, Kathryn E. Hare s'inspire des idées mises en œuvre par I. M. Miheev [17] pour démontrer le même résultat pour les ensembles $\Lambda(p)$, $p > 2$, en utilisant les outils développés par John J. F. Fournier, dont elle est une élève.

## 5.1 La notion de parallélépipède

### 5.1.1 Définition

**Définition 5.1.1.1** *$P \subseteq \mathbb{Z}$ est un parallélépipède de dimension $N$ si $P$ s'écrit $P = \sum_{j=1}^{N} \{a_j, b_j\}$ avec $\# P = 2^N$.*

De manière équivalente, $P = \operatorname{spec} \prod_{i=1}^{N} (e_{a_i} + e_{b_i})$. La notion de parallélépipède généralise celle de suite arithmétique : en effet, toute suite arithmétique $\{a + k\rho\}_{1 \le k \le 2^N}$ correspond au spectre de $e_a \prod_{i=1}^{N} (1 + e_{2^i \rho})$.

### 5.1.2 Parallélépipèdes et ensembles $\Lambda(2)$

**Théorème 5.1.2.1 (John J. F. Fournier – Louis Pigno [10])** *Un ensemble $\Lambda(2)$ ne contient pas de parallélépipède de dimension arbitrairement grande.*

*Démonstration.* Soit $E$ un ensemble $\Lambda(2)$ de constante $C$. Soit $g = 1 + e_1$. Alors

$$\|g\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 + e^{it}| \, dt = \frac{4}{\pi} < \sqrt{2}$$

et pour $N$ suffisamment grand,

$$2^{\frac{N}{2}} > C\|g\|_1^N \tag{9}$$

Démontrons par l'absurde que si (9) est vrai, alors $E$ ne contient pas de parallélépipède de dimension N. Soit donc au contraire $P = \sum_{j=1}^{N} \{a_j, b_j\} \subseteq E$ avec $\# P = 2^N$. Notons pour $t \in \mathbb{R}^N$

$$f_t(u) = \prod_{j=1}^{N} (e_{a_j} + e^{i\, t_j} e_{b_j})$$

Alors $f_t \in \mathscr{P}_P$ pour chaque $t$. De plus,

$$\forall n \in P \quad |\widehat{f}_t(n)| = 1$$

et

$$\left( \sum_{n \in E} |\widehat{f}_t(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{N}{2}}. \tag{10}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} \cdots \int_{\mathbb{T}} \left( \int_{\mathbb{T}} |f_t| \, dm \right) dm(t_1) \ldots dm(t_N) \\ = & \int_{\mathbb{T}} \left( \int_{\mathbb{T}} \cdots \int_{\mathbb{T}} |f_t| \, dm(t_1) \ldots dm(t_N) \right) dm \\ = & \int_{\mathbb{T}} \left( \prod_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{T}} |1 + e^{it_j}| \, dm(t_j) \right) dm = \|g\|_1^N. \end{aligned}$$

Il existe donc $t$ tel que $\|f_t\|_1 \leq \|g\|_1^N$. Pour un tel $t$, (10) donne

$$2^{\frac{N}{2}} = \|f_t\|_2 \leq C \|f_t\|_1 \leq C \|g\|_1^N,$$

ce qui contredit (9). ■

En fait, cette preuve permet, avec des changements mineurs, de démontrer le même résultat pour les ensembles $\Lambda(1)$ (voir [10]). I. M. Miheev démontre dans [18] le même résultat pour les ensembles $\Lambda(p)$, $p > 0$.

### 5.1.3 Le théorème de I. M. Miheev

On définit à présent par récurrence les classes $M_n$ :
***(i)*** $M_0$ est la classe des $E \subseteq \mathbb{Z}$ dont le pas tend vers l'infini.
***(ii)*** $M_{n \geq 1}$ est la classe des $E \subseteq \mathbb{Z}$ tels que, pour tout $N \geq 1$, il existe une partition de $E$ en

$$E = E_a \cup \bigcup_{i \in I fini} E_i,$$

où les éléments de $E_a$ diffèrent d'au moins $N$ et où les $E_i$ sont de classe $M_{n-1}$. I. M. Miheev démontre dans [17] que $M_{n+1} \setminus M_n$ n'est pas vide.

**Théorème 5.1.3.1 (I. M. Miheev [17])** *Si $E \subseteq \mathbb{Z}$ ne contient pas de parallélépipède de dimension $n$, $n \geq 2$, alors $E$ et dans la classe $M_{n-2}$.*

*Démonstration.* On démontre le théorème par récurrence :
$\boldsymbol{n = 2}$. Montrons par contraposition que le pas de tout $E \subseteq \mathbb{Z}$ qui ne contient pas de parallélépipède de dimension 2 tend vers l'infini. En effet, si le pas de $E$ ne tend pas vers l'infini,

$$\liminf_{\substack{n \neq m \in E \setminus F \\ F \text{ fini}}} |n - m| < \infty,$$

et pour au moins un entier $\rho \geq 1$, il existe un nombre infini de $n$, $m \in E$ tels que $n - m = \rho$. Soient donc $n_1$, $m_1$, $n_2, m_2$ distincts dans $E$ tels que

$$n_1 - m_1 = n_2 - m_2 = \rho.$$

Alors $\{n_1, m_1, n_2, m_2\} = \{m_1, m_2\} + \{0, \rho\}$ est un parallélépipède de dimension 2.
$\boldsymbol{n \longrightarrow n + 1}$. Supposons donc que $E$ ne contient aucun parallélépipède de dimension $n + 1$. Si $E$ est dans la classe $M_{n-2}$, la démonstration est achevée. Sinon, soit $N$ entier. Il s'agit de construire

une partition de E en une réunion finie d'ensembles de classe $M_{n-2}$ et un ensemble dont les éléments diffèrent d'au moins $N$.
Soit $\rho$ tel que

$$\forall n \neq m \in E \quad |n-m| \geq \rho.$$

Il suffit alors de produire un procédé $(P)$ qui permet d'extraire de $E$ un ensemble $F$ de classe $M_{n-2}$ de sorte que le résidu $E \setminus F$ vérifie

$$\forall n \neq m \in E \setminus F \quad |n-m| \geq \rho + 1. \tag{11}$$

La partition de $E$ recherchée est fournie par itération de ce procédé :
■ soit l'extraction produit à terme un résidu lui-même de classe $M_{n-2}$, et la démonstration est achevée,
■ soit il faut réitérer le procédé jusqu'à ce que les éléments du résidu de l'extraction diffèrent d'au moins $N$ hors de $F$, et comme cet ensemble fini est de classe $M_0$, cela achève la démonstration.
Voici le procédé $(P)$ : d'abord, il existe un sous-ensemble $F$ de $E$ tel que

$$\begin{cases} (i) & \forall n,\, m \in E \quad |n-m| = \rho \quad \Longrightarrow \quad n \in F \text{ ou } m \in F \\ (ii) & n \in F \quad \Longrightarrow \quad n+\rho \in E \\ (iii) & \forall n \neq m \in F \quad |n-m| > \rho. \end{cases}$$

En effet, $E$ ne peut contenir de suite arithmétique infinie. Il suffit alors pour toute suite arithmétique maximale de raison $\rho$ contenue dans $E$, $\{n-\rho,\, \ldots,\, n-k\rho\}$, d'inclure dans $F$ $\{n-2j\rho\}_{2 \leq 2j \leq k}$. Dès lors, $(i)$ entraîne (11). De plus, $F$ est de classe $M_{n-2}$ : par hypothèse de récurrence, il suffit de démontrer que $F$ ne contient pas de parallélépipède $P$ de dimension $n$. Sinon $P + \{0,\, \rho\}$ serait un parallélépipède de dimension $n+1$, contenu dans $E$ selon $(ii)$, puisque $(iii)$ assure que $\#(P + \{0,\, \rho\}) = 2^{n+1}$. C'est absurde. ■
I. M. Miheev a démontré ce théorème non pas pour des parallélépipèdes, mais pour ce qu'il appelle des "segments réflexifs", dont la définition est plus restrictive.

## 5.2 Les lemmes de Kathryn E. Hare

Dans cette section, on considère un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable $E$ et un sous-ensemble $S$ de $\mathbb{T}$ de mesure strictement positive. On notera, pour $F_1,\, F_2 \subseteq \mathbb{Z}$, $d(F_1,\, F_2) = \min_{n_i \in F_i} |n_1 - n_2|$.

### 5.2.1 La réunion de sous-ensembles de $E$ strictement 2-associés avec $S$

**Lemme 5.2.1.1 ([12])** *Soit $\kappa > 0$. Il existe alors $N$ tel que si $\{E_i\}_{i \in I}$ vérifie*

$$\begin{cases} \forall i \in I \quad E_i \subseteq E \\ \forall i \in I \quad \forall f \in \mathscr{P}_{E_i} \quad \|1_S f\|_2^2 \geq \kappa \|f\|_2^2 \\ \forall i \neq j \in I \quad d(E_i,\, E_j) > N, \end{cases} \tag{12}$$

*alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est aussi strictement 2-associé avec $S$.*

*Démonstration.* Appliquons les caractérisations (3) et (4) du théorème 3.0.1 à $E$ et choisissons des fonctions d'Orlicz finies $\phi$ et $\Phi$ telles que

$$\begin{cases} \frac{\phi(x)}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty, \\ \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \Phi(x) = \phi(x^2), \\ L^2_E \hookrightarrow L^\Phi \text{ est continue, de norme } M < \infty. \end{cases}$$

Soient $\psi$ la conjuguée de $\phi$ et $\Psi$ définie par $\Psi(x) = \psi(x^2)$. On a alors comme précédemment

$$\forall f \in L^\Phi \quad \forall g \in L^\Psi \quad \|fg\|_2 \leq \sqrt{2}\, \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi.$$

De même, $L^2 \hookrightarrow L^\Psi$ est continue et donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, on a un $P \in \mathscr{P}$ tel que $\|P - 1_S\|_\Psi \le \varepsilon$. On suppose alors que (12) est réalisé pour $\{E_i\}_{i\in I}$ avec $N = \max\limits_{n,\, m \in \operatorname{spec} P} |n-m|$. Estimons $\|1_S f\|_2^2$ pour $f \in \mathscr{P}_{\bigcup\limits_{i\in I} E_i}$ : soit

$$f = \sum_{i\in I} f_i \quad \text{avec} \quad f_i \in \mathscr{P}_{E_i}.$$

Alors les spectres des $Pf_i$ sont disjoints : en effet, si pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} \widehat{Pf_i}(n) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{P}(k)\widehat{f_i}(n-k) \neq 0 \\ \widehat{Pf_j}(n) = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{P}(l)\widehat{f_j}(n-l) \neq 0, \end{cases}$$

alors

$$\exists k,\, l \in \mathbb{Z} \qquad |k-l| \le N \quad \text{et} \quad \widehat{f_i}(n-k) \neq 0 \quad \text{et} \quad \widehat{f_j}(n-l) \neq 0,$$

d'où $d(\operatorname{spec} f_i, \operatorname{spec} f_i) \le N$, ce qui est en contradiction avec (12).
On en conclut

$$\|Pf\|_2^2 = \sum_{i\in I} \|Pf_i\|_2^2.$$

Or les $E_i$ sont disjoints et uniformément strictement 2-associés avec $S$. Donc

$$\begin{aligned} \kappa\|f\|_2^2 = \kappa \sum_{i\in I} \|f_i\|_2^2 &\le \sum_{i\in I} \|1_S f_i\|_2^2 \\ &\le 2\sum_{i\in I} \left(\|(1_S - P)f_i\|_2^2 + \|Pf_i\|_2^2\right) \end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité $|a+b|^2 \le 2(|a|^2 + |b|^2)$, et

$$\begin{aligned} \kappa\|f\|_2^2 &\le 2\sum_{i\in I} 2\|(1_S - P)\|_\Psi^2 \|f_i\|_\Phi^2 + 2\|Pf\|_2^2 \\ &\le 4\sum_{i\in I} \varepsilon\|f_i\|_\Phi^2 + 2\|Pf\|_2^2 \\ &\le 4\varepsilon M^2 \|f\|_2^2 + 2\|Pf\|_2^2. \end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned} \|Pf\|_2^2 &\le 2\left(\|(P - 1_S)f\|_2^2 + \|1_S f\|_2^2\right) \\ &\le 4\varepsilon M^2 \|f\|_2^2 + 2\|1_S f\|_2^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\kappa\|f\|_2^2 \le 12\varepsilon M^2 \|f\|_2^2 + 4\|1_S f\|_2^2$$

et

$$\|1_S f\|_2^2 \ge \frac{\kappa - 12\varepsilon M^2}{4} \|f\|_2^2.$$

En choisissant $\varepsilon$ assez petit, on obtient que $\bigcup\limits_{i\in I} E_i$ et $S$ sont strictement 2-associés. ■

### 5.2.2 Adjonction d'un élément à un ensemble strictement 2-associé avec $S$

#### 5.2.2.1 Le résultat d'Aline Bonami

**Proposition 5.2.2.1 (Aline Bonami [4])** *Soient $q > 2$ et $\Lambda$ un ensemble $\Lambda(q)$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $\Lambda$ et $A \subseteq \mathbb{T}$ sont strictement 2-associés, alors $\Lambda \cup \{n\}$ et $A$ sont aussi strictement 2-associés.*

*Démonstration.* Notons $L^2_\Lambda(A) = \{f_{|A};\ f \in L^2_\Lambda\}$. Comme $\Lambda$ et $A$ sont strictement 2-associés, $L^2_\Lambda(A)$ est fermé dans $L^2(A)$. Alors $L^2_{\Lambda\cup\{n\}}(A)$, qui contient $L^2_\Lambda(A)$ comme sous-espace de codimension 1, est aussi fermé dans $L^2(A)$. Or

$$\begin{array}{ccc} L^2_{\Lambda\cup\{n\}} & \xrightarrow{\Theta} & L^2_{\Lambda\cup\{n\}}(A) \\ f & \longmapsto & f_{|A} \end{array}$$

est surjective et il suffit de démontrer que $\Theta$ est injective : par le théorème de Banach, $\Theta$ est alors bicontinue, ce qui revient à dire que $\Lambda \cup \{n\}$ et $A$ sont strictement 2-associés. Supposons donc que $f \in L^2_{\Lambda\cup\{n\}}$ est nulle presque partout sur $A$. La proposition 4.2.1 permet de choisir $\delta > 0$ et $\kappa > 0$ tels que

$$\forall B \subseteq \mathbb{T} \quad \forall f \in L^2_\Lambda \quad |A \setminus B| \le \delta \quad \Longrightarrow \quad \|1_B f\|_2^2 \ge \kappa \|f\|_2^2.$$

Puisque

$$v \longmapsto |A| - 1_A \star 1_{-A}(v) = |A| - |A \cap (A - v)| = |A \setminus (A - v)|$$

est continue, on peut choisir un voisinage $V$ de 0 tel que $|A \setminus (A - v)| < \delta$ pour $v \in V$. En posant $A_v = A \cap (A - v)$, on a donc

$$\forall f \in L^2_\Lambda \quad \forall v \in V \quad \|1_{A_v} f\|_2^2 \ge \kappa \|f\|_2^2.$$

Soit alors $f \in L^2_{\Lambda\cup\{n\}}$. Posons pour $v \in V$ $f_v(x) = f(x+v) - e_n(v) f(x)$. Alors

$$\widehat{f_v}(k) = (e_k(v) - e_n(v))\widehat{f}(k)$$

et $f_v \in L^2_\Lambda$. Or $f_v$ est nulle presque partout sur $A_v$. Elle est donc identiquement nulle et donc $(e_k(v) - e_n(v))\widehat{f}(k) = 0$ est nul pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ et $v \in V$. $f$ est donc proportionnelle à $e_n$, et, s'annulant sur $A$, ne peut qu'être nulle sur $\mathbb{T}$. ■

#### 5.2.2.2 La généralisation de Kathryn E. Hare

**Lemme de calcul 5.2.2.2 (Antoni Zygmund [28])** *Soit $g \in L^1$ à valeurs positives ou nulles et non identiquement nulle. Alors*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \ne k \in \mathbb{Z} \quad \int_{\mathbb{T}} g|e_n - e_k|^2\, dm \ge \varepsilon.$$

*Démonstration.* Comme $g \not\equiv 0$, on peut choisir $A \subseteq \mathbb{T}$ de mesure strictement positive et $\delta > 0$ tels que $g_{|A} \ge \delta$. Alors

$$\forall n,\, k \in \mathbb{Z} \quad \Re\widehat{1_A}(n-k) \le |A|,$$

et on n'a égalité que si $n = k$. Comme $\mathbb{Z}$ est discret et que $\widehat{1_A}(n) \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$, il existe en fait $\varepsilon > 0$ tel que

$$n \ne k \quad \Longrightarrow \quad \Re\widehat{1_A}(n-k) \le (1-\varepsilon)|A|.$$

Alors, si $n \ne k$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} g|e_n - e_k|^2\, dm &\ge \delta \int_{\mathbb{T}} 1_A |e_n - e_k|^2\, dm \\ &= 2\delta \int_{\mathbb{T}} 1_A (1 - \Re e_{n-k})\, dm \\ &= 2\delta(|A| - \Re\widehat{1_A}(n-k)) \ge 2\varepsilon\delta|A|. \end{aligned}$$ ■

**Lemme 5.2.2.3 (Kathryn E. Hare [12])** *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $E$ et $S$ sont strictement 2-associés, alors $E \cup \{n\}$ et $S$ sont aussi strictement 2-associés, avec une constante indépendante de $n$.*

*Démonstration.* Le théorème 4.2.2 permet de choisir $\delta > 0$ et $\kappa > 0$ tels que

$$\forall R \subseteq \mathbb{T} \quad \forall f \in \mathscr{P}_E \quad |S \setminus R| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \|1_R f\|_2^2 \geq \kappa \|f\|_2^2.$$

Puisque

$$v \longmapsto |S| - 1_S \star 1_{-S}(v) = |S| - |S \cap (S - v)| = |S \setminus (S - v)|$$

est continue, on peut choisir un voisinage $V$ de $0$ tel que $|S \setminus (S - v)| < \delta$ pour $v \in V$. En posant $S_v = S \cap (S - v)$, on a donc

$$\forall f \in \mathscr{P}_E \quad \forall v \in V \quad \|1_{S_v} f\|_2^2 \geq \kappa \|f\|_2^2.$$

Soit alors $f \in \mathscr{P}_{E \cup \{n\}}$. Posons pour $v \in V$ $f_v(x) = f(x + v) - e_n(v) f(x)$. Alors

$$\widehat{f_v}(k) = (e_k(v) - e_n(v)) \widehat{f}(k) \tag{9}$$

et $f_v \in \mathscr{P}_E$. Le choix de $S_v$ entraîne que

$$\|1_S f\|_2^2 \quad \geq \quad \frac{1}{|V|} \int\limits_V \int\limits_{S_v} \frac{|f(x+v)|^2 + |f(x)|^2}{2} \, dm(x) \, dm(v).$$

Par l'inégalité $\dfrac{|a|^2 + |b|^2}{2} \geq \dfrac{|a + b|^2}{4}$,

$$\begin{aligned} \|1_S f\|_2^2 \quad &\geq \quad \frac{1}{4|V|} \int\limits_V \int\limits_{S_v} |f_v(x)|^2 \, dm(x) \, dm(v) \\ &\geq \quad \frac{1}{4|V|} \int\limits_V \kappa \|f_v\|_2^2 \, dm(v); \end{aligned}$$

en appliquant (5.2.2.2),

$$\|1_S f\|_2^2 \quad \geq \quad \frac{\kappa}{4|V|} \sum_{k \neq n} |\widehat{f}(k)|^2 \int\limits_{\mathbb{T}} 1_V |e_k - e_n|^2 \, dm;$$

Le lemme 5.2.3 permet alors de choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|1_S f\|_2^2 \geq \frac{\kappa}{4|V|} \sum_{k \neq n} |\widehat{f}(k)|^2 \cdot \varepsilon. \tag{3}$$

Mais nous pouvons aussi obtenir une autre estimation : la petite inégalité précédente s'écrit aussi $|a + b|^2 \geq \dfrac{1}{2} |a|^2 - |b|^2$, ce qui justifie

$$\begin{aligned} \|1_S f\|_2^2 \quad &= \quad \int\limits_S \left| \sum_{k \in E \cup \{n\}} \widehat{f}(k) e_k \right|^2 \\ &\geq \quad \frac{1}{2} \int\limits_S |\widehat{f}(n) e_n|^2 - \int\limits_S \left| \sum_{k \in E} \widehat{f}(k) e_k \right|^2 \\ &\geq \quad \frac{|S|}{2} |\widehat{f}(n)|^2 - \sum_{k \neq n} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &\geq \quad \frac{|S|}{2} \|f\|_2^2 - \left( \frac{|S|}{2} + 1 \right) \sum_{k \neq n} |\widehat{f}(k)|^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Combinons les minorations (5.2.2.2) et (1) en considérant les cas
(*i*) $\sum\limits_{k \neq n} |\widehat{f}(k)|^2 \geq \tau \|f\|_2^2$,

$(ii)$ $\sum_{k\neq n} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \tau \|f\|_2^2$,

avec $\tau$ à fixer opportunément. En substituant $(i)$ dans (5.2.2.2) et $(ii)$ dans (1), on obtient

$$(i) \quad \Longrightarrow \quad \|1_S f\|_2^2 \geq \frac{\kappa\varepsilon}{4|V|}\tau\|f\|_2^2$$

et

$$(ii) \quad \Longrightarrow \quad \|1_S f\|_2^2 \geq \left(\frac{|S|}{2} - \tau\frac{|S|+2}{2}\right)\|f\|_2^2$$

Pour obtenir une borne uniforme $\chi$, il faut résoudre

$$\frac{\kappa\varepsilon\tau}{4|V|} = \chi = \frac{|S|}{2} - \tau\frac{|S|+2}{2},$$

ce qui donne

$$\chi = \frac{\kappa\varepsilon|S|}{2\kappa\varepsilon + 4|S|\,|V| + 8|V|}.$$

Cette constante est bien indépendante de $n$. ∎

### 5.2.3 Conditions arithmétiques

On sait que les ensembles $\Lambda(p)$ ne peuvent contenir de suite arithmétique arbitrairement longue. Pour quantifier ce phénomène, on introduit la

**Définition 5.2.3.1 (Walter Rudin [20])** *On note $\alpha_E(N)$ la borne supérieure du cardinal de l'intersection des suites arithmétiques de longueur $N$ avec $E$ :*

$$\alpha_E(N) = \sup_{a,\, b\in\mathbb{Z}} \#(\{a+b,\, \ldots,\, a+Nb\} \cap E).$$

En adaptant la démonstration d'un résultat similaire dans [20], on a le

**Lemme 5.2.3.2 (Kathryn E. Hare [12])** *Si $E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable de constante $C$ pour $\varepsilon$, alors*

$$\alpha_E(N) \leq 8(C^2 + \varepsilon^2 N).$$

*Démonstration.* Le noyau de Fejér $\{K_n\}$ vérifie $\|K_n\|_1 = 1$ et

$$\|K_{n-1}\|_2^2 = \sum_{|j|\leq n-1}\left(1-\frac{|j|}{n}\right)^2 = \frac{2n^2+1}{3n} \leq n.$$

Soit $A = \{a+b,\, \ldots,\, a+Nb\}$. Posons $m = \lfloor \frac{1}{2}(N+1)\rfloor$ et

$$Q(t) = e_{a+mb}(t)K_{N-1}(bt).$$

Alors

$$\forall n \in A \quad \widehat{Q}(n) \geq \frac{1}{2}.$$

De plus, $\|Q\|_1 = \|K_{N-1}\|_1 = 1$ et $\|Q\|_2 = \|K_{N-1}\|_2 \leq \sqrt{N}$. Posons

$$f = \sum_{n\in A\cap E} e_n \in L^2_E$$

et $\alpha = \#(A\cap E)$. Comme $E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable de constante $C$ pour $\varepsilon$, on peut choisir $g \in L^\infty$ telle que

$$\begin{cases} \|g\|_\infty \leq C\|f\|_2 = C\sqrt{\alpha} \\ \|g-f\|_2 \leq \varepsilon\|f\|_2 = \varepsilon\sqrt{\alpha}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \leq \sum_{n\in A\cap E} \widehat{Q}(n) &= \langle f,\, Q\rangle \\
&= \langle g,\, Q\rangle + \langle f-g,\, Q\rangle \\
&\leq \|g\|_\infty \|Q\|_1 + \|f-g\|_2\|Q\|_2 \\
&\leq C\sqrt{\alpha} + \varepsilon\sqrt{\alpha}\sqrt{N}.
\end{aligned}$$

Par une application de l'inégalité $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, on a donc

$$\alpha \leq 4(C+\varepsilon\sqrt{N})^2 \leq 8(C^2+\varepsilon^2 N).$$

■

**Corollaire 5.2.3.3** *Soit $E$ un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable. Alors pour tout $N$, il existe $M$ tel que chaque intervalle de longueur $M$ contient un intervalle de longueur $N$ disjoint de $E$.*

*Démonstration.* En effet, si $E$ est un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable de constante $C$ pour $\varepsilon$, alors $\{a+1,\, \ldots,\, a+M\}$ contient un sous-intervalle de longueur $N = \dfrac{M}{8(C^2+\varepsilon^2 M)}$ disjoint de $E$. Il suffit donc de choisir, par exemple, $\varepsilon = (16N)^{\frac{1}{2}}$ et $M = 16C^2N$. ■

### 5.2.4 La réunion d'un sous-ensemble de $E$ strictement 2-associé avec $S$ et d'un sous-ensemble de $E$ dont les éléments sont dispersés

**Lemme 5.2.4.1 ([12])** *Soit $E$ un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable, et soit $E' \subseteq E$ strictement 2-associé avec un ensemble $S \subseteq \mathbb{T}$. Alors il existe $M$ tel que, pour tout $E'' \subseteq E$ dont les éléments diffèrent d'au moins $M$, $E' \cup E''$ est aussi strictement 2-associé avec $S$.*

*Démonstration.* Le lemme 5.2.4 assure que les ensembles $E' \cup \{n\}$ sont strictement 2-associés avec $S$, avec une constante $\chi$ indépendante de $n$. Choisissons $N$ tel que le lemme 5.2.1 s'applique pour $C$. Choisissons $M$ tel que le corollaire 5.2.7 s'applique pour $N$. Alors tout intervalle de longueur $M$ contient un intervalle de longueur $N$ disjoint de $E$ : pour chaque paire $\{n,\, m\}$ d'éléments de $E''$, il y a dans $[n,\, m]$ un intervalle de longueur $N$ disjoint de $E$. On peut donc construire une partition de $E' \cup E''$ en ensembles $E_i$ tels que

$$\begin{cases} i \neq j \;\Rightarrow\; d(E_i, E_j) \geq N \\ \text{Chaque } E_i \text{ contient exactement un élément de } E''. \end{cases}$$

En effet, il suffit d'associer à chaque $n \in E''$ l'ensemble des éléments de $E'$ qui lui sont plus proches que les intervalles de longueur $N$ qui le séparent des autres éléments de $E$. Ces $E_i$ sont alors tous strictement 2-associés avec $S$ avec une même constante $\chi$. Le lemme 5.2.1 entraîne alors que $E' \cup E''$ est strictement 2-associé avec $S$. ■

### 5.2.5 La démonstration du théorème 5.0.1

Par le théorème 5.1.2, $E$ ne contient pas de parallélépipède de dimension arbitrairement grande : par le théorème 5.1.3, $E$ est donc dans une des classes $M_k$. Donc, pour un certain $n$, $E$ est réunion d'un nombre fini d'ensembles de classe $M_n$ et d'un ensemble dont les éléments sont à des distances mutuelles arbitrairement grandes. Grâce au lemme 5.2.8, il suffit alors de montrer, pour tout $n \geq 0$, que tout $E' \subseteq E$ de classe $M_n$ est strictement 2-associé avec $S$. Mais il faudra nous atteler à démontrer un énoncé plus fort pour appliquer le principe de récurrence, *i. e.*, la

**Proposition 5.2.5.1 ([12])** *Pour tout entier naturel $n$*

$$\begin{cases} E' \subseteq E \textit{ strict}^t \textit{ 2-associé avec } S \\ E'' \subseteq E \textit{ de classe } M_n \end{cases} \Rightarrow\; E' \cup E'' \textit{ strict}^t \textit{ 2-associé avec } S.$$

*Démonstration.* $\boldsymbol{n = 0}$. Soit $E' \subseteq E$ strictement 2-associé avec $S$, et soit $E'' \subseteq E$ de classe $M_0$. Fixons $M$ selon le lemme 5.2.8. Or le pas de $E''$ tend vers l'infini : il existe $F \subseteq E''$ fini tel que les éléments de $E'' \setminus F$ diffèrent d'au moins $M$. En vertu du lemme 5.2.8, $E' \cup E'' \setminus F$ est strictement 2-associé avec $S$. Par une application répétée du lemme 5.2.4, $E' \cup E''$ est aussi strictement 2-associé avec $S$.
$\boldsymbol{n \longrightarrow n+1}$. Soit $E' \subseteq E$ strictement 2-associé avec $S$, et soit $E'' \subseteq E$ de classe $M_{n+1}$. Fixons $M$ selon le lemme 5.2.8. $E''$ peut s'écrire $E'' = E_a \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_i$, où les $E_i$ sont de classe $M_n$ et où les éléments de $E_a$ diffèrent d'au moins $M$. En vertu du lemme 5.2.8, $E' \cup E_a$ est strictement 2-associé avec $S$. L'hypothèse de récurrence, appliquée $k$ fois, donne que $E' \cup E_a \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_i = E' \cup E''$ est aussi strictement 2-associé avec $S$. ■

# 6 Deux applications classiques

## 6.1 Passage du local au global

**Théorème 6.1.0.2** ([12]) *Soit $E$ un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable. Si $f \in L^2_E$ s'annule sur un ensemble de mesure strictement positive, alors $f$ est identiquement nulle sur $\mathbb{T}$.*

*Démonstration.* $E$ est strictement 2-associé avec tout ensemble de mesure strictement positive par le théorème 5.0.1, et le théorème découle de la définition de la 2-association. ■

## 6.2 Convergence simple et convergence $L^2$

**Lemme 6.2.0.3 (Dmitrii Fiodorovitch Egoroff [7])** *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions sur $\mathbb{T}$ qui converge simplement sur un ensemble $R$ de mesure strictement positive. Alors il existe un ensemble de mesure strictement positive $S$ sur lequel $\{f_n\}$ converge uniformément.*

*Démonstration.* Notons $f$ la limite ponctuelle de $\{f_n\}$ sur $R$. Soit $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ et posons

$$S_{j,\,n} = \{x \in R;\, \forall k \geq j\ |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon_n\}.$$

Alors $S_{j,\,n} \subseteq S_{j+1,\,n}$ pour tout $j \geq 1$ et $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_{j,\,n} = R$. Soit $0 < \delta < |R|$. On peut alors choisir pour chaque $n$ un entier $N(n)$ tel que

$$|R \setminus S_{N(n),\,n}| \leq \frac{\delta}{2^n}.$$

Posons $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{N(n),\,n}$. Alors

$$\forall n \quad \forall k \geq N(n) \quad \forall x \in S \quad |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon_n$$

et $\{f_n\}$ converge uniformément sur $S$. De plus,

$$|S| = |R| - |R \setminus S| \geq |R| - \sum_{n=1}^{\infty} |R \setminus S_{N(n),\,n}| \geq |R| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^n} = |R| - \delta > 0.$$ ■

**Théorème 6.2.0.4** ([12]) *Soit $E$ un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable et soit $v$ une suite indexée par $E$. Si $\}v_n e_n\{_{n \in E}$ converge simplement sur un ensemble de mesure strictement positive, alors $v \in l^2(E)$.*

*Démonstration.* Par une application du lemme 6.2.1, on sait que $\}v_n e_n\{_{n\in E}$ converge uniformément sur un ensemble $S$ de mesure strictement positive. Donc

$$\sup_N \left\| 1_S \sum_{|n\in E|\leq N} v_n e_n \right\|_2 \leq \sup_N \left\| 1_S \sum_{|n\in E|\leq N} v_n e_n \right\|_\infty < \infty.$$

Comme $E$ et $S$ sont strictement 2-associés, $\sup_N \left\| \sum_{|n\in E|\leq N} v_n e_n \right\|_2 = \|v\|_2 < \infty.$ ∎

## Bibliographie


[1] Stefan Banach – « Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen », *Studia Math.* **2** (1930), p. 207–220. (p. 2).

[2] Ron C. Blei – « A uniformity property for $\Lambda(2)$ sets and Grothendieck's inequality », Symposia Mathematica, Vol. XXII (Convegno sull'Analisi Armonica e Spazi di Funzioni su Gruppi Localmente Compatti, INDAM, Rome, 1976), Academic Press, London, 1977, p. 321–336. (p. 14).

[3] Ron C. Blei – « Multidimensional extensions of the Grothendieck inequality », *Arkiv Mat. 17* (1979), p. 51–68. (p. 14).

[4] Aline Bonami – « Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$ », *Ann. Inst. Fourier* **20** (1970), p. 335–402. (pp. 1, 21, 22 et 28).

[5] S. W. Drury – « Sur les ensembles de Sidon », *Comptes Rendus 271 A* (1970), p. 162–163. (p. 25).

[6] G. A. Edgar et Louis Sucheston – *Stopping times and directed processes*, Cambridge University Press, 1992. (p. 3).

[7] Dmitrij Fedorovič Egoroff – « Sur les suites de fonctions mesurables », *C. R. Acad. Sci. Paris* **152** (1911), p. 244–246. (p. 33).

[8] Lipót Fejér – « Untersuchungen über Fouriersche Reihen », *Math. Annalen 58* (1904), p. 51–69. (p. 3).

[9] John J. F. Fournier – « Uniformizable $\Lambda(2)$ sets and uniform integrability », *Colloq. Math. 51* (1987), p. 119–129. (pp. 1, 15, 18, 22 et 23).

[10] John J. F. Fournier et Louis Pigno – « Analytic and arithmetic properties of thin sets », *Pacific J. Math. 105* (1983), p. 115–141. (pp. 25 et 26).

[11] Jacques Hadamard – « Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor », *J. Math. Pures Appl. (4) 8* (1892), p. 101–186. (p. 2).

[12] Kathryn E. Hare – « Strict-2-associatedness for thin sets », *Colloq. Math. 56* (1988), p. 367–381. (pp. 1, 25, 27, 29, 31, 32 et 33).

[13] Edwin Hewitt et Kenneth A. Ross – *Abstract harmonic analysis ii*, Springer Verlag, 1970. (p. 10).

[14] J.-P. Kahane – « Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées », *Ann. Inst. Fourier* **7** (1957), p. 293–314. (p. 2).

[15] Wilhelmus A. J. Luxemburg – *Banach function spaces*, Technische Hogeschool te Delft, 1955. (p. 5).

[16] Szolem Mandelbrojt – *Séries de Fourier et ensembles quasi-analytiques de fonctions*, Gauthier-Villars, 1935. (p. 2).

[17] I. M. Mikheev – « On lacunary series », *Math. USSR–Sb.* **27** (1975), p. 481–502. (pp. 1, 25 et 26).

[18] — , « Trigonometric series with gaps », *Anal. Math.* **9** (1983), p. 43–55. (p. 26).

[19] Wladyslaw Orlicz – « Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B », *Bull. Acad. Pol.* (1932), p. 207–220. (p. 3).

[20] Walter Rudin – « Trigonometric series with gaps », *J. Math. Mech.* **9** (1960), p. 203–228. (pp. 2, 12, 16 et 31).

[21] Raphaël Salem – « Sur les transformations des séries de Fourier », *Fund. Math. 33* (1945), p. 108–114. (p. 10).

[22] Simon Sidon – « Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourierreihen, in denen sehr viele Glieder fehlen », *Math. Ann.* **96** (1926), p. 418–419. (p. 2).

[23] Karl Weierstraß– « Über continuirliche Functionen eines reellen Argumentes, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen », *Königl. Akad. Wiss.* (1872), Trois premières pages, dernière page. (p. 2).

[24] William H. Young – « On classes of summable functions and their Fourier series », *Proc. Royal Soc. (A) 87* (1912), p. 225–229. (p. 4).

[25] — , « On the Fourier series of bounded functions », *Proc. London Math. Soc. 12* (1913), p. 433–452. (p. 11).

[26] Antoni Zygmund – « On the convergence of lacunary trigonometric series », *Fund. Math. 16* (1930), p. 90–107. (p. 22).

[27] — , « On lacunary trigonometric series », *Trans. Amer. Math. Soc. 34* (1932), p. 435–446. (p. 2).

[28] — , « On a theorem of Hadamard », *Ann. Soc. Polon. Math 21* (1948), p. 52–69. (p. 29).

[29] — , *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959. (p. 10).