Note sur la coïncidence de deux hensélisations

les auteurs

9 octobre 2023

La dernière version en cours : http://hlombardi.free.fr/F-Note-2H.pdf

Résumé

Nous comparons deux hensélisés d'un domaine de valuation résiduellement discret. Notre démonstration constructive qu'un certain morphisme naturel est un isomorphisme est aussi une démonstration en mathématiques classiques. Bien que cet isomorphisme soit implicitement admis comme évident dans la littérature, il semble qu'aucune démonstration n'était auparavant disponible.

Cette note est écrite dans le style des mathématiques constructives à la Bishop (Bishop (1967); Bishop et Bridges (1985); Bridges et Richman (1987); Mines *et al.* (1988); Lombardi et Quitté (2015); Yengui (2015)).

Terminologie, notations.

Ce paragraphe précise la terminologie constructive usuelle pour un certain nombre de notions classiques. D'un point de vue constructif, la mise au point de bonnes définitions [1] est une partie décisive du travail qui consiste à extraire le contenu constructif d'un résultat concret obtenu au moyen d'une démonstration classique.

Un anneau est dit *normal* lorsque tout idéal de type fini est intégralement clos. En mathématiques classiques, cette définition constructive est démontrée équivalente à la définition plus usuelle selon laquelle l'anneau devient intégralement clos après localisation en n'importe quel idéal premier.

Un anneau est *connexe* si tout idempotent est égal à 0 ou 1.

Soit $\mathbf{K}$ un corps discret et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On dit que E est fini sur $\mathbf{K}$ (resp. strictement fini sur $\mathbf{K}$) si c'est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de type fini (resp. si on connait une base finie de E sur $\mathbf{K}$). Plus généralement si $\mathbf{A}$ est un anneau et E un $\mathbf{A}$-module, on dit que E est fini sur $\mathbf{A}$ si c'est un $\mathbf{A}$-module de type fini, et strictement fini sur $\mathbf{A}$ si c'est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini.

Soit $\mathbf{K}$ un corps discret, une $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{L}$ est dite *étale* si elle est strictement finie et si la forme trace est non dégénérée. De manière équivalente, elle est strictement finie et engendrée par des éléments séparables sur $\mathbf{K}$. Plus généralement si $\mathbf{A}$ est un anneau, une $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$ est dite *strictement étale* si elle est strictement finie et si la forme trace est non dégénérée. Voir par exemple dans Lombardi et Quitté (2015) les définitions VI-1.1 et VI-5.1, et les théorèmes VI-1.4, VI-1.7, VI-5.4 et VI-5.5.

1. Une « bonne définition » doit avoir un sens constructif clair, s'appliquer aux cas usuellement traités dans la littérature courante, et être équivalente en mathématiques classiques à la définition usuelle la plus courante. Naturellement, l'affaire n'est pas toujours simple. Plusieurs « bonnes » définitions constructives constructivement inéquivalentes peuvent s'appliquer à une seule notion classique et il est parfois utile d'en considérer plusieurs.

Le *radical de Jacobson* d'un anneau $\mathbf{A}$, noté $\operatorname{Rad}(\mathbf{A})$ est l'idéal formé par les $x \in \mathbf{A}$ tels que $1 + x\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}^\times$ (le groupe multiplicatif des inversibles.)

Un *anneau quasi intègre* est un anneau dans lequel l'annulateur de tout élément est engendré par un idempotent. Un anneau quasi intègre est normal si, et seulement si, il est intégralement clos dans son anneau total de fractions. Un anneau intègre n'est autre qu'un anneau quasi intègre connexe.

Un *anneau local* est un anneau $\mathbf{A}$ dans lequel pour tout x, x ou $1 - x$ est inversible. Son radical de Jacobson $\operatorname{Rad} \mathbf{A}$, noté aussi $\mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{m}_\mathbf{A}$, est dans ce cas égal à l'idéal formé par les éléments non inversibles. Un anneau local est appelé un *corps de Heyting* si $\operatorname{Rad} \mathbf{A} = \{ 0 \}$. Le corps résiduel d'un anneau local est l'anneau quotient $\mathbf{A}/\operatorname{Rad} \mathbf{A}$. On dit que l'anneau local est résiduellement discret lorsque ce corps résiduel est un corps discret. Cela revient à dire que l'on a un test pour «$x \in \mathbf{A}^\times$ ou $x \in \operatorname{Rad} \mathbf{A}$?» dans $\mathbf{A}$.

Un morphisme dans la catégorie des anneaux locaux est un morphisme d'anneaux $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ qui réfléchit les unités, c'est-à-dire tel que $\varphi(x) \in \mathbf{C}^\times$ implique $x \in \mathbf{A}^\times$. Un tel morphisme est parfois appelé local, pour le distinguer des simples morphismes d'anneaux.

Dans la catégorie des anneaux locaux résiduellement discrets, on dit que le morphisme $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ définit $\mathbf{C}$ comme une $\mathbf{A}$-*algèbre locale*[2].

Un *code de Hensel* dans un anneau local résiduellement discret $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$ est un couple $(f, a) \in \mathbf{A}[X] \times \mathbf{A}$ avec f unitaire, $f(a) \in \mathfrak{m}$ et $f'(a) \in \mathbf{A}^\times$.

Pour un anneau local résiduellement discret $\mathbf{A}$ et un code de Hensel (f, a), *un zéro de Hensel de code* (f, a) dans une $\mathbf{A}$-algèbre $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ est un élément $\alpha \in \mathbf{C}$ qui vérifie $f(\alpha) = 0$ et $\alpha - \varphi(a) \in \operatorname{Rad} \mathbf{C}$ (on a alors $f'(\alpha) \in \mathbf{C}^\times$). Ce zéro est nécessairement unique. Un $f \in \mathbf{A}[X]$ unitaire tel que $(f, 0)$ est un code de Hensel est appelé un *polynôme de Hensel*. Dans ce cas un zéro de Hensel de code $(f, 0)$ est appelé simplement un zéro de Hensel de f dans $\mathbf{C}$.
Un anneau local résiduellement discret $\mathbf{A}$ est dit *hensélien* si tout polynôme de Hensel admet un zéro de Hensel (de code $(f, 0)$) dans $\mathbf{A}$.

Un *corps valué discret* $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$ est un corps discret $\mathbf{K}$ avec un sous-anneau $\mathbf{V}$ qui vérifie : $xy = 1 \in \mathbf{K} \Rightarrow x \in \mathbf{V}$ ou $y \in \mathbf{V}$. Dans ce cas $\mathbf{V}$ est un anneau local normal. On demande en outre que $\mathbf{V}$ soit résiduellement discret. Cela revient à demander qu'on ait un test pour : $\exists x \in \mathbf{V}$ tel que $a = xb$?, où $a, b \in \mathbf{K}$.

Soit $\mathbf{A}$ un anneau commutatif arbitraire et $f \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme unitaire, nous noterons $\boxed{\mathbf{A}_{[f]} = \mathbf{A}[X]/\langle f \rangle}$ et $\boxed{\mathbf{A}_{\{f\}} = \mathbf{A}_{[f]}[1/f']}$.

Présentation du problème

Nous répondons ici à une question naturelle qui fait suite aux articles Kuhlmann et Lombardi (2000) et Alonso García *et al.* (2008).

Le hensélisé d'un anneau local résiduellement discret $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$, noté $(\mathbf{A}^{\mathrm{h}}, \mathfrak{m}^{\mathrm{h}})$ est construit dans Alonso García *et al.* (2008). Dans la catégorie des anneaux locaux résiduellement discrets, il répond au problème universel attaché à la sous-catégorie pleine des anneaux locaux résiduellement discrets henséliens. Autrement dit la construction est fonctorielle et le foncteur «hensélisation» est le foncteur adjoint à gauche au foncteur d'inclusion.

2. $\mathbf{A}$-algèbre locale, à lire en un seul mot. Il s'agit d'une abréviation du langage dans laquelle le mot «locale» concerne à la fois l'objet $\mathbf{C}$ et le morphisme φ.

Le hensélisé d'un corps valué discret $(\mathbf{K},\mathbf{V})$, noté $(\mathbf{K}^{\mathrm{H}},\mathbf{V}^{\mathrm{H}})$, est construit dans Kuhlmann et Lombardi (2000). Dans la catégorie des corps valués discrets, il répond au problème universel attaché à la sous-catégorie pleine des corps valués discrets henséliens.

Comme $\mathbf{V}$ est un anneau local résiduellement discret, il est naturel de comparer les deux hensélisés $\mathbf{V}^{\mathrm{h}}$ et $\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$.

Il ne semble pas que le problème soit abordé dans la littérature classique. Sans doute la réponse semble trop évidente. Mais nous considérons cette évidence comme problématique et nous avons écrit cette note. Elle répond également au problème du point de vue des mathématiques classiques puisque nos définitions constructives sont des définitions équivalentes aux définitions usuelles en mathématiques classiques.

Vu la propriété universelle qui caractérise $(\mathbf{V}^{\mathrm{h}},\mathfrak{m}^{\mathrm{h}})$, et puisque $(\mathbf{V}^{\mathrm{H}},\mathfrak{m}^{\mathrm{H}})$ est un anneau local résiduellement discret hensélien, on a un unique morphisme local de $\mathbf{V}$-algèbres, $\varphi:\mathbf{V}^{\mathrm{h}}\to\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$. Nous allons démontrer que c'est un isomorphisme.

Démonstration

Ce long paragraphe démontre l'isomorphisme souhaité. Il est ponctué par deux lemmes et une remarque.

Pour l'injectivité il suffit de la démontrer pour une étape élémentaire de la construction de $\mathbf{V}^{\mathrm{h}}$ décrite dans Alonso García *et al.* (2008).

Une étape élémentaire de la construction du hensélisé $\mathbf{A}^{\mathrm{h}}$ d'un anneau local résiduellement discret $(\mathbf{A},\mathfrak{m})$ se passe comme suit. Soit $(f,0)$ un code de Hensel avec $f\in\mathbf{V}[X]$ unitaire, $f(0)\in\mathfrak{m}$ et $f'(0)\in\mathbf{A}^{\times}$. On considère $\mathbf{A}[x]=\mathbf{A}_{[f]}$, $S=1+\mathfrak{m}+\langle x\rangle$ et $\mathbf{A}_f:=S^{-1}\mathbf{A}[x]$. L'anneau $\mathbf{A}_f$ est un anneau local résiduellement discret avec $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}_f)=\mathfrak{m}\mathbf{A}_f$. Le morphisme naturel $\mathbf{A}\to\mathbf{A}_f$ est local, fidèlement plat et l'on identifie $\mathbf{A}$ à un sous-anneau de $\mathbf{A}_f$. Le morphisme naturel $\mathbf{A}\to\mathbf{A}_f$ satisfait la propriété universelle correspondant au code de Hensel $(f,0)$ dans la catégorie des $\mathbf{A}$-algèbres qui sont des anneaux locaux résiduellement discrets.

On obtient le hensélisé $\mathbf{A}^{\mathrm{h}}$ comme colimite filtrée d'extensions en cascade du type $\mathbf{A}\to\mathbf{A}_f$. On a bien une colimite filtrée en raison de la propriété universelle satisfaite par le morphisme $\mathbf{A}\to\mathbf{A}_f$. On a alors $\mathbf{A}^{\mathrm{h}}$ qui est un anneau local résiduellement discret de radical $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}^{\mathrm{h}}=\mathfrak{m}\mathbf{A}^{\mathrm{h}}$ et le morphisme $\mathbf{A}\to\mathbf{A}^{\mathrm{h}}$ donne l'anneau local résiduellement discret hensélien «engendré par $\mathbf{A}$» au sens du foncteur adjoint au foncteur d'inclusion dans la catégorie des anneaux locaux résiduellement discrets.

Dans le cas présent avec $\mathbf{A}=\mathbf{V}$ on obtient en particulier un unique $\mathbf{V}$-morphisme local $\mathbf{V}_f\to\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$. Il envoie le zéro de Hensel ξ de f dans $\mathbf{V}_f$ sur le zéro de Hensel ξ' de f dans $\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$.

Nous démontrons pour commencer le lemme suivant directement inspiré de (Alonso García *et al.*, 2008, Lemma 5.3 et Proposition 5.4). Il nous dit que dans la construction du hensélisé, on peut se limiter au cas où l'on ajoute un zéro spécial d'un polynôme spécial.

Lemme 1. *Soit $(\mathbf{A},\mathfrak{m})$ un anneau local résiduellement discret et $f(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbf{A}[X]$ avec $a_0\in\mathfrak{m}$ et $a_1\in\mathbf{A}^{\times}$. On définit le polynôme spécial*

$$\begin{aligned} g(X) &= X^n - X^{n-1} + a_0\cdot\left(\textstyle\sum_{j=2}^{n}(-1)^j a_j a_0^{j-2}a_1^{-j}X^{n-j}\right)\\ &= X^n - X^{n-1} + a_0\ell(X) \quad \text{avec } \ell(X)\in\mathbf{A}[X] \end{aligned}$$

Soit $g_1(X)=g(X+1)$. Le polynôme f admet un zéro γ dans $a_0\mathbf{A}_{g_1}\subseteq\mathfrak{m}\mathbf{A}_{g_1}\subseteq\mathfrak{m}\mathbf{A}^{\mathrm{h}}$, avec $f'(\gamma)$ inversible dans $\mathbf{A}_{g_1}$. C'est l'unique zéro de f dans $\mathfrak{m}\mathbf{A}_{g_1}$.

Démonstration. L'égalité suivante a lieu dans $\mathbf{A}[X,1/X]$:

$$a_0g(X) = X^n f\left(\tfrac{-a_0a_1^{-1}}{X}\right). \tag{$*$}$$

Soit $\delta = 1+\mu$ où $\mu \in \mathfrak{m}\mathbf{A}_{g_1}$ est le zéro spécial du polynôme spécial g (le code de Hensel de δ est $(g,1)$). L'élément $\mu \in \mathbf{A}_{g_1}$ est le zéro de Hensel de code $(g_1,0)$ et $\delta \in \mathbf{A}_{g_1}{}^{\times}$. Posons $\gamma = -a_0(a_1\delta)^{-1} \in \mathfrak{m}\mathbf{A}_{g_1}$. En appliquant $(*)$ nous avons $-a_0g(\delta) = \delta^n f(\gamma)$, donc $f(\gamma) = 0$. En outre $f'(\gamma) \in \mathbf{A}_{g_1}{}^{\times}$ parce que $f'(0) \in \mathbf{A}^{\times}$.
L'unicité est classique, sans avoir besoin de supposer que le polynôme f est unitaire. □

Supposons $\mathbf{A}$ intègre, avec $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}\mathbf{A}$, et $(\mathbf{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbf{V}^{\mathrm{ac}})$ une extension de $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$ à une clôture algébrique [3]. L'avantage que présente un polynôme spécial c'est que tous ses zéros dans $\mathbf{K}^{\mathrm{ac}}$, à l'exception du zéro spécial, sont dans $\operatorname{Rad}\mathbf{V}^{\mathrm{ac}} = \mathfrak{m}\mathbf{V}^{\mathrm{ac}}$.

Nous considérons donc le morphisme naturel $\theta : \mathbf{V}_{g_1} \to \mathbf{V}^{\mathrm{H}}$ et nous devons montrer qu'il est injectif. Soit $\alpha = p(\mu) \in \mathbf{V}_{g_1}$ avec $p \in \mathbf{V}[X]$ [4]. Son image dans $\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$ est $\alpha' = p(\mu')$, où μ' est le zéro de Hensel de code $(g_1,0)$ dans $\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$.

Remarque. Nous utilisons dans la suite le fait que, puisque $\mathbf{V}$ est intégralement clos, $\mathbf{V}_{g_1}$ est sans diviseur de zéro (Coquand et Lombardi, 2016, Theorem 5.3) [5]. On en déduira à la fin que $\mathbf{V}_{g_1}$ est non seulement sans diviseur de zéro mais intègre. Nous donnons en annexe deux démonstrations constructives indépendantes du fait que $\mathbf{V}_{g_1}$ est intègre et intégralement clos. ■

Kuhlmann et Lombardi (2000) expliquent au début de la démonstration de la proposition 2.3 comment tester si $\alpha' = 0$. Nous raisonnons ici avec les polynômes g et g_1 donnés dans le lemme 1. On calcule le polynôme caractéristique $q(T) \in \mathbf{V}[T]$ de $p(x)$ dans la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{K}[x] = \mathbf{K}_{[g_1]}$. Les zéros de q dans une clôture algébrique de $\mathbf{K}$ sont les $\alpha'_i = p(\mu'_i)$ où les μ'_i sont les zéros de g_1 (on pose $\mu'_1 = \mu'$ et $\alpha'_1 = \alpha'$). Si $q(0) \neq 0$, $\alpha' \neq 0$ car $q(\alpha') = 0$ [6]. Si $q(0) = 0$ on ne sait pas pour autant si $\alpha' = 0$. On calcule alors le polynôme caractéristique $r(T) \in \mathbf{V}[T]$ de $xp(x)$ dans la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{K}[x]$. Les μ'_i pour $i \geqslant 2$ sont des unités, leur valuation est nulle. Les zéros de r dans une clôture algébrique de $\mathbf{K}$ sont les $\mu'_i\alpha'_i$. Les valuations des zéros de r sont donc les mêmes que celles des zéros de q, sauf en général celle de $\alpha' = \alpha'_1$ qui augmente de $v(\mu')$ lorsque $v(\alpha')$ est finie, c'est-à-dire lorsque $\alpha' \neq 0$. Par contre $\infty + v(\mu') = \infty$ et l'on obtient donc que $\alpha' = 0$ si, et seulement si, les valuations des zéros n'ont pas changé. Or les valuations des zéros d'un polynôme sont données par la méthode du polygone de Newton. On a donc un test explicite pour $\alpha' = 0$.

Si $q(0) \neq 0$ alors $\alpha' \neq 0$ donc $\neg(\alpha = 0)$. Sinon écrivons $q(T) = T^m q_1(T)$ avec $m > 0$ et $q_1(0) \neq 0$. Si $\alpha' = 0$, alors $q_1(\alpha') \neq 0$. Cela implique $q_1(\alpha) \neq 0$ et comme $q(\alpha) = \alpha^m q_1(\alpha) = 0$, on obtient $\alpha = 0$. Maintenant nous savons que le morphisme naturel $\theta : \mathbf{V}_{g_1} \to \mathbf{V}^{\mathrm{H}}$ est injectif et que $\mathbf{V}_{g_1}$ lui-même est intègre.

Dans la suite nous pouvons donc identifier tout anneau $\mathbf{V}_f$ à son image dans $\mathbf{V}^{\mathrm{h}}$, et $\mathbf{V}^{\mathrm{h}}$ à son image dans $\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$. Pour s'assurer que φ est surjectif, il suffit de démontrer que pour

3. Une utilisation constructive de la structure purement idéale $(\mathbf{K}^{\mathrm{ac}}, \mathbf{V}^{\mathrm{ac}})$ est obtenue en considérant la structure algébrique dynamique définie en ajoutant le diagramme positif de $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$ à la théorie dynamique des corps valués discrets algébriquement clos. Cette application de la méthode dynamique est expliquée plus en détail dans Kuhlmann et Lombardi (2000).

4. Ce n'est pas restrictif, car nous voulons seulement tester une égalité à 0.

5. Le théorème 5.3 dit que pour un anneau normal $\mathbf{A}$, l'anneau $\mathbf{A}_{\{f\}} := \mathbf{A}_{[f]}[1/f']$ est aussi normal. Comme ici, avec $\mathbf{A} = \mathbf{V}$, $\mathbf{V}_{g_1}$ est un localisé de $\mathbf{A}_{\{f\}}$, il est aussi normal, et comme il est local il est sans diviseur de zéro.

6. Par suite $\alpha \neq 0$ car $\alpha = 0$ implique $\alpha' = 0$. Notez qu'ici, à cette étape de la démonstration, $\alpha \neq 0$ signifie simplement $\neg(\alpha = 0)$, car on ne sait pas encore si l'on a un test à 0 dans $\mathbf{V}^{\mathrm{h}}$.

tout zéro de Hensel $\mu \in \mathbf{K}^{\mathrm{H}}$ d'un code de Hensel $(g_1, 0) \in \mathbf{V}[X] \times \mathbf{V}$, tout élément γ de

$$\mathbf{W} = \{\, \gamma \in \mathbf{K}[\mu] \;;\; v(\gamma) \geqslant 0 \,\} \subseteq \mathbf{V}^{\mathrm{H}}$$

est dans l'image de $\mathbf{V}^{\mathrm{h}}$.

Pour un polynôme $q \in \mathbf{V}[X]$ si on a une pente isolée de $v(q_k)$ à $v(q_{k+1})$ dans son polygone de Newton, nous dirons que le zéro correspondant dans $\mathbf{K}^{\mathrm{H}}$ est un *zéro v-isolé de q*.

Kuhlmann et Lombardi (2000) donnent une description précise de ce zéro dans la proposition 2.2 qui se termine comme suit : en résumé, un zéro α correspondant à une pente isolée d'un polygone de Newton peut toujours être explicité soit comme un élément de $\mathbf{K}$, soit sous une forme $(a\delta+b)/(c\delta+d)$ où l'on a : δ est le zéro spécial d'un polynôme spécial $g(X)$, $a, b, c, d \in V$, $(c\delta + d) \neq 0$ et $(ad - bc) \neq 0$.

Notons que cela implique que $\mathbf{K}^{\mathrm{H}}$ est le corps de fractions de $\mathbf{V}^{\mathrm{h}}$. Cependant cela ne nous dit pas que $\mathbf{V}^{\mathrm{H}} \subseteq \mathbf{V}^{\mathrm{h}}$. Pour obtenir cette inclusion nous devons utiliser un autre résultat.

Lemme 2. *Si $\gamma \in \mathbf{K}[\delta]$, où δ est un zéro spécial d'un polynôme spécial, il existe un exposant m tel que $\delta^m\gamma$ est un zéro v-isolé d'un polynôme $Q \in \mathbf{V}[X]$.*

Démonstration. Résultat donné dans la démonstration de (Kuhlmann et Lombardi, 2000, proposition 2.3). □

Si en outre $v(\gamma) \geqslant 0$, cela montre que $\delta^m\gamma$ est dans l'image d'un certain $\mathbf{V}_u \subseteq \mathbf{V}^{\mathrm{h}}$. Comme $1/\delta$ est aussi dans $\mathbf{V}^{\mathrm{h}}$, cela montre que $\gamma \in \mathbf{V}^{\mathrm{h}}$. Ceci achève la démonstration de la surjectivité de φ.

Nous avons terminé la démonstration du fait que le morphisme canonique $\mathbf{V}^{\mathrm{h}} \to \mathbf{V}^{\mathrm{H}}$ est un isomorphisme. Nous passons à des annexes.

Annexe 1

Voici maintenant une autre démonstration constructive, différente de celle donnée dans la démonstration précédente, pour le fait que $\mathbf{V}_f$ est un anneau intègre intégralement clos.

Alonso García *et al.* (2021) considèrent la situation d'un code de Hensel $(f, 0)$ pour un anneau local résiduellement discret $(\mathbf{A}, \mathfrak{m}_{\mathbf{A}})$ lorsque $\mathbf{A}$ est intègre. L'hypothèse est que $(\mathbf{A}, \mathfrak{m}_{\mathbf{A}})$ est un anneau local intègre dominé par un anneau de valuation $\mathbf{V}$ du corps de fractions $\mathbf{K}$ de $\mathbf{A}$ (donc $\mathfrak{m}_{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cap \mathfrak{m}_{\mathbf{V}}$). On considère un étage de la construction de chacun des hensélisés $\mathbf{A}^{\mathrm{h}}$ et $\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$. On a donc un anneau local résiduellement discret $\mathbf{A}_f \subseteq \mathbf{A}^{\mathrm{h}}$ obtenu en ajoutant le zéro à la Hensel β de $(f, 0)$ et un anneau de valuation $\mathbf{W}$ extension de $\mathbf{V}$ obtenu en ajoutant le zéro à la Hensel β' de $(f, 0)$.

Précisément $\mathbf{W} = \{\, \zeta \in \mathbf{K}[\beta'] \;;\; v(\zeta) \geqslant 0 \,\}$[7]. On considère le morphisme $\theta_f : \mathbf{A}_f \to \mathbf{W}$ qui prolonge le morphisme d'inclusion $\mathbf{A} \to \mathbf{V}$. L'article démontre que $\mathrm{Ker}(\theta_f)$ est un *idéal premier minimal détachable* de $\mathbf{A}_f$. On applique ce résultat à la situation présente où $\mathbf{A} = \mathbf{V}$ est dominé par lui-même : le noyau $\mathrm{Ker}(\theta_f)$ du morphisme naturel $\theta_f : \mathbf{V}_f \to \mathbf{W}$ est un idéal premier minimal détachable.

Le théorème 5.3 dans Coquand et Lombardi (2016) s'énonce comme suit.

7. $\mathbf{K}[\beta']$ est construit en tant que corps valué discret selon une procédure propre aux corps valués discrets. C'est une extension séparable finie de $\mathbf{K}$, mais on ne connait pas en général sa dimension comme $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Un phénomène analogue se produit lorsque l'on construit la clôture réelle d'un corps ordonné discret.

Théorème 5.3. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau normal,* $f \in \mathbf{A}[X]$ *un polynôme unitaire et* $\mathbf{A}_{[f]} = \mathbf{A}[X]/\langle f \rangle$*. Alors* $\mathbf{A}_{\{f\}} = \mathbf{A}_{[f]}[1/f']$ *est aussi un anneau normal.*

Dans le cas présent $\mathbf{A}$ est un domaine de valuation $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}_f$ est un anneau local résiduellement discret, localisé de $\mathbf{A}_{\{f\}}$. Comme un anneau normal local est sans diviseur de zéro, cela nous donne le résultat utilisé dans la démonstration précédente. En d'autres termes l'idéal $\{0\}$ de $\mathbf{V}_f$ est un idéal premier (au sens où l'anneau quotient est sans diviseur de zéro). On conclut en disant que puisque $\mathrm{Ker}(\theta_f)$ est un idéal premier minimal détachable, et que $\{0\}$ est un idéal premier, $\{0\}$ est détachable et $\mathbf{V}_f$ est intègre.

Annexe 2

Nous donnons maintenant une troisième démonstration, plus directe, pour le fait que l'anneau $\mathbf{V}_f \subseteq \mathbf{V}^{\mathrm{h}}$ est intègre intégralement clos. Sans doute, les calculs sous-jacents aux trois démonstrations se ressemblent plus qu'on ne le voit au premier coup d'œil.

En fait le lemme 9 ci-après et le théorème 5.3 analogue dans Coquand et Lombardi (2016) sont tous deux basés sur la formule de Tate[8] du lemme 3.

Lemme 3 (Tate)**.** *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif et* $f \in \mathbf{A}[X]$ *un polynôme unitaire de degré* d*. Écrivons* $f(X) = f(Y) + (X - Y)\sum_{j=0}^{d-1} f_j(Y)X^j$ *et notons* tr *la forme trace de l'extension* $\mathbf{A}_{[f]}/\mathbf{A}$*. Alors pour tout* $b \in \mathbf{A}_{[f]}$*, on a*

$$f'\,b = \sum\nolimits_{j=0}^{d-1} \mathrm{tr}(f_j(x)b)\,x^j \quad (b, f', f_j(x), x \in \mathbf{A}_{[f]},\ \mathrm{tr}(f_j(x)b) \in \mathbf{A}) \tag{1}$$

Démonstration. Voir (Raynaud, 1970, Chapitre VII, corolaire p. 74). $\square$

La note 4 prépare le corolaire qui va suivre.

Note 4. Soit $h \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme unitaire de degré d et $\Delta = uh + vh' = \pm\mathrm{Res}(h, h')$ le discriminant de h. Alors h' est inversible dans $\mathbf{A}_{[h]}$ si, et seulement si, Δ est inversible dans $\mathbf{A}$ (Lombardi et Quitté, 2015, Lemme d'élimination de base III-7.5). Supposons $\mathbf{A}$ intègre de corps de fractions $\mathbf{K}$ et h séparable sur $\mathbf{K}$. On a clairement $\mathbf{A}_{[h]} \subseteq \mathbf{K}_{[h]}$ (respectivement libres sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{K}$ de base $1, x, \dots, x^{d-1}$). Comme h', v et Δ sont inversibles dans $\mathbf{K}_{[h]}$, ils sont réguliers dans $\mathbf{A}_{[h]}$. On a $\mathbf{K}_{[h]} = \mathbf{K}_{\{h\}} = \mathbf{K}_{[h]}[\frac{1}{\Delta}]$. Par ailleurs, on a $\mathbf{A}_{\{h\}}[\frac{1}{v}] = \mathbf{A}[\frac{1}{\Delta}]_{[h]} \subseteq \mathbf{K}_{[h]}$. Ainsi le morphisme naturel $\mathbf{A}_{[h]} \to \mathbf{K}_{[h]}$ se décompose sous la forme

$$\mathbf{A}_{[h]} \to \mathbf{A}_{\{h\}} \to \mathbf{A}_{\{h\}}[\tfrac{1}{v}] = \mathbf{A}[\tfrac{1}{\Delta}]_{[h]} \to \mathbf{K}_{[h]} = \mathbf{K}_{\{h\}}. \tag{2}$$

où les morphismes sont des injections canoniques qui sont des morphismes de localisation obtenus en inversant des monoïdes réguliers (successivement $h'^{\mathbb{N}}$, $v^{\mathbb{N}}$ puis $\mathbf{K}^*$).

Corolaire 5. *Soit* $\mathbf{A}$ *intégralement clos et* $\mathbf{K}$ *son corps de fractions. Soit* h *un polynôme unitaire séparable de* $\mathbf{K}[X]$*. Alors* $\mathbf{A}_{\{h\}}$ *est normal quasi intègre, avec* $\mathbf{K}_{[h]} = \mathbf{K}_{\{h\}}$ *pour anneau total de fractions.*

Démonstration. Si $d = \deg h$, $\mathbf{A}_{[h]}$ est libre de dimension d sur $\mathbf{A}$, $\mathbf{K}_{[h]} = \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_{[h]}$ est une $\mathbf{K}$-algèbre étale de dimension d. On a donc $\mathbf{A}_{[h]} \subseteq \mathbf{K}_{[h]}$, puis $\mathbf{A}_{\{h\}} = \mathbf{A}_{[h]}[1/h'] \subseteq \mathbf{K}_{[h]} = \mathbf{K}_{\{h\}}$. Pour démontrer que $\mathbf{A}_{\{h\}}$ est intégralement clos, on commence par démontrer que tout élément $b \in \mathbf{K}_{[h]}$ entier sur $\mathbf{A}_{[h]}$ est dans $\mathbf{A}_{\{h\}}$. Soit $b \in \mathbf{K}_{[h]}$ entier sur $\mathbf{A}_{[h]}$.

8. Un résultat classique est que si un anneau $\mathbf{A}$ est intègre normal (i.e. intégralement clos), il en va de même pour $\mathbf{A}[X]$. Une difficulté du point de vue algorithmique, c'est que la démonstration usuelle du résultat précédent ne fonctionne plus lorsque l'on suppose seulement $\mathbf{A}$ sans diviseur de zéro, au lieu de intègre. C'était la première motivation de l'article Coquand et Lombardi (2016).

Comme $\mathbf{A}_{[h]}$ est entier sur $\mathbf{A}$, b est entier sur $\mathbf{A}$. Nous avons $h'b \in \mathbf{A}_{[h]}$ d'après le lemme 3 (équation (1) avec h à la place de f et $\mathbf{K}$ à la place de $\mathbf{A}$) : en effet puisque b est entier sur $\mathbf{A}$ et $h_j(x) \in \mathbf{A}$ pour chaque j, $\mathrm{tr}(h_j(x)b)$ est entier sur $\mathbf{A}$, donc dans $\mathbf{A}$. Par suite $h'b \in \mathbf{A}_{[h]}$ et $b \in \mathbf{A}_{\{h\}}$.
En particulier puisque tout idempotent de $\mathbf{K}_{[h]}$ est entier sur n'importe quel sous-anneau, il appartient à $\mathbf{A}_{\{h\}}$. Soit un élément c arbitraire de $\mathbf{A}_{\{h\}} \subseteq \mathbf{K}_{[h]}$. Si $e^2 = e$ et $\langle e \rangle = \mathrm{Ann}(c)$ dans $\mathbf{K}_{[h]}$, à fortiori $e^2 = e$ et $\langle e \rangle = \mathrm{Ann}(c)$ dans $\mathbf{A}_{\{h\}}$. Donc $\mathbf{A}_{\{h\}}$ est quasi intègre et son anneau total de fractions est $\mathbf{K}_{[h]}$. Ainsi $\mathbf{A}_{\{h\}}$ est quasi intègre et intégralement clos dans son anneau total de fractions, donc normal. $\square$

Lemme 6. *Soit $f \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme unitaire. Les paires d'idempotents complémentaires de $\mathbf{A}_{[f]}$ sont en correspondance bijective avec les factorisations $f = gh$ avec g, h unitaires et $\langle g, h \rangle = \langle 1 \rangle$. Pour une telle factorisation on obtient un isomorphisme naturel $\mathbf{A}_{[f]} \simeq \mathbf{A}_{[g]} \times \mathbf{A}_{[h]}$.*

Démonstration. Si $gu + hv = 1$ dans $\mathbf{A}_{[f]} = \mathbf{A}[x]$, on lui fait correspondre les idempotents $e = gu$ et $1 - e = hv$. Si $\mathbf{A}$ est un corps discret $\mathbf{K}$, on fait correspondre à l'idempotent $e(x)$ l'élément $g(x)$ où $g(X) = \mathrm{pgcd}(f(X), e(X))$ dans $\mathbf{K}[X]$.
Alonso García *et al.* (2008) donnent une démonstration dans le cas d'un anneau. Nous utiliserons ce lemme seulement avec un corps discret. $\square$

Lemme 7. *Soit $\mathbf{K}$ un corps discret, $f \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme unitaire, et $b \in \mathbf{K}_{[f]}$. On a une factorisation $f = gh$ comme dans le lemme 6 avec b inversible dans $\mathbf{K}_{[h]}$ et nilpotent dans $\mathbf{K}_{[g]}$.*

Démonstration. L'algèbre $\mathbf{B} := \mathbf{K}_{[f]}$ est zéro-dimensionnelle strictement finie. Dans un anneau zéro-dimensionnel réduit, pour tout élément b il y a un idempotent e tel que $\langle b \rangle = \langle e \rangle$, b est inversible dans $\mathbf{B}[1/e] \simeq \mathbf{B}/\langle 1 - e \rangle$ et nilpotent dans $\mathbf{B}/\langle e \rangle$. On applique le lemme 6. $\square$

Lemme 8. *Soit $\mathbf{K}$ un corps discret et $f \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme unitaire.*
Alors $\mathbf{K}_{\{f\}} \simeq \mathbf{K}_{\{h\}} = \mathbf{K}_{[h]}$ pour un polynôme h séparable unitaire qui divise f. En particulier la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{K}_{\{f\}}$ est étale.

Démonstration. On applique le lemme 7 avec $b = f'(x)$. On a $f = gh$ dans $\mathbf{K}[X]$, $f' = gh' + hg'$, $\mathbf{K}_{[f]} \simeq \mathbf{K}_{[g]} \times \mathbf{K}_{[h]}$. La $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{K}_{\{f\}}$ est isomorphe à $\mathbf{K}_{[h]}$ car f' est inversible dans $\mathbf{K}_{[h]}$ et nilpotent dans $\mathbf{K}_{[g]}$. Dans la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{K}_{[h]}$, g et $f' = h'g$ sont inversibles, donc h' également et h est séparable sur $\mathbf{K}$. Ainsi $\mathbf{K}_{\{h\}} = \mathbf{K}_{[h]}$ est une $\mathbf{K}$-algèbre étale. $\square$

Notez que $\mathbf{K}_{\{f\}}$ est nulle lorsque f divise une puissance de f' dans $\mathbf{K}[X]$.

Lemme 9. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau intègre intégralement clos et $f \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme unitaire. Alors $\mathbf{A}_{\{f\}}$ est un anneau quasi intègre normal.*

Démonstration. Soit $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$. On applique le lemme 7 avec $b = f'$, et le lemme 8, on écrit $f = gh$ avec les polynômes unitaires g et h dans $\mathbf{K}[X]$. On a g et $h \in \mathbf{A}[X]$ parce que $\mathbf{A}$ est intégralement clos. Par ailleurs g unitaire divise une puissance de f' dans $\mathbf{K}[X]$ donc dans $\mathbf{A}[X]$ (la division se passe entièrement dans $\mathbf{A}[X]$). Donc g est inversible dans $\mathbf{A}_{\{f\}}$, ce qui implique $h = 0$ dans $\mathbf{A}_{\{f\}}$ car $gh = f = 0$. On obtient donc

$$\mathbf{A}_{\{f\}} = \mathbf{A}_{[gh]}[\tfrac{1}{f'g}] \simeq \mathbf{A}_{[gh]}[\tfrac{1}{g}][\tfrac{1}{h'} \simeq \mathbf{A}_{[h]}[\tfrac{1}{g}][\tfrac{1}{h'}] = \mathbf{A}_{\{h\}}[1/g]$$

Relativement à l'inclusion naturelle $\mathbf{A}_{[h]} \to \mathbf{K}_{[h]}$, les éléments h', f' et g, inversibles dans $\mathbf{K}_{[h]}$ sont réguliers dans $\mathbf{A}_{[h]}$. On obtient donc des morphismes injectifs canoniques de localisation en des monoïdes réguliers indiqués ci-dessous :

$$\mathbf{A}_{[h]} \to \mathbf{A}_{\{h\}} \to \mathbf{A}_{\{f\}} \to \mathbf{K}_{[h]} \simeq \mathbf{K}_{\{f\}}.$$

On conclut avec le corolaire 5 que $\mathbf{A}_{\{h\}}$ est normal quasi intègre, et donc aussi son localisé $\mathbf{A}_{\{f\}} \simeq \mathbf{A}_{\{h\}}[1/g]$. □

Lemme 10. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau local résiduellement discret intégralement clos et* $f \in \mathbf{A}[X]$ *un polynôme unitaire. Alors* $\mathbf{A}_f$ *est un anneau local résiduellement discret intégralement clos.*

Démonstration. On sait que $\mathbf{A}_f$ est un anneau local résiduellement discret. En tant que localisé de $\mathbf{A}_{\{f\}}$, c'est un anneau quasi intègre normal. Et tout anneau local est connexe. □

Annexe 3

Dans cette annexe, nous rappelons une démonstration du lemme de Tate donnée dans Coquand et Lombardi (2016) plus simple que celle donnée dans Raynaud (1970).

Lemme 11 (Tate, 2)**.** *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau et* $f \in \mathbf{A}[X]$ *un polynôme unitaire de degré* d*. Écrivons*

$$f(X) = f(Y) + (X - Y)g(X, Y) \text{ avec } g(X, Y) = \sum_{i=0}^{d-1} g_i(Y)X^i$$

et notons $\mathrm{tr} : \mathbf{A}_{[f]} \to \mathbf{A}$ *la forme trace de l'extension* $\mathbf{A}_{[f]}$*. Alors si* $b \in \mathbf{A}_{[f]} = \mathbf{A}[x]$ *est entier sur* $\mathbf{A}$*, on a*

$$f'\, b = \sum_{i=0}^{d-1} \mathrm{tr}(g_i(x)b)\, x^i \tag{3}$$

Notez que $b, f', g_i(x) \in \mathbf{A}_{[f]}$ *et* $\mathrm{tr}(g_i(x)b) \in \mathbf{A}$*.*

Démonstration. On a $\mathbf{A}_{[f]} = \mathbf{A}[x] = \mathbf{A}[X]/\langle f\rangle$. Soit $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x_1, \dots, x_d]$ l'algèbre de décomposition universelle de $\mathbf{A}$ pour f, dans laquelle $f(X) = \prod_{i=1}^{d}(X - x_j)$ (Lombardi et Quitté, 2015, Definition III-4.1). Chaque $\mathbf{A}[x_j] \subseteq \mathbf{B}$ est isomorphe à $\mathbf{A}[x]$ et nous pouvons prendre $x = x_1$. On écrit $b = h(x) \in \mathbf{A}_{[f]}$. Pour tout $\ell(x) \in \mathbf{A}_{[f]}$ on a $\mathrm{tr}(\ell(x)) = \sum_{j=1}^{d} \ell(x_j) \in \mathbf{A}$[9]. On a $g(Y, Y) = f'(Y)$ et $g(x_1, x_j) = g(x_j, x_1) = 0$ si $j \neq 1$: en effet $g(X, x_1) = \prod_{j=2}^{d}(X - x_j)$ car $(X - x_1)g(X, x_1) = f(X) - f(x_1) = f(X) = \prod_{j=1}^{d}(X - x_j)$. Donc

$$f'(x)b = g(x_1, x_1)h(x_1) = \sum_{i=0}^{d-1} g_i(x_1)h(x_1)x_1^i$$

et pour $j \neq 1$

$$0 = g(x_1, x_j)h(x_j) = \sum_{i=0}^{d-1} g_i(x_j)h(x_j)x_1^i$$

Par sommation on obtient la formule de Tate annoncée. □

9. Voir par exemple dans Lombardi et Quitté (2015) le lemme III-5.12.

Références

María Emilia ALONSO GARCÍA, Henri LOMBARDI et Stefan NEUWIRTH : On a theorem by de Felipe and Teissier about the comparison of two henselisations in the non-Noetherian case. *J. Algebra*, 570:587–594, 2021. ISSN 0021-8693. 5

María Emilia ALONSO GARCÍA, Henri LOMBARDI et Hervé PERDRY : Elementary constructive theory of Henselian local rings. *Math. Log. Q.*, 54(3):253–271, 2008. ISSN 0942-5616. URL http://dx.doi.org/10.1002/malq.200710057. 2, 3, 7

Errett BISHOP : *Foundations of constructive analysis.* McGraw-Hill, New York, 1967. 1

Errett BISHOP et Douglas BRIDGES : *Constructive analysis.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 279. Springer-Verlag, Berlin, 1985. ISBN 3-540-15066-8. 1

Douglas BRIDGES et Fred RICHMAN : *Varieties of constructive mathematics.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 97. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. ISBN 0-521-31802-5. 1

Thierry COQUAND et Henri LOMBARDI : Some remarks about normal rings. *In Concepts of proof in mathematics, philosophy, and computer science*, Ontos Math. Log., 6, pages 141–149. De Gruyter, Berlin, 2016. 4, 5, 6, 8

F.-V. KUHLMANN et Henri LOMBARDI : Construction du hensélisé d'un corps valué. *J. Algebra*, 228(2):624–632, 2000. 2, 3, 4, 5

Henri LOMBARDI et Claude QUITTÉ : *Commutative algebra : constructive methods. Finite projective modules.* Algebra and applications, 20. Springer, Dordrecht, 2015. ISBN 978-94-017-9943-0 ; 978-94-017-9944-7. Traduit du français (Calvage & Mounet, Paris, 2011, revu et étendu par les auteurs) par Tania K. Roblot. 1, 6, 8

Ray MINES, Fred RICHMAN et Wim RUITENBURG : *A course in constructive algebra.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1988. ISBN 0-387-96640-4. URL http://dx.doi/10.1007/978-1-4419-8640-5. Traduction française par Henri Lombardi, révisée par Stefan Neuwirth. Un cours d'algèbre constructive. Presses Universitaires de Franche-Comté. 2020. 1

Michel RAYNAUD : *Anneaux locaux henséliens.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 169. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. 6, 8

Ihsen YENGUI : *Constructive commutative algebra : projective modules over polynomial rings and dynamical Gröbner bases.* Lecture Notes in Mathematics, 2138. Springer, Cham, 2015. ISBN 978-3-319-19493-6 ; 978-3-319-19494-3. 1