L'analogie

Stefan Neuwirth

Table des matières

1 Introduction

Voici comment Alfred Tarski [9] qualifie l'analogie : elle peut apparaître entre « deux groupes de concepts plutôt éloignés du point de vue du contenu » dès qu'on compare leur « rôle » ainsi que les « relations internes entre les concepts de chaque groupe ». On peut alors « constater un large parallélisme entre les deux groupes », *i.e.* une sorte de dictionnaire de traduction.

Mais on ne peut restreindre le terme d'analogie à de tels cas de figure : le raisonnement analogique est sous-jacent à une grande partie des calculs mathématiques. En effet, comme le dit Henri Poincaré [6], « des éléments variés dont nous disposons, nous pouvons faire sortir des millions de combinaisons différentes », *i.e.* le « fait brut », mais seule la « combinaison qui prendra place dans une classe de combinaisons analogues » permettra de sentir « l'âme du fait. »

Après avoir dressé une sorte d'inventaire des analogies, je tâcherai d'inspecter la pensée de George Pólya, Henri Poincaré et G.W. Leibniz pour pouvoir comparer leur point de vue et identifier les différentes caractéristiques de l'analogie. En conclusion, il s'agira d'évaluer quel lien il y a entre ce concept et la théorie des modèles.

2 La pratique mathématique

L'analogie apparaît sous des formes multiples dans le travail du mathématicien. On peut tenter d'en dresser un échantillon significatif, en allant des plus floues au plus précises. On verra comment, en se précisant, elles concernent de moins en moins les procédés et de plus en plus les objets.

2.1 Les analogies purement heuristiques

Beaucoup de ces analogies ont un caractère purement heuristique, ne sont justifiées par aucun raisonnement déductif, ne sont pas formalisables en l'état. Mais bien qu'elles ne soient pas un guide toujours très sûr, elles sont précieuses en ce qu'elles rendent intelligibles des résultats parfois très abstraits. Elles se constituent empiriquement, se différencient à mesure des expériences probatoires, peuvent un jour peut-être soit être prouvées, soit rejetées.

2.1.1 Le caractère empirique des analogies

Un exemple récent en analyse fonctionnelle est l'analogie du comportement des triplets d'espaces de Banach (c_0, l_1, l_∞) et $(K(H), N(H), B(H))$, où H est un espace de Hilbert. Il illustre le sens étymologique de l'analogie : identité de rapports. L'exemple, comme on va le voir, est précieux en ce que, parce qu'élaboré, il fait ressortir le caractère formel de l'analogie : même un non-mathématicien la remarquerait sans s'attarder sur le sens des concepts. En effet, l_1 est à c_0 ce que $N(H)$ est à $K(H)$, l_∞ est à l_1 ce que $B(H)$ est à $N(H)$, en l'occurrence le dual. c_0 est à l_∞ ce que $K(H)$ est à $B(H)$: un sous-espace fermé pour la topologie de la norme, dense pour la topologie *-faible. Mais ces rapports sont propres à la dualité d'espaces de Banach, et l'utilité de l'analogie ne peut en provenir. En fait, il y a d'autres rapports beaucoup plus flous, mais aussi plus efficaces : ainsi les normes de ces espaces s'écrivent

$$\|x\|_{c_0} = \|x\|_{l_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \quad \text{et} \quad \|f\|_{K(H)} = \|f\|_{B(H)} = \sup_{\|x\|_H \le 1} \|f(x)\|_H,$$

i.e. les formes des expressions des normes se ressemblent en ce qu'elles font intervenir chacune un sup ! Le deuxième rapport essentiel est que

$$c_0 = \{x \in l_\infty \text{ et } x_n \to 0\} \text{ et } K(H) = \{f \in B(H) \text{ et } \overline{f(\{\|x\|_H \le 1\})} \text{ compact}\},$$

i.e. ces deux espaces exercent un contrôle sur le comportement à l'infini de leurs éléments.

Ces deux rapports sont formels, mais l'analogie ne paraît pas formalisable : ils permettent, toujours dans une certaine mesure seulement, de prévoir le comportement d'un espace à partir de son analogue, et de transposer certains procédés.

2.1.2 L'analogie comme guide de la découverte

L'analogie n'est pas toujours sanctionnée par une longue pratique. Elle constitue parfois une découverte considérable et téméraire qui engage alors les mathématiciens à tenter de justifier le résultat obtenu. Ainsi, la démonstration par Leonhard Euler [2] de la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

procède de la factorisation d'une série entière à l'aide de ses zéros par analogie avec la factorisation d'un polynôme à l'aide de ses racines. Remarquons que, bien que l'analogie soit nouvelle, sa formulation présupposait une longue pratique de l'analyse algébrique. En fait, cette analogie a mené à long terme au développement de tout un pan de l'analyse complexe. Elle a eu une carrière qui l'a élevée de son statut de tour de magie à celui de théorème sur les fonctions entières. Mais du temps d'Euler, elle ne devenait plausible qu'à cause de sa concordance avec les faits. D'ailleurs, il en éprouva la plausibilité en lui faisant redémontrer un théorème connu ; finalement, il trouva une autre voie pour démontrer le même théorème. Cela ne l'empêcha ni de douter jusqu'à la fin de la qualité de l'argument, ni de lui accorder une confiance certaine. Ainsi, l'analogie est un guide de la découverte accessible aux plus hardis, mais elle n'est pas fondamentalement fiable : seul le flair d'un mathématicien comme Euler permet d'éviter les méprises auxquelles elle invite.

2.2 Les analogies généralisatrices

La classe des analogies généralisatrices diffère de celles que nous venons d'examiner : en effet, même si le raisonnement plausible d'Euler généralise un théorème sur les polynômes, ce n'est qu'un argument purement heuristique : il ne tente pas de faire de cette généralisation particulière un théorème. D'ailleurs, contrairement aux exemples de cette section, il ne tente pas de transposer de raisonnement pour le démontrer.

2.2.1 Le passage heuristique à un cadre différent

Une des pratiques mathématiques les plus fécondes est l'énonciation d'hypothèses au sujet d'objets et d'opérations par analogie à des objets et opérations plus simples. Cette démarche est générale et les exemples sont innombrables. Néanmoins, la justification de ces analogies, *i.e.* leur raison d'être peut prendre très longtemps et parfois encore être hors de vue. De plus, le choix des analogues n'est pas toujours univoque. Par exemple, tant des hypothèses sur la pyramide — objet qui résulte de l'adjonction d'un point dans l'espace à une figure plane — que sur le tétraèdre — le polyèdre le plus élémentaire — peuvent faire appel à l'analogie avec le triangle : c'est le plus élémentaire des polygones et il résulte de l'adjonction d'un point dans le plan à une figure linéaire. Chacune des analogies concerne un des aspects du triangle.

On peut citer comme exemple le passage de théorèmes dans le plan à des théorèmes dans l'espace — et même dans l'espace vectoriel à n dimensions. Cette analogie continue aujourd'hui plus que jamais à être exploitée, comme dans l'étude récente des corps convexes dans les espaces de Banach, ou du comportement asymptotique des espaces de Banach quand leur dimension tend vers l'infini.

De même, la formule d'Abel (1826),

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = U_n v_n - U_0 v_0 - \sum_{k=1}^{n-1} U_k \Delta v_k, \text{ où } U_k = \sum_{j=0}^{k} u_j,$$

d'apparence plus élémentaire mais d'apparition bien plus tardive que la formule d'intégration par parties, en est un analogue discret. Sa démonstration est bien différente, mais l'idée même de la formule provient de l'analogie de U avec une intégrale et de Δ avec la dérivation. Il s'agissait d'ailleurs de généraliser des raisonnements sur des intégrales oscillantes du cas continu au cas discret : c'est cette application qui a poussé Abel à démontrer ce résultat. Elle permet par exemple de démontrer de manière analogue des convergences d'intégrales et de sommes de termes généraux analogues. Un siècle plus tard, la théorie de l'intégrale de Lebesgue tentera de réunir les deux points de vue en introduisant la notion de mesure.

Mais il y aussi des analogies qui ne fonctionnent pas. Ainsi, le comportement des familles de polynômes $\{\binom{x}{k}\}$ et $\{\frac{x^k}{k!}\}$ est analogue en ce qui concerne les polynômes. Mais alors que l'utilité de la seconde se prolonge à l'étude des fonctions holomorphes, Pólya lui-même n'a pas réussi à associer à la première famille des résultats analogues de même fécondité.

L'analogie est ici un guide pour la direction à suivre plus formel que contentuel : il s'agit de développer un langage qui s'applique aux deux systèmes et de transposer les théorèmes connus d'un système à l'autre. Ce caractère formel permet de suppléer à une intuition défaillante et même de développer une sensibilité analogique. L'analyse du langage ne se fait pourtant jamais au-delà de la nécessité pragmatique. Ainsi, le parallélisme d'une partie de deux systèmes peut cacher des divergences, ce qui explique la faillibilité de ces analogies et la multivocité des hypothèses analogues.

2.2.2 Définitions par analogie dans un cadre plus général

Les nouvelles théories qui émaillent le développement des mathématiques n'auraient jamais pu récupérer la force des théories qu'elles ont remplacé si on n'avait pas systématiquement tenté de reconstruire dans leur propre langage les vieux concepts. En général, on veut préserver la possibilité de certains calculs, la force d'un théorème, plutôt que la forme originelle de la notion, souvent inadéquate par rapport au cadre nouveau, pourvu que l'on puisse montrer que sa nouvelle définition se ramène à l'ancienne dans le cadre restreint. On dirait aujourd'hui que l'extension de la notion est conservative. On cherche donc à adapter une notion de sorte que son rôle ne change pas dans certaines formules généralisables. Le choix de ces formules est empirique.

Les exemples les plus flagrants sont le développement de la topologie générale et la théorie de la distribution. Dans le premier exemple, la notion de compacité — « de toute suite on peut extraire une suite convergente » — se trouve généralisée du cadre métrique au cadre axiomatique en prenant pour définition un théorème de recouvrement qui ne fait pas intervenir la notion de suite.

En théorie des distributions, la notion décisive de convolution devant être adaptée — la notion originelle n'aurait plus de sens pour ces objets généraux —, on choisit une formule caractéristique. Sachant que pour deux fonctions test f et g,

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int f(x-y)g(y)\,dy = \int f(y)g(x-y)\,dy = \int f(y)\check{g}(y-x)\,dy \\ &= \int f(y)\tau_x\check{g}(y)\,dy, \end{aligned}$$

on peut transposer cette formule avec le seul usage de l'opération de dualité, ce qui mène à la définition suivante. Pour f distribution et g fonction test, on pose

$$f * g(x) = \langle f,\, \tau_x\check{g}\rangle.$$

Cette analogie se révélera dangereuse : en effet, même si l'extension est conservative, l'existence de cette convolée ne peut être montrée que dans des cas très particuliers : cette définition reste contradictoire si on veut l'admettre pour toutes les distributions. De plus, il faut des hypothèses supplémentaires pour conserver une propriété habituelle comme l'associativité.

C'est ainsi qu'il faut toujours se poser la question du domaine de validité de l'analogie. Mais cette vérification se fait *a posteriori*. C'est ainsi que l'usage de l'analogie engendre l'élaboration de théorèmes *ad hoc* pour autoriser son usage.

On peut remarquer que cette élaboration d'analogies correspond parfaitement à la technique présentée dans la section précédente : cela illustre l'analogie que fait Alfred Tarski [9] entre les notions de déducibilité et de définissabilité.

2.3 Les analogies fondées sur une ressemblance formelle

Cette section décrit plusieurs cas d'analogie entre deux domaines bien distincts, ou entre deux problèmes qui se sont posés dans deux contextes bien distincts.

2.3.1 Une ressemblance peut mener à une expression mathématique identique

Un cas fulgurant d'analogie de deux problèmes physiques est la résolution par Jean Bernoulli du problème de la brachystochrone. Ernst Mach la qualifiera d'œuvre d'art et lui, d'artiste. En effet, il remarque que la solution du problème suivant :

> Soient deux points de l'espace donnés. Quelle est la pente courbe entre les deux points que doit suivre un point matériel soumis à la gravitation pour la parcourir dans un temps minimal ?

est analogue au problème du chemin d'un rayon lumineux traversant l'atmosphère, les extrémités du chemin étant connues : dans les deux cas, la vitesse est fonction de l'altitude uniquement et le temps de parcours est minimal. Pour le premier problème, c'est une conséquence du théorème de l'énergie cinétique et de l'hypothèse ; pour le deuxième, cela résulte de ce que la vitesse de la lumière dépend uniquement de la densité du milieu qu'il traverse, qui est fonction de l'altitude, et du principe de Fermat. Les deux problèmes sont donc analogues par leur expression mathématique et leur solution mathématique est la même. Il suffit alors à Jean Bernoulli d'appliquer la loi de Descartes aux angles d'incidence et de réfraction entre couches planes infinitésimales où la vitesse est constante.

L'analogie est donc comprise et résolue par la réduction à une expression mathématique identique.

2.3.2 Les structures algébriques

Certaines analogies entre deux théories mathématiques peuvent mener à une unification du point de vue dont les deux théories seront des applications ; pour cela, il faut que l'analogie puisse être complètement élucidée. Henri Poincaré en cite un exemple : les théorie de la congruence et des équations algébriques.

En effet, les notions de divisibilité de nombres naturels et de factorisation d'un polynôme par un autre sont analogues et donnent naissance à la même structure algébrique : celle des anneaux euclidiens. En effet, tous les théorèmes de congruence ont une démonstration semblable dans toutes les théories dotées de la division euclidienne — *i.e.* l'existence pour tout couple d'éléments de leur quotient et du reste de leur division.

Totalement élucider une analogie signifie ici en fait trouver une structure axiomatique commune aux objets analogues, qui en deviennent des modèles. On peut alors passer à l'étape supérieure : l'étude de la structure définie par un système d'axiomes — en général non catégorique.

2.3.3 L'apport de l'analogie et son mystère

Nous avons vu comment l'analogie guide le mathématicien dans son intuition. L'exemple précédent montre deux théories qui se sont développées distinctement et qui, d'un coup, grâce à la compréhension de la nature de l'analogie, se sont unifiées. L'analogie est ainsi toujours une découverte, toujours formelle et en cela surprenante. Elle permet d'enrichir le vocabulaire de chaque domaine en tentant de créer les bons objets pour qu'il y ait une correspondance parfaite : on remplit les blancs laissés dans l'écriture de la correspondance par analogie. Elle permet de transférer des démonstrations et aussi des hypothèses d'une théorie à l'autre : la signification d'un énoncé formel peut être plus facile à saisir dans un « modèle » que dans l'autre. En fait, l'analogie permet de mieux comprendre et déceler la structure profonde de chacune des théories ; on discerne mieux les questions sous-jacentes.

Mais le caractère formel fait qu'elle peut aussi rester incomprise, mystérieuse pendant longtemps : ainsi, il y a une analogie flagrante entre deux problèmes, *i.e.* de deux fonctions et de deux questions, l'une apparaissant dans la théorie mathématique des modèles économiques, l'autre dans l'étude des phases hétérogènes en thermodynamique. Cette découverte est due au fait que John von Neumann avait une double culture de chimiste et de mathématicien : il a écrit dans son fameux article [4]

> Une interprétation directe de la formule $\Phi(X, Y)$ serait hautement souhaitable. Son rôle se révèle être similaire à celui de potentiels thermodynamiques en thermodynamique phénoménologique. On peut émettre l'hypothèse que cette similitude persistera dans toute sa généralité phénoménologique (indépendamment de nos idéalisations restrictives).

En fait, toute la théorie mathématique de l'équilibre économique de von Neumann semble s'être inspirée des travaux de J.W. Gibbs : on y retrouve certains de ses outils mathématiques.

Mais on peut légitimement se poser la question suivante : l'analogie est-elle uniquement formelle ? Quelle est donc la nature de cette similitude entre économie et thermodynamique chimique ? L'utilité d'une analogie au niveau formel n'est pas à nier, mais elle pose un rébus scientifique : peut-on transférer aussi la signification ? Quelles sont les significations de l'analogue dans la deuxième théorie d'objets de la première ? Quoi qu'il en soit, les travaux de certains (voir [1]) montrent que la résolution de ce rébus est fertile.

3 Le problème épistémologique

Nous avons eu l'occasion de distinguer dans la première partie les raisonnements par analogie heuristiques, les généralisations de définitions et théorèmes par analogie et l'analogie formelle entre deux systèmes. Cette partie traitera des points de vue de trois mathématiciens plus ou moins philosophes sur le statut épistémologique de l'analogie et de leur manière d'en faire la théorie. Pólya et Poincaré se pencheront surtout sur les deux premiers cas d'analogies et expliqueront surtout ce qu'elle représente dans le travail quotidien en mathématique et quelle est sa portée heuristique. Leibniz au contraire tentera de faire la théorie de la troisième classe d'analogies. Au-delà de ses ambitions exorbitantes, ses idées restent d'une actualité singulière.

3.1 La théorie de Pólya

Pólya est un mathématicien américain d'origine hongroise. Il a été porté très tôt vers la pédagogie des mathématiques, tant au niveau élémentaire, avec des ouvrages comme *Comment poser et résoudre un problème*, qu'à un niveau qui atteint la recherche des années 1920, avec *Exemples et théorèmes en analyse.*

3.1.1 Raisonnement démonstratif et raisonnement plausible

Son intérêt pour l'analogie lui vient de la question qui traverse toute son œuvre, celle de l'heuristique. En effet, il cherche à justifier ce qu'il appelle le raisonnement plausible et à lui donner un statut dans les mathématiques comparable à

> la preuve inductive du physicien, la preuve de l'homme de loi (fondée sur des indices, par exemple, de culpabilité), la preuve de l'historien, basée sur des documents, la preuve statistique des économistes. [7]

Il convient pourtant que le raisonnement démonstratif est la preuve mathématique par excellence et l'essence même des mathématiques. Mais, explique Pólya [7], de par la rigidité de ses règles, « il est incapable par lui-même de conduire à des connaissances essentiellement nouvelles sur le monde qui nous entoure. Tout ce que nous apprenons de neuf sur ce monde implique l'intervention du raisonnement plausible dont le sens profond est de justifier nos hypothèses. », alors que le raisonnement démonstratif justifie nos démonstrations.

3.1.2 Heuristique

Pólya tente donc avec force exemples de faire la théorie de ce raisonnement plausible. Il n'est par définition pas formalisable, mais la question principale de cette théorie est posée : comment trouver l'analogie ?

Pour lui, l'analogie est une ressemblance envisagée de façon précise et sur le plan conceptuel ; elle est particulière par « l'intention de celui qui considère les objets semblables » : en effet elle est considérée d'un certain point de vue. Il reprend l'étymologie pour expliquer que le mot signifie d'abord rapport et proportionnalité : l'analogie concerne donc plusieurs couples d'éléments dont le rapport est égal, *i.e.* « deux objets analogues concordent par certains rapports entre leurs éléments respectifs ». C'est une « communauté de rapports ».

L'analogie existe à divers degrés. Elle peut rester vague, ambiguë et incomplète, mais on a intérêt à la préciser : elle gagne plus de poids, et la qualité de l'analogie compte plus que la quantité des analogues. On peut atteindre le stade de la précision mathématique, même si de tels exemples sont rares chez PÓLYA, dont les analogies servent le but d'un théorème : celui-ci démontré, l'analogie n'a pas de raison d'être poussée plus loin ; il suffit de la garder en mémoire pour pouvoir la ressortir à l'occasion.

Il explicite alors trois cas d'analogie précise entre deux systèmes S et S', sans s'y attarder [8] :

- Certains rapports entre les éléments de S sont régis par les mêmes lois qui gouvernent les rapports correspondants entre les éléments de S'.
- Il existe une correspondance bijective entre les éléments de S et de S' telle que les même rapports régissent deux objets de S et les deux objets correspondants — nous dirions que les deux systèmes sont isomorphes.
- Les deux systèmes sont homomorphes.

Pour trouver la bonne analogie, PÓLYA recommande de la considérer en rapport avec les procédés utiles de la particularisation et de la généralisation. Il décrit les relations qu'entretiennent ces procédés par le schéma ci-près [7, fig. 2.2] et

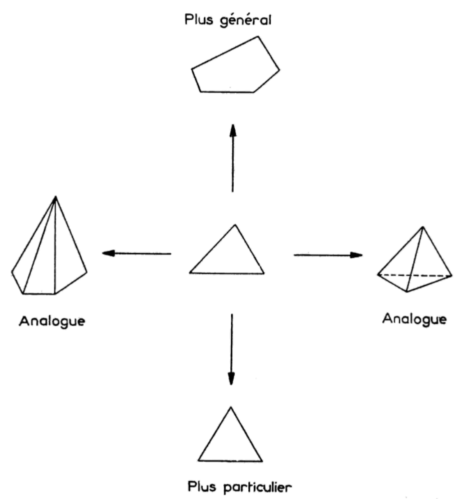

FIG. 1 – Généralisation, particularisation, analogie.

donne l'exemple de la démonstration du théorème de Pythagore : en le généralisant et en considérant une bonne particularisation, la démonstration est un jeu d'enfant !

Une autre idée exprimée est celle, constante, de l'expérimentation avec les objets en question, à la manière des sciences inductives, jusqu'à ce qu'on ait pu trouver la bonne analogie.

3.1.3 Les règles d'inférence plausible

Mais PÓLYA tente aussi de définir l'analogie *ex nihilo* et, en copiant la théorie de la démonstration et les notations de HILBERT et ACKERMANN, à construire des analogues des schémas d'inférence, qualifiés d' « inférence plausible ».

Ainsi, l'analogie peut être définie par :

> A est analogue à B si on peut *espérer* l'existence d'un théorème plus large H qui expliciterait les points communs essentiels et duquel A et B découleraient.

Il a par ailleurs construit le schème suivant, copié sur le *modus ponens* :

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ B \text{ est vrai} \\ \hline A \text{ est plus plausible} \end{array}$$

et généralisé ce schème à

$$\begin{array}{c} H \Rightarrow A \\ H \Rightarrow B \\ B \text{ est vrai} \\ \hline A \text{ est plus plausible} \end{array}$$

ce qui en fait est plus faible. Il propose alors le schème de définition suivant :

$$\begin{array}{c} A \text{ est analogue à } B \\ B \text{ est vrai} \\ \hline A \text{ est plus plausible} \end{array}$$

3.2 La théorie de POINCARÉ

Henri POINCARÉ est le mathématicien dominant du XIX$^{\text{e}}$ siècle et un des derniers à connaître l'ensemble des mathématiques. Son nom est plus particulièrement associé au problème des trois corps et à la topologie algébrique. Il a écrit vers la fin de sa vie plusieurs livres et beaucoup d'articles sur sa vision des mathématiques et sur le processus de la découverte.

3.2.1 L'analogie est un sens supplémentaire

Les allusions de Henri POINCARÉ à l'analogie sont moins systématiques que chez PÓLYA. Mais ce concept apparaît naturellement chez un penseur qui donne à l'intuition la place centrale dans la recherche. En effet, il s'applique comme PÓLYA à attaquer la logique pure comme fondement : il la considère comme stérile pour les mathématiques. L'intuition permet au contraire de

> faire du premier coup des conquêtes rapides, mais quelquefois précaires, ainsi que de hardis cavaliers d'avant-garde. [5]

Poincaré explique ainsi que c'est l'intuition qui permet de suppléer à nos sens. Et alors que ceux qu'il appelle les géomètres se serviront d' « images que nul ne peut oublier dès qu'il en a compris le sens », « l'intuition n'est pas nécessairement fondée sur le témoignage des sens ». En effet, ceux que Poincaré appelle les analystes, qui ne font pas appel à des images sensibles, doivent bien « avoir la vision du but qu'ils voulaient atteindre. Il a bien fallu qu'ils devinassent le chemin qui y conduisait, et pour cela, ils ont besoin d'un guide ».

« Leur guide, c'est d'abord l'analogie », écrit Poincaré. C'est elle, dit-il, qui fait d'eux des inventeurs. D'un côté, ce n'est qu'en replaçant une combinaison isolée parmi les « millions de combinaisons différentes des éléments variés dont nous disposons [...] dans une classe de combinaisons analogues », ce n'est que lorsque nous aurons remarqué cette analogie que l'on dépassera le « fait brut » et qu'on « aura senti l'âme du fait ». D'un autre côté, « les analystes, pour ne pas laisser échapper les analogies cachées [...] doivent, sans le secours des sens et de l'imagination, avoir le sentiment direct de ce qui fait l'unité d'un raisonnement, de ce qui en fait pour ainsi dire l'âme et la vie intime. » Ainsi, c'est l'analogie des combinaisons qui en est leur âme et leur vie intime.

3.2.2 Rapports avec la pensée de Mach

Dans sa conférence [6], Poincaré cite de façon répétée Ernst Mach et son principe d'économie de pensée : c'est le rôle de la science et « l'importance d'un fait se mesure donc à son rendement ». Pour Poincaré, ce principe s'applique autant en mathématiques qu'en physique — et c'est l'analogie qui en est l'instrument :

> Je me suis livré à un calcul compliqué [...] Je ne serai pas payé de ma peine si je ne suis devenu par là capable de prévoir les résultats d'autres calculs analogues et de les diriger à coup sûr en évitant les tâtonnements auxquels j'ai dû me résigner la première fois. Je n'aurai pas perdu mon temps [...] si ces tâtonnements mêmes ont fini par me révéler l'analogie profonde du problème que je viens de traiter avec une classe beaucoup plus étendue d'autres problèmes [...] Ce n'est pas alors un résultat nouveau que j'aurai acquis, c'est une force nouvelle. [6]

Ainsi, à la place d'un long calcul particulier, il vaut mieux se souvenir du « raisonnement souvent à demi-intuitif qui nous aurait permis de prévoir ». Poincaré estime d'ailleurs que « tout le monde sent qu'il y a des analogies qui ne peuvent s'exprimer par une formule et qui sont les plus précieuses ».

« On ne saurait croire combien un mot bien choisi peut économiser de pensée ». En effet, « la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes [...] par la matière, semblables par la forme. » Ainsi, la géométrie « nous donne un langage très commode [qui] nous fait nommer du même nom ce qui se ressemble et affirme des analogies qu'il ne nous permet plus d'oublier ». Mais pour exploiter cette similitude, il faut que le mathématicien reconnaisse l'analogie de toute nouvelle application avec celles qui ont déjà été faites ; il faut aussi savoir discerner les différences.

3.2.3 L'analogie unifie

Dans le même esprit, POINCARÉ souligne à plusieurs reprises le rôle unificateur et structurant de l'analogie. Elle relie des éléments connus depuis longtemps et qui paraissaient étrangers les uns aux autres. Elle « nous permet de voir d'un coup d'œil chacun de ces éléments et la place qu'il occupe dans l'ensemble ». Elle « introduit l'ordre là où régnait l'apparence du désordre ».

Poincaré estime en effet de manière très kantienne que les seuls effets dignes de notre attention sont ceux qui introduisent de l'ordre dans cette complexité et la rendent ainsi accessible. L'analogie permet aussi de découvrir des rapprochements inattendus entre deux domaines, que POINCARÉ estime très féconds et facteurs de progrès.

3.3 La théorie de LEIBNIZ

Nous quittons la science de la fin du XIX^{e} et du XX^{e} siècle pour nous pencher sur le philosophe et mathématicien Gottfried Wilhelm LEIBNIZ. Son projet de langue universelle avait ses sources et trouvait ses applications dans ce que lui-même appelait l'art d'inventer. Les opuscules [3] en sont particulièrement révélateurs.

3.3.1 Ars Combinatoria

C'est en 1666 qu'il publia son *De arte combinatoria* qui devait donner « une méthode qui nous mène infailliblement à l'analyse générale des connaissances humaines. » Il s'agit de dresser la liste exhaustive des concepts primitifs qui constitue une sorte d'alphabet de tous les autres concepts, décomposables en concepts primitifs comme un nombre naturel en ses facteurs premiers. En donnant une description complète des combinaisons possibles entre concepts pour former des propositions, on peut réduire tout raisonnement à une opération mécanique de calcul.

LEIBNIZ distinguait logique démonstrative et logique inventive. La première devait permettre de démontrer des propositions et de déceler des erreurs comme on corrige des erreurs de calculs : il suffirait par analyse de décomposer une proposition en concepts primitifs et de vérifier la validité des combinaisons. La deuxième se compose de deux tâches, analyse et synthèse. L'une permet d'établir les éléments d'une caractéristique, l'autre, de les recombiner. Son problème fondamental s'énonce ainsi :

> Étant donné un sujet, trouver tous ses prédicats possibles ; étant donné un prédicat, trouver tous ses sujets possibles.

Dans le cadre de sa langue universelle, de sa « caractéristique », l'art d'inventer devient ainsi un art cryptographique : le monde des phénomènes s'écrit comme un immense cryptogramme, dont les clefs sont les lois de la nature.

3.3.2 Le langage est analogique

On peut comprendre l'idée de Leibniz de la décomposition des concepts en concepts primitifs qui seraient figurés par les « caractères » comme une réaction aux nominalistes qui refusaient d'établir un rapport entre la réalité et le langage. Il leur concédait qu'effectivement les signes qui figurent les choses sont arbitraires, mais il n'en est pas ainsi des relations entre les signes, dont la vérité dépend des relations entre les choses signifiées. Pour Leibniz, donc, les propositions objectives consistent seulement dans la connexion objective des signes, et bien plus, dans leur similitude. En effet, les signes restant arbitraires, le système des signes peut être échangé par un autre, sans que cela touche à la question de la vérité.

Il y a donc une première analogie entre le système des choses et le système des signes. Elle offre toute la rigidité de son sens originel d'égalité de rapports. Plus généralement, il y a analogie entre les divers systèmes de signes qui décrivent le même système d'objets, puisqu'ils expriment la même réalité. Leibniz s'attachera donc logiquement à la question du choix du meilleur système de signes.

3.3.3 Du bon choix des caractères

Le choix des caractères est si important aux yeux de Leibniz parce qu'ils doivent traduire les idées et les exprimer de la manière la plus précise et la plus adéquate. « Les caractères font signe à l'esprit, l'aiguillonnent. » Face à l'arbitraire du choix des signes, il propose donc par analogie avec l'algèbre sa « caractéristique universelle », une sorte d'algèbre logique : il exprime les concepts par des lettres et des combinaisons de lettres, les jugements par des formules et les raisonnements par des successions d'équations, *i.e.* des calculs et des transformations de formules.

Leibniz inventera finalement une écriture combinatoire où les caractères sont des entiers naturels, leurs combinaisons des produits d'entiers naturels et les propositions des fractions rationnelles. Revêtir ainsi la logique de formes mathématiques répond aussi à son souci de rendre les raisonnements sensibles et palpables. Mais il admettait aussi d'autres symbolismes pour sa logique, comme des figures ou des mouvements, à partir du moment où, comme il l'exprime, ils « symbolisent entre eux ». En effet, il reconnaissait l'utilité des images géométriques pour illustrer des calculs abstraits, car, s'il est « bon d'apprendre à raisonner sans aucune figure », divers systèmes de signes peuvent être d'un grand secours à l'entendement en ce qu'ils lui fournissent « l'appui et le guide de l'imagination ». C'est l'analogie de la construction de figures géométriques avec la combinaison de concepts qui le permet.

3.3.4 Ars Inveniendi

Mais le premier souci de Leibniz avait été inverse : il s'agissait pour lui de trouver, à l'aide de sa caractéristique, la raison profonde d'une découverte, car au-delà de la découverte elle-même, elle permettrait de « voir les origines des inventions mêmes à cause de leur fécondité et parce qu'elles contiennent en elles la source d'une infinité d'autres ». Il s'agissait de systématiser les possibilités d'analogies. En effet, en traduisant une découverte dans la caractéristique, les combinaisons des concepts primitifs deviennent apparents. Or la combinatoire est une science de la forme, du semblable et du dissemblable et non du contenu : purement formelles, les formules ne s'appliqueront pas seulement au nombres, mais à tout « objet d'intuition susceptible d'ordre et d'aménagement distinct ». Ainsi, les combinaisons de concepts primitifs découvertes s'appliqueront à tout objet semblable.

4 Conclusion

4.0.1 La théorie des modèles

Les trois penseurs dont nous avons présenté les idées ont, de différentes manières, exprimé la nécessité de s'intéresser au langage des théories pour établir ou découvrir des analogies. Ainsi, chez Pólya, il s'agit de trouver les éléments que l'on pourra mettre en correspondance avant de tenter de reprendre le raisonnement d'un théorème connu pour l'adapter à la démonstration entreprise. Mais ce langage est flottant : comme il l'écrit, il n'y a pas nécessairement univocité — l'enjeu fondamental est d'être efficace. Poincaré rappelle l'idée de Mach d'une économie de la pensée et s'appesantit sur l'utilité du terme bien choisi. Finalement, la section précédente a bien montré que la préoccupation constante de Leibniz est le langage.

La théorie des modèles reprend cette préoccupation : pour devenir la « méta » -théorie des théories mathématiques, il faut d'abord qu'elle entreprenne l'analyse de leur langage. Puis, comme Abraham Robinson l'a écrit :

> L'analyse logique des structures algébriques doit conduire à subordonner sa multiplicité à des principes généraux qui transforment les analogies relevées entre certaines structures en identité logique formelle.

En cela, la théorie des modèles est bien héritière des préoccupations de Leibniz. En se plaçant au-dessus des théories, en traitant en fait d'ensembles de théories, elle s'intéresse aussi au langage utile pour une description formelle des faits. Elle prête un nouveau langage, un nouveau vocabulaire, dont l'utilité est de décrire la possibilité de traduire une théorie dans une autre, de passer d'un langage mathématique à un autre ; grâce à l'analyse du langage, elle livre finalement une forme unique.

4.0.2 Résultats concrets

Mais la théorie des modèles a aussi pu être qualifiée de nouvel « art d'inventer ». En effet, elle a su, comme le voulait Leibniz pour sa logique, démontrer qu'elle était capable de fournir des résultats enrichissants pour les mathématiques ellesmêmes. Ainsi, Tarski a pu établir un « principe de transfert » de $\mathbb{R}$ vers tout corps réel clos : c'est en effet une conséquence de la complétude de la théorie élémentaire des corps réels clos. Ce résultat devient proprement fertile lorsque la démonstration d'une proposition est possible dans un modèle et non dans un autre : même si elle n'est pas transférable, la proposition l'est.

Dans le même sens, les investigations du lien entre la clôture algébrique et la clôture réelle faites par ROBINSON donnent en même temps lieu à des résultats mathématiques et relèvent proprement de la théorie des modèles. Une nouvelle étape a été franchie losqu'elle a été à même de multiplier les analogies mathématiques et d'inventer parallèlement aux deux précédentes la notion de clôture différentielle.

4.0.3 Bilan

On a vu le rôle central de l'analogie dans toute l'activité mathématique. L'irruption de la théorie des modèles nous a obligés à resituer cette notion. En effet, cette théorie permet de donner à certaines analogies formelles une clarté toute mathématique. Peut-on alors prétendre que toute analogie doit pouvoir atteindre cette clarté ? Ou faut-il soutenir, comme POINCARÉ, que « tout le monde sent qu'il y a des analogies qui ne peuvent s'exprimer par une formule et qui sont les plus précieuses » ? Ce qui paraît finalement déterminant, c'est le caractère empirique de l'analogie : son apparition a très souvent été imprévisible et due à l'observation. La théorie des modèles apparaît réellement dans une phase ultérieure, où les analogies qui s'y prêtent sont traîtées et systématiquement fertilisées.

Références

[1] Andrew BRODY. Economics and Thermodynamics. Dans Mohammed DORE, éditeur, *John von Neumann and Modern Economics*, pages 141–148. Clarendon, 1989.

[2] Leonhard EULER. *Opera omnia. Ser. 1 Vol. XIV : Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes vol. I*, pages 73–86. Teubner, 1925.

[3] Gottfried Wilhelm LEIBNIZ. *Les opuscules et fragments inédits*. Olms, 1961.

[4] John von NEUMANN. Über ein ökonomisches Gleichgewicht und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. *Erg. Math. Coll.*, pages 73–83, 1937.

[5] Henri POINCARÉ. Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques. Dans *Congrès intern. des math. (Paris 1900)*, pages 115–130, 1902.

[6] Henri POINCARÉ. L'avenir des mathématiques. Dans *Actes du IV^{e} congrès international des mathématiciens*, pages 167–182. Academia dei Lincei, 1908.

[7] George PÓLYA. *Les mathématiques et le raisonnement "plausible"*. Gauthier-Villars, 1958.

[8] George PÓLYA. *How to solve it.* Princeton University Press, 1971.

[9] Alfred TARSKI. Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe. *Erkenntnis*, 5 :80–100, 1935.