Bernard Bolzano:
Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung,

ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt

Stefan Neuwirth

Table des matières

1 Introduction

Bernard Bolzano a publié en 1817 son traité sur les trois problèmes de la rectification, de la complanation et de la cubature. Il s'agit d'une réaction aux pratiques mathématiques de l'époque, qu'il critique en accord avec ses *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*.

Pour entreprendre une analyse des motivations et des idées de Bolzano, nous allons d'abord exposer comme point d'appui la démonstration par Lagrange de la formule de la rectification des courbes : en effet, parmi les démonstrations proposées à l'époque, c'est celle qui paraît encore la moins fautive aux yeux de Bolzano. Au courant de cette exposition, nous allons expliciter ses critiques.

Puis nous analysons les cahiers que BOLZANO a tenus à l'époque de la maturation du traité, de manière à en décrire la préhistoire et à préciser les idées qui y sont à l'œuvre.

Après avoir résumé les préceptes exposés au cours de l'introduction aux *Trois problèmes*, nous passons à la démonstration proposée par BOLZANO de la formule de la rectification des courbes.

Nous décrivons finalement les réactions de l'époque de la parution et proposons quelques conclusions.

2 La résolution par LAGRANGE du problème de la rectification

Nous allons retracer la résolution par Joseph Louis LAGRANGE du problème de la rectification des courbes, telle qu'il l'a exposée dans sa *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel [...] réduits à l'analyse algébrique des quantités finies* [6]. Cet ouvrage ne contient aucun dessin géométrique alors que toute une partie, celle qui nous concerne, traite de l'« application de la théorie des fonctions à la géométrie. »

2.1 Le principe d'ARCHIMÈDE

Dans son exposition, LAGRANGE place ce problème immédiatement à la suite de celui de la quadrature des courbes, et il veut appliquer la même méthode : encadrer la longueur recherchée par deux autres longueurs dont la différence tend dans un certain sens vers zéro ; leur commune valeur sera la longueur de la courbe. Pour cela, il a besoin d'un principe « adopté par tous les géomètres anciens et modernes, » qui lui permet de comparer la longueur de certaines lignes courbes :

> [De] deux lignes courbes ou composées de droites ayant leur concavité tournée du même côté et les mêmes extrémités, celle qui renferme l'autre est la plus longue. [6, p. 241]

Ce principe a été énoncé par Archimède dans le premier livre de son écrit *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* [4]. Il ne leur donne pas le même statut qu'EUCLIDE à ses postulats. En effet, il ne les appelle que des hypothèses, comme le remarque BOLZANO, et en dit : « je prends et je reçois ces choses. »

2.1.1 La démonstration par LEGENDRE du principe d'ARCHIMÈDE

Adrien Marie LEGENDRE démontre dans ses *Éléments de géométrie* [7] le principe d'ARCHIMÈDE qu'il énonce comme suit :

> Toute ligne courbe ou polygone qui enveloppe d'une extrémité à l'autre la ligne convexe AMB est plus longue que la ligne enveloppée AMB. [7, p. 115]

Legendre procède par l'absurde : dans le cas contraire, il existera, parmi toutes les lignes qui enveloppent AMB, « une ligne plus courte que toutes les autres, laquelle sera plus petite que AMB, ou tout au plus égale à AMB. » Il construit alors à partir de cette ligne une ligne encore plus petite, ce qui est absurde.

2.1.2 La critique de Bolzano

Bolzano n'accepte pas le premier pas de la démonstration : il ne voit pas de quoi Legendre peut déduire l'existence d'une ligne plus courte que toutes les autres. En fait, il rejette le principe même d'une démonstration par l'absurde, car le « sujet » du « jugement » est « quelque chose d'impossible » [1, p. 72]. Il ne se préoccupe alors pas du problème de l'existence même d'une ligne « minimale. »

Il critique aussi le fait que Legendre n'utilise pas l'hypothèse de convexité de l'énoncé dans sa démonstration, alors qu'elle est indispensable. En cela, il a formellement raison, mais en fait, l'hypothèse est utilisée de manière tacite lorsque Legendre construit « la droite PQ, qui ne rencontre point la ligne AMB, ou du moins qui ne fasse que la toucher. » C'est là que l'hypothèse selon laquelle une « ligne droite ne peut couper [AMB] en plus de deux points » [7, p. 116] entre en jeu.

2.2 L'encadrement de la longueur de l'arc

Cela permet alors à Lagrange d'encadrer la longueur d'un « arc de courbe tout concave du même côté, » ce qui semble inclure aussi que $f(x)$, la « fonction de x qui exprime l'arc de la courbe » est monotone. Cette longueur est comprise entre celle de sa corde et la somme de celles des tangentes « menées aux deux extrémités de l'arc et comprises entre ces extrémités et leur point d'intersection » [6, p. 242].

Il réussit à trouver un encadrement encore plus judicieux : il prétend que, dans le cas considéré, cette longueur « se trouvera comprise entre celles des deux tangentes menées à ses deux extrémités et terminées aux deux ordonnées qui répondent à ses extrémités » [p. 242], c'est-à-dire menées tout le long de l'intervalle des abscisses auxquelles répondent les ordonnées de l'arc.

2.2.1 Explication

En effet, comme la fonction qui exprime l'arc est monotone et sa dérivée seconde de signe constant, la fonction dérivée est monotone et de signe constant. Donc « l'une des deux tangentes rencontrera les ordonnées parallèles sous un angle plus aigu que la corde et l'autre les rencontrera sous un angle moins aigu, et, par conséquent, la corde sera moindre que la première de ces tangentes et plus longue que la seconde ; donc celle-ci sera, à plus forte raison, moindre que l'arc de la courbe. » [p. 242]

LAGRANGE considère alors les deux triangles formés par les deux tangentes, qui se coupent, et les ordonnées parallèles passant par les extrémités de l'arc. Leur seul point commun est l'intersection des tangentes : chaque tangente est ainsi composée de deux parties, dont il remarque par un argument géométrique que « les deux parties de la première tangente seront respectivement plus longues que celles de la seconde. » Donc la première tangente sera plus longue que la somme des longueurs des « deux portions de tangentes comprises entre leur point d'intersection et les extrémités de l'arc. Donc elle sera aussi plus longue que l'arc. » [p. 242]

2.3 Résolution du problème

Si $\Phi(x)$ est la « fonction de x qui exprime [la longueur de] l'arc de la courbe, » on a donc, pour « l'arc de la courbe compris entre les ordonnées $f(x)$ et $f(x+i)$, » que $\Phi(x+i) - \Phi(x)$ sera comprise entre les longueurs des deux tangentes

$$i\sqrt{1+f'(x)^2} \quad \text{et} \quad i\sqrt{1+f'(x+i)^2}.$$

Posons $\phi(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$. Une technique propre à LAGRANGE — qui n'utilise pas le quotient différentiel pour définir la dérivée, mais le développement en série —, qu'il vient de développer au sujet de la quadrature, lui permet alors de conclure que

$$\Phi'(x) = \phi(x). \text{ [p. 244]}$$

Ceci est la formule de la rectification des courbes.

2.4 L'avis de BOLZANO

D'une part, BOLZANO loue la démonstration de LAGRANGE parce qu'elle ne fait pas intervenir de notion d'infiniment petit ni de fraction indéterminée du type 0/0, au contraire de travaux de DUBOURGUET [3] par exemple. Mais d'autre part, la référence au principe d'ARCHIMÈDE, dont BOLZANO n'admet pas la preuve qu'en donne LEGENDRE, font que cette démonstration aussi ne résiste pas à son exigence de rigueur. C'est pourquoi il va tenter d'en donner une preuve lui-même qui, comme le titre de son travail l'indique, se passe des « hypothèses d'ARCHIMÈDE. »

3 Avant les *Trois problèmes*

En fait, la publication de ce traité en 1817 intervient près de quatorze ans après ses premières recherches sur le sujet de la rectification des courbes. L'événement qui l'a déterminé à publier ses idées semble avoir été son entrée comme membre ordinaire à la société royale bohémienne des sciences en 1815 : EDUARD WINTER [8, p. 49] remarque que cette nomination a motivé BOLZANO à continuer ses études mathématiques.

On trouve les traces de ses recherches dans les *Miscellanea mathematica* [2], des cahiers qu'il a tenus sa vie durant et dont les premières inscriptions datent de 1803. Ces manuscrits continuent à être publiés dans le cadre de la *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe*.

3.1 *Miscellanea mathematica 29*

3.1.1 Datation

L'intérêt de Bolzano pour la question de la rectification lui vient sans doute de Lagrange : en effet, la feuille 36 des *Adversaria mathematica IV*, datée de 1803, contient déjà des remarques sur la première édition de sa *Théorie des fonctions analytiques* [6]. La question apparaît pour la première fois dans les *Miscellanea mathematica* [2] à la page 29, qui date d'après 1803 et probablement d'avant 1805.

3.1.2 La cause de la longueur

Bolzano cherche d'abord à y expliquer le concept de longueur et à y rapprocher la mesure de la longueur d'une courbe de celle d'une ligne droite : il développe dans ce sens une étiologie adaptée. Il écrit que mesurer la longueur d'une courbe veut dire comparer la courbe à une droite, c'est-à-dire trouver ce qu'une ligne droite et une ligne courbe peuvent avoir en commun. Or, remarque-t-il, on sait que la longueur de la ligne courbe est $\int dx\,(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ et donc la primitive dont la première dérivée est $(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$. Or cette quantité est la sécante (au sens de fonction trigonométrique) de l'angle que fait la tangente avec la ligne des abscisses. Il en déduit : « cette sécante, pourrait-on dire, est la cause dont la longueur de la courbe est la conséquence à démontrer. » Et « la longueur est une telle fonction de x que sa première dérivée donne la sécante z. »

3.1.3 Cause commune aux droites et aux courbes

Bolzano est toujours à la recherche d'une cause commune aux longueurs de la ligne droite et de la ligne courbe. Il propose :

> Ne pourrait-on pas démontrer que ce que les deux courbes $y = f(x)$ et $z = a + bx$ ont en commun, consiste en ce que les fonctions $(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ et $(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}$ soient les mêmes ? que cela soit toujours possible ? ce qui serait alors seulement un théorème d'arithmétique.

Il ajoute : « pour une certaine valeur $x = n$, les deux lignes $y = f(x)$ et $z = a + bx$ peuvent avoir quelque chose en commun, c'est-à-dire la longueur. » Finalement, avant d'abandonner cette manière de voir, Bolzano, en s'exclamant : « le raisonnement suivant tient-il ?, » en tente un dernier, dont le développement se retrouve plus subtilement dans les *Trois problèmes...* :

> La ligne $z = a + bx$, quelle longueur a-t-elle ? Je la trouve en exprimant $(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}$, cela donne $z' = b$; $(1+z'^2)^{\frac{1}{2}} = (1+b^2)^{\frac{1}{2}}$. La ligne $y = f(x)$ doit alors lui être égale [en longueur], donc pour elle aussi $(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = (1+b^2)^{\frac{1}{2}}$, d'où je déduis b et je substitue cela dans $z = a + bx$, puis je peux poser n pour x.

3.2 *Miscellanea mathematica 52* — Tentative de définition

BOLZANO reprend ses réflexions 23 pages plus loin et peut-être une année plus tard. Après un essai infructueux, il annonce un « autre essai. » Il s'agit pour lui, cette fois-ci, de voir la formule $\int \sqrt{x'^2 + y'^2}$ comme une généralisation de la formule de la longueur d'une ligne droite et même de caractériser la longueur considérée comme fonction de fx par son comportement sur les lignes droites et son invariance par déplacement — translation et rotation — de la ligne des abscisses :

> On appelle la longueur d'une ligne courbe $y = fx$ la fonction déduite de fx qui, lorsque fx est l'équation pour la droite, exprime la longueur de celle-ci, d'ailleurs si généralement qu'elle ne dépend pas de la position de la ligne des abscisses.

Il exploite d'abord ces remarques et croit pouvoir affirmer qu'une telle fonction doit être une « expression intégrale » et une « grandeur différentielle » : en effet, elle contient une grandeur indéterminée comme les expressions intégrales ; de plus, le changement de position de la ligne des abscisses ne change pas l'expression, comme pour certaines grandeurs différentielles.

> Et si on cherchait une expression générale pour la longueur de la ligne droite, indépendante de la position de la ligne des abscisses, et qu'on n'en trouvait pas d'autre que $\sqrt{x'^2 + y'^2}$?

Il remarque qu'effectivement la formule $\int \sqrt{x'^2 + y'^2}$ vérifie ces conditions. Il voudrait démontrer que c'est la seule, mais dans les *Miscellanea mathematica 54*, il s'aperçoit qu'il se fourvoie.

3.3 *Miscellanea mathematica 53* — Quelques théorèmes

À la page suivante, BOLZANO cherche d'abord à distinguer la longueur des autres concepts géométriques qui décrivent la courbe :

> La longueur d'une ligne est le prédicat de celle-ci qui n'est ni son *lieu* ni sa *forme* ; ou ce qui, mis à part la forme et le lieu, lui appartient encore.

Il s'agit là d'une définition uniquement négative, dit BOLZANO dans un *nota bene*, mais « c'est toujours ainsi pour les premiers concepts. » Il propose alors trois théorèmes propres à caractériser la formule de la longueur :

Théorème 1 *Deux lignes droites dont les deux extrémités sont à des distances différentes ont une longueur différente.*

Théorème 2 *Pour toute ligne courbe, il existe une unique ligne droite de même longueur.*

Théorème 3 *Si la ligne abc est la réunion disjointe des lignes ab et bc, alors la longueur de abc est la somme des longueurs de ab et bc.*

3.4 *Miscellanea mathematica 54*

3.4.1 Une équation fonctionnelle pour la longueur

Il abandonne momentanément cette voie pour établir une équation fonctionnelle pour la fonction de la longueur de la courbe, sachant que celle-ci ne dépend pas de la position de la ligne des abscisses. D'abord, il remarque que cette fonction ne dépend pas que de l'ordonnée fx : si la courbe atteint deux fois la même ordonnée, cela ne peut pas signifier que la longueur y est à chaque fois la même. Il propose donc d'écrire cette fonction comme $F(x,\, fx)$. Il dérive alors cette équation fonctionnelle pour $F(u,\, t)$:

$$\text{Pour tous } \alpha,\, \beta,\, \gamma \quad F(u,\, t) = F(\alpha + u\cos\gamma - t\sin\gamma,\, (u-\beta)\sin\gamma + t\cos\gamma),$$

mais remarque que ce n'est pas la seule à la vérifier : il y a déjà $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ et même $A\sqrt{x'^2 + y'^2}$ qui satisfont à cette équation.

Dans les *Miscellanea mathematica 73–75*, on peut observer comment BOLZANO cherche à rendre rigoureuse la notion de longueur comme fonction de l'équation de la courbe, placée dans le cadre plus général de fonction de fonction. On retrouvera cette idée dans [1, §§ 6–9].

3.4.2 Pourquoi la quadrature est plus aisée que la rectification

On trouve sur cette page des *Miscellanea mathematica* un passage qui est la source d'une remarque des *Trois problèmes...* Il se demande pourquoi on a été « moins malheureux dans la quadrature des surfaces planes » [1] et conclut :

> Le contenu d'une surface, le contenu cubique ne sont pas exposés à ces difficultés, parce qu'on peut trouver facilement un corps plus petit et plus grand ; ce n'est pas possible pour la longueur. Je ne sais même pas définir correctement quelle est la partie de la ligne courbe dont on peut dire qu'elle est entre les points m et n.

3.5 *Miscellanea mathematica 55* — La rectification du cercle

BOLZANO traite alors un problème particulier qui lui tient à cœur : la rectification du cercle par des polygones. En effet, il traitera à nouveau ce cas dans les *Miscellanea mathematica 416* et même dans son traité [1, p. 75]. Il s'agit pour lui de montrer l'erreur manifeste qui consiste à inscrire et à exinscrire des polygones pour calculer la longueur du périmètre du cercle. En effet, on n'explique pas pourquoi on préfère les segments des polygones à une succession, par exemple, de demi-cercles exinscrits : or, dans ce cas, on arrive, en passant à la limite sur le rayon des demi-cercles, à une valeur différente pour le périmètre !

Ce qui paraît ici en cause, c'est l'usage d'une méthode de calcul qui n'est pas générique, c'est-à-dire qui, selon l'expression de BOLZANO, n'est pas « purement analytique. »

3.6 *Miscellanea mathematica 56*

3.6.1 La proximité d'une courbe et de sa tangente

Sur cette page s'esquisse l'approche formelle de BOLZANO que l'on retrouve dans [1] : il cherche à utiliser et à expliquer la notion de deux équations qui « s'approchent. »

> La ligne droite tangente est celle qui, pour les valeurs de i les plus petites, s'approche le plus des points de la courbe.

Mais il ne veut pas dire par là, comme l'ont cru de manière erronnée des mathématiciens comme LACROIX [5], qu'une ligne s'approche d'une autre d'autant plus que ses points sont plus proches des points de l'autre ligne, mais cherche plutôt à exprimer que « plus s'approchent les équations des deux lignes, plus s'approchent leurs propriétés ; longueurs, etc.... »

3.6.2 Mêmes causes, mêmes effets

Ainsi, BOLZANO revient finalement à son approche étiologique : de la même manière que l'on dérive Fx de fx, on dérive la longueur de la ligne droite de l'équation de la ligne droite.

> Les formes des deux fonctions $fa + if'a + \frac{i^2}{2}f''a + \cdots$ et $fa + if'a$ sont telles que la deuxième est celle qui dans sa forme s'approche le plus de la première. Donc les fonctions dérivées [les longueurs] doivent aussi avoir cette propriété.

d'où il déduit $F'a = (1 + f'a)^{\frac{1}{2}}$.

Citons les *Miscellanea mathematica 170* : « mais comme la tangente a en commun le point b avec la courbe, on voit que dans le différentiel, toute différence entre courbe et droite s'arrête » ; et les *Miscellanea mathematica 74* : « la conséquence est déterminée par la loi qui détermine la cause et par le temps pendant lequel elle agit. »

3.7 *Miscellanea mathematica 228* — Une approche mécanique

BOLZANO présente, probablement quelques années plus tard, une approche de la longueur inspirée de la mécanique : « la longueur est ce qui se comporte comme le temps que prend un point matériel à vitesse constante pour décrire la ligne. » Il explicite son heuristique :

> Pour obtenir à partir de ces concepts mécaniques les concepts purement géométriques, on passe en revue toutes les propriétés purement géométriques de ces choses déterminées mécaniquement et on remarque celles qui sont plus ou moins propres à une telle chose. Une de ces propriétés doit être le concept purement géométrique.

Il donne même les raisons qui font préférer une propriété caractéristique à une autre, même si cela est accessoire.

Cette approche débouche à nouveau sur une étiologie. Ainsi, la longueur serait le « degré d'une cause » — le temps mis — qui « avec une autre cause, à vitesse constante, a pour conséquence la ligne courbe » ; ou ce serait « ce qui distingue toutes les lignes, ce qui se laisse mesurer en elles si on les pense toutes produites par une même cause, » sachant que les lignes « ne se différencient que dans le degré de leurs propriétés. »

3.8 *Miscellanea mathematica 230* — L'additivité de la longueur

Bolzano revient alors à ses idées des *Miscellanea mathematica 53* : une des propriétés caractéristiques de la longueur qu'il recherchait deux pages plus haut serait l'additivité du théorème 3. Il croit le démontrer pour les lignes droites, mais ne voit pas que l'additivité détermine la longueur d'une ligne droite à un facteur multiplicatif près seulement. Il voudrait réussir à généraliser ce raisonnement aux courbes, mais en reste là.

On retrouve dans cette page les remarques du § 20 de [1], où il se défend de ce que son « explication » de la longueur du § 19 par la propriété de l'additivité a quelque chose d'arbitraire.

4 Les critiques et préceptes de Bolzano

Le traité *Les trois problèmes* commence par de longs prolégomènes où il passe en revue les tentatives antérieures d'établir la formule de la rectification des courbes.

4.1 La rigueur

Bolzano, dès le premier paragraphe, met l'accent sur la plus grande rigueur :

> Tant les solutions que l'on a, surtout dans les temps récents, trouvées pour les trois problèmes [de la rectification, de la complanation et de la cubature] sont faciles et générales, tant manquent jusqu'à aujourd'hui des démonstrations rigoureuses et vraiment scientifiques de leur validité, au moins en regard des deux premiers.

Il explique que des géomètres comme Johann Schultz ne parviennent pas à défaire les concepts d'infiniment petits du soupçon de contradictions, et estime que leurs explications sont insuffisantes. Il cite un passage de Dubourguet :

> L'arc Δs et sa corde $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ne sont différents qu'aussi longtemps que ces deux grandeurs ne sont devenues nulles toutes deux : on a donc en toute rigueur $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}$ [3, § 529].

qui parfait sa démonstration : l'usage des infiniment petits est dangereux.

Mais comme on l'a vu plus haut, même Lagrange n'est pas à l'abri de sa critique : le principe d'Archimède, dont il réfute la démonstration, est inadmissible pour lui en ce qu'il fait appel à la méthode géométrique et non au calcul intégral ou différentiel.

BOLZANO se fait aussi un plaisir d'attaquer LACROIX [5] sur son affirmation qu'une ligne s'approche d'une autre d'autant plus que ses points sont plus proches des points de l'autre ligne, ce qui est effectivement indéfendable sans l'hypothèse que les lignes sont concaves du même côté : d'ailleurs, les *Miscellanea mathematica 56* fournissent un contre-exemple.

4.2 *Pour une exposition plus fondée des mathématiques*

4.2.1 Postulats et hypothèses

La deuxième idée qui traverse les prolégomènes est celle qu'il faut clarifier les statuts des principes et des théorèmes et la forme même de la science mathématique. Il s'agit là d'une motivation profonde dans le travail de BOLZANO, qui a des raisons aussi philosophiques que pédagogiques. Ainsi, il attire l'attention sur la différence entre les postulats d'EUCLIDE et les hypothèses d'ARCHIMÈDE. En effet, les premiers — sauf peut-être celui des parallèles, auquel BOLZANO a dédié sa thèse de doctorat — n'admettent pas de fondement plus profond de leur vérité, alors que les secondes ne sont que des « propositions sur lesquelles on attire l'attention de manière privilégiée parce que, quoique leur démonstration n'ait pas encore été trouvée, on s'en est déjà servi. »

BOLZANO fait remarquer qu'une propriété nécessaire des postulats est que les concepts dont ils traitent ne soient pas composés. C'est une raison de plus de refuser ce statut au principe d'ARCHIMÈDE.

4.2.2 La démonstration réellement scientifique

Pour BOLZANO, le vrai progrès mathématique n'est pas le calcul de « la grandeur de lignes ou de surfaces particulières, obtenue plutôt par des manipulations chanceuses que par une méthode partout applicable, » mais, dès qu'on a découvert les « rapports généralement valides entre les équations pour une ligne, surface ou corps, et les expressions de leur grandeurs, » de « découvrir les seules démonstrations objectives ou vraiment scientifiques. »

Pour ce faire, il faut tenter d'atteindre une certaine pureté dans les démonstrations : c'est-à-dire que la dérivation de la grandeur doit devenir un « dispositif purement analytique. »

> Un dispositif purement analytique (ou aussi purement arithmétique, ou algébrique) est tel que l'on dérive une certaine fonction d'une ou d'une multitude de fonctions uniquement par certaines transformations ou mises en rapport qui sont exprimées par une règle tout à fait indépendante de la nature des grandeurs désignées. [...] Ces règles se laissent exprimer de manière à éviter complètement le concept de l'infiniment petit.

Les trois propositions doivent donc être dérivées de leur fondement objectif. Avant cela, aucun autre théorème ne pourra être bien exposé : « la nature des démonstrations vraiment scientifiques exige que la proposition particulière soit toujours dérivée de la proposition plus générale. » De plus, toutes les hypothèses doivent être explicitement utilisées dans la démonstration — comme il le critique chez LEGENDRE — et seuls les concepts de l'hypothèse doivent intervenir. Ainsi, la méthode des limites est un concept accessoire et aléatoire.

4.2.3 Le refus de la démonstration par l'absurde

BOLZANO refuse aussi la démonstration de LEGENDRE pour des raisons formelles :

> D'une non-chose ne se laisse jamais dire quelque chose de vrai, et il ne faut donc même pas émettre de jugements dont le sujet contient une impossibilité. Combien idiots seraient par exemple les jugements : « Si dans un triangle tous les angles sont droits, alors il est isocèle, alors deux côtés de celui-ci sont parallèles. »

Cette position est curieuse, puisqu'il s'agit justement dans une démonstration par l'absurde de démontrer que le sujet est une « non-chose, » ce que l'on ne sait pas par avance. Ce qui est en jeu et mérite clarification, c'est le statut logique de cette « non-chose. »

5 La résolution par BOLZANO du problème de la rectification

Dans son traité *Les trois problèmes*, BOLZANO se réfère constamment à ses *Beytrage zu einer begründetern Darstellung der Mathematik*, qu'il avait publiés en 1810. Il y écrit : « les mathématiques sont la science qui traite des lois (formes) générales selon lesquelles les choses doivent se conformer dans leur existence, » c'est-à-dire qu'il refuse la définition communément admise des mathématiques comme science des grandeurs.

5.1 Le lien objectif entre la courbe et sa longueur

Dans l'exposition de sa méthode, dont il veut faire comprendre aussi vite que possible en quoi elle consiste, il commence par expliciter le lien qu'il y a entre l'équation de la courbe et la fonction de la longueur. La nature de ce lien est conditionnée par les idées philosophiques de BOLZANO sur la nature des mathématiques : c'est dans ce sens qu'il faut comprendre les dépendances et déterminations qu'il énonce. Il établit en fait un lien causal, dont la constitution mathématique reste floue : BOLZANO pense-t-il ou non à une fonction mathématique ? C'est ce flou qui fera chuter la démonstration, car BOLZANO présuppose ce lien et en utilise des propriétés qu'il ne daigne pas démontrer.

Voici comment il introduit sa méthode.

> Soit donc à calculer la longueur d'une ligne [...]. Soit $y = fx$ l'équation de cette ligne courbe, et la longueur du morceau qui correspond à l'abscisse x, $= Fx$. Si x croît de Δx, cette longueur augmente d'une grandeur de $F(x+\Delta x)-Fx$, qui est par le théorème de TAYLOR $\Delta x \left[\frac{dFx}{dx} + \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{d^2Fx}{dx^2} + \cdots\right]$. Cette grandeur ne dépend clairement pas de la constitution du morceau avant x, mais seulement du morceau d'arc situé au-dessus du morceau

d'abscisse Δx. Comme ce morceau d'arc est déterminé par les seules ordonnées qui correspondent à des abscisses qui ne sont pas situées hors des bornes x et $x+\Delta x$, il suit que la fonction $F(x+\Delta x)-Fx$ ne dépend aussi que des valeurs que prend fx pour toutes les valeurs de son argument qui ne sont pas situées hors de x et $x+\Delta x$ [...].

5.1.1 Les rationnels entre 0 et 1

Donc »$F(x+\Delta x)-Fx$ est déterminé par les valeurs de $f(x+m\Delta x)$, où m décrit toutes les fractions rationnelles comprises entre 0 et 1. »

Il est plausible qu'au moment où Bolzano a écrit son traité, il n'ait pas eu de concept clair de nombre réel, mais pourquoi parle-t-il explicitement de fraction rationnelle ? Pense-t-il qu'il s'agit là de l'ensemble des nombres entre 0 et 1 ? Ou a-t-il peur d'utiliser un concept qu'il ne maîtrise pas ? Le traité ne donne pas d'indice au sujet de cette question. Bolzano ne fait pas de distinction non plus entre dénombrable et continu.

5.1.2 Le quotient différentiel de la longueur

Bolzano remarque que Fx ne dépend de fx qu'à une constante additive près, qui correspond à une translation dans la direction des ordonnées de la courbe. Donc $F(x+\Delta x)-Fx$ est aussi déterminé par les valeurs de $f(x+m\Delta x)-fx$, où m décrit toutes les fractions rationnelles comprises entre 0 et 1.

Finalement, Bolzano montre par un argument de similitude — qui, bien que bien établi est un argument géométrique — que

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}$$

est déterminé par les valeurs de

$$\frac{f(x+m\Delta x)-fx}{m\Delta x}, \quad m \text{ fraction entre 0 et 1.}$$

5.2 Le passage à la limite

Je cite le premier point crucial de la démonstration :

Comme toutes ces considérations sont vraies aussi petit qu'on veuille prendre Δx ; et comme dans ce cas la valeur de $\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}$ s'approche autant qu'on le veut de la valeur $\frac{dFx}{dx}$, et que de même les valeurs contenues dans la forme $\frac{f(x+m\Delta x)-fx}{m\Delta x}$ s'approchent autant qu'on veut de la valeur $\frac{dfx}{dx}$: il est clair que la grandeur que devient $\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}$ pour $\Delta x=0$, c'est-à-dire $\frac{dFx}{dx}$, est uniquement déterminée par la grandeur que deviennent les fonctions $\frac{f(x+m\Delta x)-fx}{m\Delta x}$ pour $\Delta x=0$, c'est-à-dire $\frac{dfx}{dx}$.

Ainsi, Bolzano admet donc que le lien de causalité étudié subsiste par passage à la limite des deux entités mises en relation. Cela est clair pour lui, il ne l'explicite donc pas.

5.3 Le lien entre les lignes droites et les lignes courbes

À présent, Bolzano développe une nouvelle fois son argumentaire étiologique pour dériver la formule de la longueur d'une courbe de celle d'une droite. En effet, soit $y = \phi x$ l'équation d'une quelque autre courbe et Φx la fonction de sa longueur.

> Alors Fx et Φx désignent des choses de même espèce, des longueurs de lignes ; et comme on sait que toute la nature d'une ligne, donc aussi sa longueur, est déterminée par son équation, il existe aussi une loi uniforme selon laquelle les fonctions Fx et Φx peuvent être dérivées des fonctions fx et ϕx. Selon ce qui vient d'être démontré, les fonctions $\frac{dFx}{dx}$ et $\frac{d\Phi x}{dx}$ sont uniquement déterminées par les valeurs des fonctions $\frac{dfx}{dx}$ et $\frac{d\phi x}{dx}$, et ce de manière totalement indépendante de leur constitution intérieure.

Finalement, Bolzano conclut que « $\frac{dFx}{dx}$ doit être composé de $\frac{dfx}{dx}$ comme $\frac{d\Phi x}{dx}$ de $\frac{d\phi x}{dx}$. » Cela veut dire qu'il suppose à présent que le lien de détermination établi s'exprime en fait comme un lien mathématique, et que de détermination égale, on peut déduire une composition égale des formules mathématiques.

Or si on a $\phi x = \alpha + \beta x$, on sait que $\frac{d\phi x}{dx} = \beta$ et que

$$\frac{d\Phi x}{dx} = \sqrt{1+\beta^2} = \sqrt{1+\left(\frac{d\phi x}{dx}\right)^2}.$$

Bolzano en conclut finalement qu'aussi

$$\frac{dFx}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dfx}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

« la formule connue pour la longueur d'une ligne de simple courbure. »

6 La réception du texte de Bolzano

La *Leipziger Literatur-Zeitung* a publié un long compte rendu du traité au moment de sa parution. Il n'est pas signé mais témoigne d'une connaissance des concepts à l'œuvre dans les *Trois problèmes*.

Le rédacteur du compte rendu reprend d'abord le contenu du traité et passe en revue les critiques de Bolzano au sujet du statut des principes d'Archimède, de l'usage de l'infiniment petit et des concepts accessoires. Après avoir présenté au lecteur d'abord les définitions de Bolzano du « Raumding » (objet spatial) et de la longueur, puis quelques conséquences immédiates de ces définitions, il termine par une exposition de sa démonstration de la formule de rectification et en fait une critique.

6.1 Corde et tangente

La notion d'infiniment petit n'est pas toujours bien maîtrisée au tout début du 19e siècle et les critiques de Bolzano sont souvent pertinentes. Mais le rédacteur du compte rendu l'épingle lorsqu'il pose la question suivante aux géomètres qui le précèdent :

> Pourquoi la longueur d'un arc infiniment petit coïncide-t-elle seulement avec la longueur de la ligne droite, délimitée par les mêmes ordonnées que lui, lorsqu'elle a la direction de la corde ou tangente, et non lorsqu'elle coupe les ordonnées sous tout autre angle ?

En effet, déjà Leibniz aurait déclaré que cette question n'était pas pertinente : « ils ne comprennent pas le fondement de ce calcul. » Pourtant, le souci de Bolzano est peut-être ici plus la hiérarchie des propositions que leur vérité.

6.2 Les concepts accessoires

Alors que Bolzano veut éliminer tout concept accessoire des démonstrations réellement scientifiques, parce qu'ils interviennent non par nécessité, mais de manière aléatoire, l'auteur du compte rendu lui réplique que dans ce cas, même les *Élements* ne seraient pas réellement scientifiques. En effet, il cite, comme exemple parmi d'autres, la démonstration par Euclide du fait que la somme des angles d'un triangle donne un angle plat : or celle-ci fait intervenir le concept accessoire de la droite parallèle à la base du triangle passant par son sommet !

Le rédacteur de la *Leipziger Literatur-Zeitung* se moque alors de « l'esprit pénétrant et subtil de l'auteur » : ainsi, « l'enchantement de 2000 ans, qui nous laissait entrevoir dans les démonstrations d'Archimède la plus parfaite des productions de l'entendement humain, est rompu. » Il réplique : « chez Euclide, et particulièrement chez Appolonius, on trouve constamment le contraire, comme de toute manière chez tous les géomètres qui croyaient, dans leur folie aveugle, comprendre ce qu'est un exposé scientifique. »

6.3 Analyse de la démonstration de Bolzano

Le rédacteur de la *Leipziger Literatur-Zeitung* décèle trois étapes dans la démonstration de Bolzano. Nous suivons ces étapes et les commentons.

6.3.1 $\dfrac{dFx}{dx}$ est déterminé par $\dfrac{dfx}{dx}$

Le rédacteur prétend que l'usage que fait Bolzano de la similitude dans cette étape n'est pas mathématique et inadmissible. Il remarque de plus qu'il entreprend en dernier lieu un passage à la limite, ce qu'il voulait pourtant éviter.

6.3.2 Cette détermination s'exprime par une loi uniforme

Selon le rédacteur, cela paraît beaucoup moins mathématique ques les hypothèses d'Archimède ! « L'auteur aurait tout aussi bien pu supposer d'avance que $\frac{dFx}{dx}$ doive se déduire de $\frac{dfx}{dx}$ par telle loi générale. »

6.3.3 Cette loi est caractérisée par son application à la droite

Bolzano prétend sans le démontrer que le comportement de la formule de la rectification des courbes s'observe entièrement sur le cas des droites. Le rédacteur remarque justement que le cas de la ligne droite pourrait ne donner que le cas particulier d'une autre formule plus générale.

6.4 Conclusions

Finalement, écrit le rédacteur,

> Toute la chose se désintègre en un rien, et il aurait estimé avoir mal employé son temps et ses forces à l'examen de cet écrit qui selon son jugement ne contient rien d'utile pour la science, s'il n'était pas utile aussi de révéler les erreurs des uns et d'en préserver les autres.

Le rédacteur ose ouvertement prétendre que « l'auteur ne connaît pas l'essence d'une démonstration mathématique et la différence entre connaissance philosophique et mathématique que Kant a si bien et si justement dite. »

7 Conclusion

La seule ressemblance entre la démonstration de Lagrange et celle de Bolzano est que tous les deux n'ont besoin de calculer que la longueur d'un segment de droite pour en conclure la longueur de n'importe quel arc de courbe !

Références

[1] Bernard Bolzano. Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst ; zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt. Dans Jan Vojtěch, éditeur, *Œuvres de Bernard Bolzano*, volume 5, pages 67–138. Société royale des lettres et des sciences de Bohême, 1948.

[2] Bernard Bolzano. Miscellanea mathematica. Dans *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe*. Friedrich Frommann Verlag, 1976–.

[3] J. B. Dubourguet. *Traités élémentaires du calcul différentiel et du calcul intégral, indépendants de toutes notions de quantités infinitésimales et de limites*. Paris, 1810.

[4] Thomas L. HEATH, éditeur. *The works of Archimedes.* Cambridge, 1897.

[5] Sylvestre François LACROIX. Éléments de géométrie. Dans *Cours de mathématiques à l'usage de l'école centrale des quatre-nations.* 1803.

[6] Joseph Louis LAGRANGE. *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*, pages 241–244. Courcier, 1813.

[7] Adrien Marie LEGENDRE. *Éléments de géométrie, avec des notes*, pages 115–116. Firmin Didot, 1823.

[8] Eduard WINTER. Bernard Bolzano, ein Lebensbild. Dans *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe.* Friedrich Frommann Verlag, 1969.