Introduction du mémoire de thèse

Stefan Neuwirth

1 Position du problème

Cette thèse se situe au croisement de l'analyse fonctionnelle et de l'analyse harmonique. Nous allons donner des éléments de réponse à la question générale suivante.

Question 1.1 Quelle est la validité de la représentation

$$f \sim \sum \varrho_q \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_q} \, \mathrm{e}_q \tag{1}$$

de la fonction f comme série de fréquences e_q d'intensité ϱ_q et de phase ϑ_q ?

Les réponses seront donnés en termes de l'espace de fonctions $X \ni f$ et du spectre $E \supseteq \{q : \varrho_q > 0\}$.

1.1 Chapitre 1

Considérons par exemple les deux questions classiques suivantes dans le cadre des espaces de Banach homogènes de fonctions sur le tore $\mathbb{T}$, des fréquences de Fourier $\mathrm{e}_q(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}qt}$ et des coefficients de Fourier

$$\varrho_q \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_q} = \int \mathrm{e}_{-q} \, f = \widehat{f}(q).$$

Question 1.1.1 Est-ce que pour les fonctions $f \in X$ à spectre dans E

$$\Big\| f - \sum_{|q| \le n} \varrho_q \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_q} \, \mathrm{e}_q \Big\|_X \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \ ?$$

Cela revient à demander: est-ce que la suite $\{\mathrm{e}_q\}_{q \in E}$ rangée par valeur absolue $|q|$ croissante est une base de X_E ? En d'autres termes, la suite des multiplicateurs idempotents relatifs $T_n : X_E \to X_E$ définie par

$$T_n \, \mathrm{e}_q = \begin{cases} \mathrm{e}_q & \text{si } |q| \le n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle uniformément bornée sur n ? Soit $E = \mathbb{Z}$. Un élément de réponse classique est le suivant.

$$\|T_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{T}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{T})} = 1 \ , \ \|T_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{T}) \to \mathrm{L}^1(\mathbb{T})} = \|T_n\|_{\mathcal{C}(\mathbb{T}) \to \mathcal{C}(\mathbb{T})} \asymp \log n.$$

On sait de plus que les T_n sont aussi uniformément bornés sur $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$.

Question 1.1.2 Est-ce que la somme de la série $\sum \varrho_q \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_q} \, \mathrm{e}_q$ dépend de l'ordre dans lequel on somme les fréquences ? Cette question est équivalente à la suivante: la nature de $\sum \varrho_q \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_q} \, \mathrm{e}_q$ dépend-elle des phases ϑ_q ? En termes fonctionnels, $\{\mathrm{e}_q\}_{q \in E}$ forme-t-elle une suite basique inconditionnelle dans X ? Cette question s'énonce aussi en termes de multiplicateurs relatifs: la famille des $T_\epsilon : X_E \to X_E$ avec

$$T_\epsilon \, \mathrm{e}_q = \epsilon_q \, \mathrm{e}_q \ \text{ et } \epsilon_q = \pm 1$$

est-elle uniformément bornée sur les choix de signes ϵ ? Un élément de réponse classique est le suivant. Soit $E = \mathbb{Z}$. Alors

$$\|T_\epsilon\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{T})\to\mathrm{L}^2(\mathbb{T})} = 1;$$

si $p \neq 2$, il existe un choix de signes ϵ tel que T_ϵ n'est pas borné sur $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$.

Question 1.1.3 Peut-on améliorer ce phénomène en restreignant le spectre E ? Cette question mène à l'étude des sous-ensembles lacunaires de $\mathbb{Z}$, et a été traitée en détail par Walter Rudin.

Nous choisissons la notion de multiplicateur relatif comme dictionnaire entre l'analyse harmonique et l'analyse fonctionnelle. Nous développons une technique pour le calcul de la norme de familles $\{T_\epsilon\}$ de multiplicateurs relatifs. Celle-ci nous permet de traiter les questions suivantes.

Question 1.1.4 Est-ce que la norme de $f \in X_E$ dépend seulement de l'intensité ϱ_q de ses fréquences e_q, et non pas de leur phase ϑ_q ? Cela revient à demander si $\{\mathrm{e}_q\}_{q\in E}$ est une suite basique 1-inconditionnelle complexe dans X.

Question 1.1.5 Est-ce que l'on a pour tout choix de signes "réel" $\pm$

$$\Big\|\sum_{q\in E} \pm a_q\,\mathrm{e}_q\Big\|_X = \Big\|\sum_{q\in E} a_q\,\mathrm{e}_q\Big\|_X \ ?$$

En d'autres mots, est-ce que $\{\mathrm{e}_q\}_{q\in E}$ est une suite basique 1-inconditionnelle réelle dans X ?

La réponse est décevante dans le cas des espaces $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, p non entier pair: seules les fonctions dont le spectre a au plus deux éléments vérifient ces deux propriétés. Pour mieux cerner le phénomène, nous proposons d'introduire la question presqu'isométrique suivante.

Question 1.1.6 Est-ce que la norme de $f \in X_E$ dépend arbitrairement peu de la phase ϑ_q de ses fréquences e_q ? De manière précise, dans quel cas existe-t-il, pour chaque $\varepsilon > 0$, un sous-ensemble $F \subseteq E$ fini tel que

$$\Big\|\sum_{q\in E\setminus F} \varrho_q\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_q}\,\mathrm{e}_q\Big\|_X \le (1+\varepsilon)\Big\|\sum_{q\in E\setminus F} \varrho_q\,\mathrm{e}_q\Big\|_X \ ?$$

Dans le cas $X = \mathcal{C}(\mathbb{T})$, cela signifiera que E est un ensemble de constante de Sidon "asymptotiquement 1". De même, peut-on choisir pour chaque $\varepsilon > 0$ un ensemble fini F tel que pour tout choix de signe "réel" $\pm$

$$\Big\|\sum_{q\in E\setminus F} \pm a_q\,\mathrm{e}_q\Big\|_X \le (1+\varepsilon)\Big\|\sum_{q\in E\setminus F} a_q\,\mathrm{e}_q\Big\|_X \ ?$$

Toutes ces questions s'agrègent autour d'un fait bien connu: sommer la série de Fourier de f est une très mauvaise manière d'approcher la fonction f dès que l'erreur considérée n'est pas quadratique. On sait qu'il est alors utile de rechercher des méthodes de sommation plus lisses, c'est-à-dire d'autres suites approximantes plus régulières. Il s'agit là de suites d'opérateurs de rang fini sur X_E qui approchent ponctuellement l'identité de X_E. Nous pourrons toujours supposer que ces opérateurs sont des multiplicateurs. Une première question est la suivante.

Question 1.1.7 Existe-t-il une suite approximante $\{T_n\}$ de multiplicateurs idempotents ? Cela revient à demander: existe-t-il une décomposition de X_E en sous-espaces X_{E_k} de dimension finie avec

$$X_E = \bigoplus X_{E_k} \quad \text{et} \quad A_k : X_E \to X_{E_k}\ ,\ \mathrm{e}_q \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}_q & \text{si } q \in E_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

telle que la suite des $T_n = A_1 + \ldots + A_n$ est uniformément bornée sur n ? Soit $E = \mathbb{Z}$. Alors la réponse est identique à la réponse de la question 1.1.1.

Mais nous pouvons produire dans ce cadre plus général des décompositions inconditionnelles de X_E en réponse à la question suivante.

Question 1.1.8 Pour quels espaces X et spectres E existe-t-il une décomposition comme ci-dessus telle que la famille des multiplicateurs

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k A_k \quad \text{avec } n \geq 1 \text{ et } \epsilon_k = \pm 1 \tag{3}$$

est uniformément bornée ? Littlewood et Paley ont montré que la partition de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} = \bigcup E_k$ avec $E_0 = \{0\}$ et $E_k = \{j : 2^{k-1} \leq |j| < 2^k\}$ donne une décomposition inconditionnelle des espaces $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ avec $1 < p < \infty$. D'après la réponse à la question 1.1.7, ce n'est pas le cas *a fortiori* des espaces $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ et $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Une étude fine de telles partitions a été entreprise par Kathryn Hare et Ivo Klemes.

Notre technique permet de traiter la question suivante.

Question 1.1.9 Pour quels espaces X et spectres E existe-t-il une décomposition du type (2) telle que

$$\left\| \sum \epsilon_k A_k f \right\|_X = \|f\|_X \text{ pour tout choix de signes } \epsilon_k \text{ ?}$$

La réponse dépendra de la nature du choix de signes, qui peut être réel ou complexe.

Il est instructif de noter que l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{T})$ n'admet pas de décomposition du type (2). $H^1(\mathbb{T})$ admet néanmoins des suites approximantes de multiplicateurs et il existe même des suites approximantes de multiplicateurs inconditionnelles au sens où la famille (3) est uniformémemt bornée. Cela motive la question suivante, qui est la plus générale dans notre contexte.

Question 1.1.10 Quels sont les espaces X et spectres E tels que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une suite approximante $\{T_n\}$ sur X_E telle que

$$\sup_{\text{signes } \epsilon_n} \left\| \sum \epsilon_n (T_n - T_{n-1}) \right\|_X \leq 1 + \varepsilon$$

En termes fonctionnels, X_E a-t-il la propriété d'approximation inconditionnelle métrique ? Il faudra distinguer le cas des signes complexes et réels.

1.2 Chapitre 2

Nous montrons que notre technique de calcul s'applique *mutatis mutandis* aux multiplicateurs de Schur. La représentation (1) est alors la représentation matricielle: on note $\mathrm{e}_q = \mathrm{e}_{rc}$ l'entrée de matrice en $q = (r, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, c'est-à-dire l'opérateur sur ℓ_2 qui envoie son $c$ième vecteur de base sur son $r$ième vecteur de base et de matrice $(\delta_k^r \delta_l^c)_{k,l \geq 0}$. On considère donc la validité de

$$x \sim \sum \varrho_q \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_q} \, \mathrm{e}_q \text{ avec les coefficients de matrice } x_q = \varrho_q \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_q} = \operatorname{tr} \mathrm{e}_q^* \, x$$

pour x opérateur sur ℓ_2. Soit $p \geq 1$ et $I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Notre étude se fera en termes de la classe de Schatten S^p de x et du support I de la matrice (x_q) associée à x. Nous dirons que x est à entrées dans I si $I \supseteq \{q : x_q \neq 0\}$.

Question 1.2.1 Est-ce que la norme de $x \in S^p$ à entrées dans I dépend seulement du module ϱ_q de ses coefficients de matrice et non pas de leur argument ϑ_q ? Cela revient à demander: quelles sont les suites basiques d'entrées 1-inconditionnelles dans S^p ? En termes de multiplicateurs de Schur, la question se pose ainsi. Pour quels ensembles d'entrées I les

$$T_\epsilon : S_I^p \to S_I^p \ , \ \mathrm{e}_q \mapsto \epsilon_q \, \mathrm{e}_q \quad \text{avec } |\epsilon_q| = 1$$

sont-ils tous des isométries ?

1.3 Chapitre 3

Nous étudions le rapport entre la croissance d'une suite $\{n_k\} = E \subseteq \mathbb{Z}$ et deux de ses propriétés harmoniques et fonctionnelles éventuelles, *i. e.*
- toute fonction intégrable à spectre dans E est en fait p-intégrable pour tout $p < \infty$: E est un ensemble $\Lambda(p)$ pour tout p;
- toute fonction mesurable bornée à spectre dans E est en fait continue à un ensemble de mesure nulle près: E est un ensemble de Rosenthal.

Nous sommes en mesure de dresser le tableau suivant selon la croissance
- polynômiale: $n_k \preccurlyeq k^d$ pour un $d < \infty$,
- surpolynômiale: $n_k \gg k^d$ pour tout $d \geq 1$,
- sous-exponentielle: $\log n_k \ll k$,
- géométrique: $\liminf |n_{k+1}/n_k| > 1$.

croissance	polynômiale	surpolynômiale&sous-exponentielle	géométrique
E $\Lambda(p)$ $\forall p$	non	presque toujours	oui
E Rosenthal	presque jamais		oui

Tableau 1.3.1

Li montre qu'effectivement il existe un ensemble $\Lambda(p)$ pour tout p qui n'est pas de Rosenthal. Nous traitons les deux questions suivantes.

Question 1.3.2 Le schéma ci-dessus reste-t-il valable si on considère à la place de l'ensemble des sous-ensembles E de $\mathbb{Z}$ l'ensemble des sous-ensembles E d'une suite à croissance polynômiale ?

Question 1.3.3 Si E n'est pas un ensemble de Rosenthal, E contient-il un ensemble à la fois $\Lambda(p)$ pour tout p et non Rosenthal ?

2 Inconditionnalité métrique en analyse de Fourier

Nous répondons dans ce chapitre aux questions 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6, 1.1.9 et 1.1.10.

Comme ces questions distinguent les choix de signe réel et complexe, nous proposons pour la fluidité de l'exposé de fixer un choix de signes $\mathbb{S}$ qui sera $\mathbb{S} = \mathbb{T} = \{\epsilon \in \mathbb{C} : |\epsilon| = 1\}$ dans le cas complexe et $\mathbb{S} = \mathbb{D} = \{-1, 1\}$ dans le cas réel.

2.1 Propriété d'approximation inconditionnelle métrique

Seule la question 1.1.10 n'impose pas au préalable de forme particulière à la suite de multiplicateurs qui est censée réaliser la propriété considérée. Afin d'établir un lien entre la (*umap*) et la structure du spectre E, nous faisons le détour par une étude générale de cette propriété dans le cadre des espaces de Banach séparables.

2.1.1 Amorce et queue d'un espace de Banach

Peter G. Casazza et Nigel J. Kalton ont découvert le critère suivant:

Proposition 2.1.1 *Soit X un espace de Banach séparable. X a la (umap) si et seulement s'il existe une suite approximante $\{T_k\}$ telle que*

$$\sup_{\epsilon \in \mathbb{S}} \|T_k + \epsilon(\mathrm{Id} - T_k)\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$$

Ceci exprime que la constante d'inconditionnalité entre l'amorce $T_k X$ et la queue $(\mathrm{Id} - T_k)X$ de l'espace X s'améliore asymptotiquement jusqu'à l'optimum pour $k \to \infty$.

La (*umap*) s'exprime de manière plus élémentaire encore si l'on choisit d'autres notions adaptées d'amorce et de queue. Nous proposons en particulier la définition suivante.

Définition 2.1.2 *Soit τ une topologie d'espace vectoriel topologique sur X. X a la propriété $(u(\tau))$ de τ-inconditionnalité si pour chaque $x \in X$ et toute suite bornée $\{y_j\}$ τ-nulle l'oscillation*

$$\operatorname*{osc}_{\epsilon\in\mathbb{S}} \|x+\epsilon y_j\|_X = \sup_{\delta,\epsilon\in\mathbb{S}} \big(\|x+\epsilon y_j\| - \|x+\delta y_j\|\big)$$

forme elle-même une suite nulle.

Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 2.1.3 *Soit X un espace de Banach séparable de cotype fini avec la propriété $(u(\tau))$. Si X admet une suite approximante $\{T_k\}$ inconditionnelle et commutative telle que $T_k x \xrightarrow{\tau} x$ uniformément sur la boule unité B_X, alors des combinaisons convexes successives $\{U_j\}$ de $\{T_k\}$ réalisent la (umap).*

Esquisse de preuve. On construit ces combinaisons convexes successives par le biais de décompositions skipped blocking. En effet, la propriété $(u(\tau))$ a l'effet suivant sur $\{T_k\}$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite $\{S_k = T_{n_k}\}$ telle que toute suite de blocs $S_{b_k} - S_{a_k}$ obtenue en sautant les blocs $S_{a_{k+1}} - S_{b_k}$ se somme de manière $(1+\varepsilon)$-inconditionnelle.
Soit $n \geq 1$. Pour chaque j, $1 \leq j \leq n$, la suite de blocs obtenue en sautant $S_{kn+j} - S_{kn+j-1}$ pour $k \geq 0$ est $(1+\varepsilon)$-inconditionnelle. Il s'agit alors d'estimer la moyenne sur j de ces suites de blocs. On obtient une suite approximante et l'hypothèse de cotype fini permet de contrôler l'apport des blocs sautés.
Alors X a la (*umap*) parce que n et ε sont arbitraires. ■

2.1.2 Amorce et queue en termes de spectre de Fourier

Lorsqu'on considère l'espace invariant par translation X_E, une amorce et une queue naturelle sont les espaces X_F et $X_{E\setminus G}$ pour F et G des sous-ensembles finis de E. Nous avons concrètement le lemme suivant.

Lemme 2.1.4 *X_E a $(u(\tau_f))$, où τ_f est la topologie*

$$f_n \xrightarrow{\tau_f} 0 \iff \forall k\ \widehat{f_n}(k) \to 0$$

de convergence simple des coefficients de Fourier, si et seulement si E est bloc-inconditionnel dans X au sens suivant: quels que soient $\varepsilon > 0$ et $F \subseteq E$ fini, il existe $G \subseteq E$ fini tel que pour $f \in B_{X_F}$ et $g \in B_{X_{E\setminus G}}$

$$\operatorname*{osc}_{\epsilon\in\mathbb{S}} \|f+\epsilon g\|_X = \sup_{\delta,\epsilon\in\mathbb{S}} \big(\|f+\epsilon g\| - \|f+\delta g\|\big) \leq \varepsilon.$$

Le théorème 2.1.3 s'énonce donc ainsi dans ce contexte particulier.

Théorème 2.1.5 *Soit $E \subseteq \mathbb{Z}$ et X un espace de Banach homogène de fonctions sur le tore $\mathbb{T}$. Si X_E a la (umap), alors E est bloc-inconditionnel dans X. Inversement, si E est bloc-inconditionnel dans X et de plus X_E a la propriété d'approximation inconditionnelle et un cotype fini, alors X_E a la (umap). En particulier, on a*
(i) *Soit $1 < p < \infty$. $\mathrm{L}^p_E(\mathbb{T})$ a la (umap) si et seulement si E est bloc-inconditionnel dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$.*
(ii) *$\mathrm{L}^1_E(\mathbb{T})$ a la (umap) si et seulement si $\mathrm{L}^1_E(\mathbb{T})$ a la propriété d'approximation inconditionnelle et E est bloc-inconditionnel dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$.*
(iii) *Si E est bloc-inconditionnel dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et E est un ensemble de Sidon, alors $\mathcal{C}_E(\mathbb{T})$ a la (umap).*

Donnons une application de ce théorème.

Proposition 2.1.6 *Soit $E = \{n_k\} \subseteq \mathbb{Z}$. Si n_{k+1}/n_k est un entier impair pour tout k, alors $\mathcal{C}_E(\mathbb{T})$ a la (umap) réelle.*

Preuve. Comme E est nécessairement un ensemble de Sidon, il suffit de vérifier que E est bloc-inconditionnel. Soient $\varepsilon > 0$ et $F \subseteq E \cap [-n, n]$. Soit l tel que $|n_l| \geq \pi n/\varepsilon$ et $G = \{n_1, \ldots, n_{l-1}\}$. Soit $f \in B_{\mathcal{C}_F}$ et $g \in B_{\mathcal{C}_{E \setminus G}}$. Alors $g(t + \pi/n_l) = -g(t)$ par hypothèse et

$$|f(t + \pi/n_l) - f(t)| \leq \pi/|n_l| \cdot \|f'\|_\infty \leq \pi n/|n_l| \leq \varepsilon$$

par l'inégalité de Bernstein. Alors, pour un certain $u \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} \|f - g\|_\infty &= |f(u) + g(u + \pi/n_l)| \\ &\leq |f(u + \pi/n_l) + g(u + \pi/n_l)| + \varepsilon \\ &\leq \|f + g\|_\infty + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc E est bloc-inconditionnel au sens réel. ■

En particulier, soit la suite géométrique $G = \{3^k\}$. Alors $\mathcal{C}_G(\mathbb{T})$ et $\mathcal{C}_{G \cup -G}(\mathbb{T})$ ont la (*umap*) réelle.

Question 2.1.7 Qu'en est-il de la (*umap*) complexe et qu'en est-il de la suite géométrique $G = \{2^k\}$?

2.2 Norme de multiplicateurs et conditions combinatoires

Nous proposons ici une méthode uniforme pour répondre aux questions 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6, 1.1.9 et 1.1.10. En effet, les questions 1.1.4, 1.1.5 et 1.1.6 reviennent à évaluer l'oscillation de la norme

$$\Theta(\epsilon, a) = \|\epsilon_0 a_0 \,\mathrm{e}_{r_0} + \ldots + \epsilon_m a_m \,\mathrm{e}_{r_m}\|_X.$$

La question 1.1.9 revient à évaluer l'oscillation de la norme

$$\begin{aligned} \Psi(\epsilon, a) &= \Theta((\overbrace{1, \ldots, 1}^{j}, \overbrace{\epsilon, \ldots, \epsilon}^{m-j}), a) \\ &= \|a_0 \,\mathrm{e}_{r_0} + \ldots + a_j \,\mathrm{e}_{r_j} + \epsilon a_{j+1} \,\mathrm{e}_{r_{j+1}} + \ldots + \epsilon a_m \,\mathrm{e}_{r_m}\|_X \end{aligned}$$

Par le théorème 2.1.5, la question 1.1.10 revient à étudier cette même expression dans le cas particulier où on fait un saut de grandeur arbitraire entre r_j et r_{j+1}. Dans le cas des espaces $X = \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, p entier pair, ces normes sont des polynômes en ϵ, ϵ^{-1}, a et $\bar{a}$. Dans le cas des espaces $X = \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, p non entier pair, elles s'expriment comme des séries. Il n'y a pas moyen d'exprimer ces normes comme fonction $\mathcal{C}^\infty$ pour $X = \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Soit $X = \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$. Développons $\Theta(\epsilon, a)$. Posons $q_i = r_i - r_0$. On peut supposer $\epsilon_0 = 1$ et $a_0 = 1$. Nous utilisons la notation suivante:

$$\binom{x}{\alpha} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots} \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ tel que } \sum \alpha_i = n$$

Alors, si $|a_1|, \ldots, |a_m| < 1/m$ lorsque p n'est pas un entier pair et sans restriction sinon,

$$\Theta(\epsilon, a) = \int \left| \sum_{n \geq 0} \binom{p/2}{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i a_i \,\mathrm{e}_{q_i} \right)^n \right|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \Big| \sum_{n\geq 0} \binom{p/2}{n} \sum_{\substack{\alpha:\alpha_1,\ldots,\alpha_m\geq 0\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_m=n}} \binom{n}{\alpha} \epsilon^\alpha a^\alpha \, \mathrm{e}_{\sum \alpha_i q_i} \Big|^2 \\
&= \int \Big| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m} \binom{p/2}{\alpha} \epsilon^\alpha a^\alpha \, \mathrm{e}_{\sum \alpha_i q_i} \Big|^2 \\
&= \sum_{R\in\mathcal{R}} \Big| \sum_{\alpha\in R} \binom{p/2}{\alpha} \epsilon^\alpha a^\alpha \Big|^2 \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m} \binom{p/2}{\alpha}^2 |a|^{2\alpha} + \sum_{\substack{\alpha\neq\beta\in\mathbb{N}^m\\ \alpha\sim\beta}} \binom{p/2}{\alpha}\binom{p/2}{\beta} \epsilon^{\alpha-\beta} a^\alpha \bar{a}^\beta
\end{aligned}
$$

où $\mathcal{R}$ est la partition de $\mathbb{N}^m$ induite par la relation d'équivalence

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \sum \alpha_i q_i = \sum \beta_i q_i.$$

Nous pouvons répondre immédiatement aux questions 1.1.4 et 1.1.5 pour $X = \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$.

2.2.1 Question 1.1.4: suites basiques 1-inconditionnelles complexes

Soient $r_0, \ldots r_m$ sont choisis dans E, alors (4) doit être constante pour $a \in \{|z| < 1/m\}^m$ et $\epsilon \in \mathbb{T}^m$. Cela veut dire que pour tous $\alpha \neq \beta \in \mathbb{N}^m$,

$$\sum \alpha_i q_i \neq \sum \beta_i q_i \quad \text{ou} \quad \binom{p/2}{\alpha}\binom{p/2}{\beta} = 0.$$

■ Si p n'est pas un entier pair, alors $\binom{p/2}{\alpha}\binom{p/2}{\beta} \neq 0$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$ et on a les relations arithmétiques suivantes sur $q_1, q_2, 0$:

$$
\begin{aligned}
\overbrace{q_1 + \ldots + q_1}^{|q_2|} &= \overbrace{q_2 + \ldots + q_2}^{|q_1|} && \text{si } q_1 q_2 > 0; \\
\overbrace{q_1 + \ldots + q_1}^{|q_2|} + \overbrace{q_2 + \ldots + q_2}^{|q_1|} &= 0 && \text{sinon.}
\end{aligned}
$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = (|q_2|, 0, \ldots)$, $\beta = (|q_1|, 0, \ldots)$ et $\alpha = (|q_2|, |q_1|, 0, \ldots)$, $\beta = (0, \ldots)$ respectivement pour conclure que $\{r_0, r_1, r_2\}$ n'est pas une suite basique 1-inconditionnelle complexe dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ si p n'est pas un entier pair.

■ Si p est un entier pair, $\binom{p/2}{\alpha}\binom{p/2}{\beta} = 0$ si et seulement si

$$\sum \alpha_i > p/2 \quad \text{ou} \quad \sum \beta_i > p/2.$$

On obtient que E est une suite basique 1-inconditionnelle dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ si et seulement si E est "p-indépendant", c'est-à-dire que $\sum \alpha_i(r_i - r_0) \neq \sum \beta_i(r_i - r_0)$ pour tous $r_0, \ldots, r_m \in E$ et $\alpha \neq \beta \in \mathbb{N}^m$ tels que $\sum \alpha_i, \sum \beta_i \leq p/2$. Cette condition est équivalente à: tout entier $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit de manière au plus unique comme somme de $p/2$ éléments de E.

2.2.2 Question 1.1.5: suites basiques 1-inconditionnelles réelles

Les suites basiques 1-inconditionnelles réelles et complexes coïncident et la réponse à la question 1.1.5 est identique à la réponse à la question 1.1.4. En effet, dès qu'une relation arithmétique $\sum(\alpha_i - \beta_i) q_i$ pèse sur E, on peut supposer que $\alpha_i - \beta_i$

est impair pour au moins un i en simplifiant la relation par le plus grand diviseur commun des $\alpha_i - \beta_i$. Mais alors (4) n'est pas une fonction constante pour ϵ_i réel.

Cette propriété est propre au tore $\mathbb{T}$. En effet, par exemple la suite des fonctions de Rademacher est 1-inconditionnelle réelle dans $\mathcal{C}(\mathbb{D}^\infty)$, alors que sa constante d'inconditionnalité complexe est $\pi/2$.

2.2.3 Question 1.1.6: suites basiques inconditionnelles métriques

On peut même tirer des conséquences utiles du calcul de (4) dans le cas presqu'isométrique. Il faut pour cela prendre la précaution suivante qui permet un passage à la limite. Soit $0 < \varrho < 1/m$. Alors

$$\big\{\Theta\colon \mathbb{S}^m \times \{|z| \le \varrho\}^m \to \mathbb{R}^+ : q_1, \dots, q_m \in \mathbb{Z}^m\big\}$$

est un sous-ensemble relativement compact de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^m \times \{|z| \le \varrho\}^m)$. Il en découle que si E est une suite basique inconditionnelle métrique, alors certains coefficients de (4) deviennent arbitrairement petits lorsque $q_1, \dots, q_m$ sont choisis grands.

Donnons deux conséquences de ce raisonnement.

Proposition 2.2.1 *Soit $E \subseteq \mathbb{Z}$.*
(i) *Soit p un entier pair. Si E est une suite basique inconditionnelle métrique réelle, alors E est en fait une suite basique 1-inconditionnelle complexe à un ensemble fini près.*
(ii) *Si E est un ensemble de Sidon de constante asymptotiquement 1, alors*

$$\langle \zeta, E\rangle = \sup_{G \subseteq E \text{ fini}} \inf\big\{|\zeta_1 p_1 + \ldots + \zeta_m p_m| : p_1, \dots, p_m \in E \setminus G \textit{ distincts}\big\} > 0$$

pour tout $m \ge 1$ et $\zeta \in \mathbb{Z}^{*m}$.

On peut exprimer cette dernière propriété en disant que la relation arithmétique ζ ne persiste pas sur E.

2.2.4 Question 1.1.10: propriété d'approximation inconditionnelle métrique

On peut appliquer la technique du paragraphe précédent en observant que si X_E a la (*umap*), alors

$$\operatorname*{osc}_{\epsilon \in \mathbb{S}} \Psi(\epsilon, a) \xrightarrow[r_{j+1}, \dots, r_m \in E \to \infty]{} 0.$$

Définition 2.2.2 *E a la propriété $(\mathfrak{I}_n)$ de bloc-indépendance si pour tout $F \subseteq E$ fini il existe $G \subseteq E$ fini tel que si un $k \in \mathbb{Z}$ admet deux représentations comme somme de n éléments de $F \cup (E \setminus G)$*

$$p_1 + \ldots + p_n = k = p'_1 + \ldots + p'_n,$$

alors

$$\big|\{j : p_j \in F\}\big| \quad et \quad \big|\{j : p'_j \in F\}\big|$$

sont égaux (choix de signes complexe $\mathbb{S} = \mathbb{T}$) ou de même parité (choix de signes réel $\mathbb{S} = \mathbb{D}$).

Théorème 2.2.3 *Soit $E \subseteq \mathbb{Z}$.*
(i) *Si $X = \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, p entier pair, alors $\mathrm{L}^p_E(\mathbb{T})$ a la (umap) si et seulement si E satisfait $(\mathfrak{I}_{p/2})$.*

(ii) *Si $X = \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, p non entier pair, ou $X = \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors X_E a la (umap) seulement si E satisfait*

$$\langle\zeta, E\rangle = \sup_{G\subseteq E \text{ fini}} \inf\bigl\{|\zeta_1 p_1 + \ldots + \zeta_m p_m| : p_1, \ldots, p_m \in E \setminus G \textit{ distincts}\bigr\} > 0$$

pour tout $m \geq 1$ et $\zeta \in \mathbb{Z}^{*m}$ tel que $\sum \zeta_i$ est non nul (cas complexe) ou impair (cas réel).

On obtient la hiérarchie suivante.

$\mathcal{C}_E(\mathbb{T})$ a (*umap*)	$\Rightarrow$	$\mathrm{L}^p_E(\mathbb{T})$ a (*umap*), p non entier pair	$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$	$\mathrm{L}^{2n+2}_E(\mathbb{T})$ a (*umap*)	$\Rightarrow$	$\mathrm{L}^{2n}_E(\mathbb{T})$ a (*umap*)	$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$	$\mathrm{L}^2_E(\mathbb{T})$ a (*umap*).

Nous pouvons répondre à la question 2.1.7. Soit $G = \{j^k\}$ avec $j \in \mathbb{Z}\setminus\{-1, 0, 1\}$ et considérons $\zeta = (j, -1)$. Alors $\langle\zeta, G\rangle = 0$. Donc $\mathcal{C}_G(\mathbb{T})$ n'a pas la (*umap*) complexe. $\mathcal{C}_G(\mathbb{T})$ n'a pas la (*umap*) réelle si j est pair.

2.2.5 Deux exemples

À l'aide de nos conditions arithmétiques, nous sommes à même de prouver la proposition suivante.

Proposition 2.2.4 *Soit $\sigma > 1$ et E la suite des parties entières de σ^k. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) *σ est un nombre transcendant.*
(ii) *$\mathrm{L}^p_E(\mathbb{T})$ a la (umap) complexe pour tout p entier pair.*
(iii) *E est une suite basique inconditionnelle métrique dans chaque $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, p entier pair.*
(iv) *Pour chaque m donné, la constante de Sidon des sous-ensembles à m éléments de queues de E est asymptotiquement 1.*

Nous obtenons aussi la proposition suivante.

Proposition 2.2.5 *Soit E la suite des bicarrés. $\mathrm{L}^p_E(\mathbb{T})$ a la (umap) réelle seulement si $p = 2$ ou $p = 4$.*

Preuve. E ne satisfait pas la propriété de bloc-indépendance $(\mathcal{J}_3)$ réelle. En effet, Ramanujan a découvert l'égalité suivante pour tout n:

$$(4n^5 - 5n)^4 + (6n^4 - 3)^4 + (4n^4 + 1)^4 = (4n^5 + n)^4 + (2n^4 - 1)^4 + 3^4. \qquad \blacksquare$$

2.3 Impact de la croissance du spectre

Nous démontrons de manière directe le résultat positif suivant.

Théorème 2.3.1 *Soit $E = \{n_k\} \subseteq \mathbb{Z}$ tel que $n_{k+1}/n_k \to \infty$. Alors la suite des projections associée à E réalise la (umap) complexe dans $\mathcal{C}_E(\mathbb{T})$ et E est un ensemble de Sidon de constante asymptotiquement 1. Dans l'hypothèse où les rapports n_{k+1}/n_k sont tous entiers, la réciproque vaut.*

Corollaire 2.3.2 *Alors E est une suite basique inconditionnelle métrique dans tout espace de Banach homogène X de fonctions sur $\mathbb{T}$. De plus, X_E a la (umap) complexe.*

Esquisse de preuve. Nous prouvons concrètement que si $n_{k+1}/n_k \to \infty$, alors quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe $l \geq 1$ tel que pour toute fonction $f = \sum a_k \,\mathrm{e}_{n_k}$

$$\|f\|_\infty \geq (1 - \varepsilon)\Bigl(\Bigl\|\sum_{k\leq l} a_k \,\mathrm{e}_{n_k}\Bigr\|_\infty + \sum_{k>l} |a_k|\Bigr). \qquad (4)$$

Cela revient à dire que la suite $\{\pi_k\}$ de projections associée à la base E réalise la $1/(1-\varepsilon)$-(*uap*). Pour obtenir l'inégalité (4), on utilise une récurrence basée sur l'idée suivante.

Soit $u \in \mathbb{T}$ tel que $\|\pi_k f\|_\infty = |\pi_k f(u)|$. Il existe alors $v \in \mathbb{T}$ tel que

$$|u-v| \leq \pi/|n_{k+1}| \quad \text{et} \quad |\pi_k f(u) + a_{k+1}\, \mathrm{e}_{n_{k+1}}(v)| = \|\pi_k f\|_\infty + |a_{k+1}|.$$

De plus, dans ce cas,

$$|\pi_k f(u) - \pi_k f(v)| \leq |u-v|\, \|\pi_k f'\|_\infty \leq \pi |n_k/n_{k+1}|\, \|\pi_k f\|_\infty.$$

En résumé, $a_{k+1}\, \mathrm{e}_{n_{k+1}}$ a le même argument que $\pi_k f$ très près du maximum de $|\pi_k f|$, et $\pi_k f$ varie peu.

Mais alors

$$\begin{aligned} \|\pi_k f(t) + a_{k+1}\, \mathrm{e}_{n_{k+1}}\|_\infty &\geq |\pi_k f(v) + a_{k+1}\, \mathrm{e}_{n_{k+1}}(v)| \\ &\geq \|\pi_k f\|_\infty + |a_{k+1}| - \pi|n_k/n_{k+1}| \|\pi_k f\|_\infty \\ &= (1 - \pi|n_k/n_{k+1}|)\|\pi_k f\|_\infty + |a_{k+1}|. \end{aligned}$$

On obtient (4) en réitérant cet argument. ■

Notre technique donne d'ailleurs l'estimation suivante de la constante de Sidon des ensembles de Hadamard.

Corollaire 2.3.3 *Soit $E = \{n_k\} \subseteq \mathbb{Z}$ et $q > \sqrt{\pi^2/2+1}$. Si $|n_{k+1}| \geq q|n_k|$, alors la constante de Sidon de E est inférieure ou égale à $1 + \pi^2/(2q^2 - 2 - \pi^2)$.*

Nous prouvons que cette estimation est optimale au sens où l'ensemble $E = \{0, 1, q\}$, $q \geq 2$, a pour constante d'inconditionnalité réelle dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$

$$\big(\cos(\pi/(2q))\big)^{-1} \geq 1 + \pi^2/8\, q^{-2}.$$

3 Suites basiques 1-inconditionnelles d'entrées de matrice

Dans ce chapitre, nous cherchons à répondre à la question 1.2.1. Nous fournissons une réponse complète dans le cas particulier des classes de Schatten S^p avec p entier pair. En effet, la technique présentée dans la section 2.2 peut être transférée du cadre des multiplicateurs de Fourier au cadre des multiplicateurs de Schur. Nous interprétons la condition combinatoire obtenue à l'aide d'objets combinatoires introduits *ad hoc*. Notre analyse aboutit au théorème suivant.

Théorème 3.1 *Soit $I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*
(i) *$\{\mathrm{e}_{rc} : (r,c) \in I\}$ est une suite basique 1-inconditionnelle réelle dans S^p exactement quand elle est 1-inconditionnelle complexe et même c.b. 1-inconditionnelle complexe.*
(ii) *I satisfait ces trois propriétés exactement lorsque I est "matriciellement $p/2$-indépendant": deux points $q, q' \in I$ sont reliés par au plus un seul chemin sans retour sur le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dont les au plus $p/2$ sommets sont dans I.*

4 Constructions aléatoires à l'intérieur de suites lacunaires

Dans ce chapitre, nous fournissons une preuve nouvelle pour une construction aléatoire d'ensembles lacunaires par Yitzhak Katznelson qui appartient au folklore de l'analyse harmonique. Nous analysons et généralisons aussi la construction aléatoire d'ensembles équidistribués par Jean Bourgain.

Cela nous permet d'établir le tableau 1.3.1 qui classe les propriétés de Rosenthal et $\Lambda(p)$ pour tout p selon la croissance du spectre. Nous montrons alors que la démarche probabiliste suivie par Katznelson et Bourgain pour construire ces sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ utilise seulement la croissance "arithmétique" et l'équidistribution de la suite des entiers $\mathbb{Z}$. En fait, ces sous-ensembles peuvent être construits à l'intérieur de suites équidistribuées à croissance polynômiale. En particulier, le tableau 1.3.1 reste valable pour l'ensemble des sous-ensembles E d'une suite polynômiale, ainsi que de la suite des nombres premiers.

Nous fournissons une réponse partielle à la question 1.3.3.

Théorème 4.1 *Soit P une suite polynômiale ou la suite des nombres premiers. Alors il existe une sous-suite E de P qui est $\Lambda(p)$ pour tout p alors qu'elle ne forme pas un ensemble de Rosenthal.*