Enquête sur les modes d'existence des êtres mathématiques (version augmentée)

Guy Wallet

Laboratoire mathématiques, image et applications
Université de La Rochelle
23 avenue Albert Einstein, BP 33060, 17031 La Rochelle
guy.wallet@gmail.com

Stefan Neuwirth

Laboratoire de mathématiques de Besançon
Université Bourgogne Franche-Comté
16 route de Gray, 25030 Besançon Cedex
stefan.neuwirth@univ-fcomte.fr

Résumé

L'objet de cet essai est de s'interroger sur la manière dont les entités mathématiques pourraient être accueillies dans l'architecture des modes d'existence proposée par Bruno Latour dans le cadre de son ontologie renouvelée et pluraliste du monde moderne [Latour 2012, 2013]. Après avoir décrit les termes du problème, les travaux de Reviel Netz sur l'émergence des mathématiques grecques [Netz 1999] et ceux de Charles Sanders Peirce sur la dimension diagrammatique de l'activité mathématique [Peirce 1933-1958, 1976] sont présentés, ainsi que leurs conséquences relativement au thème du présent essai. Sa partie centrale développe longuement une conception empirique des mathématiques qui joue un rôle essentiel dans la suite. Cette analyse est basée sur la notion d'expérience chère à William James [James 2005] ; elle est aussi inspirée par certains aspects de la philosophie de Per Martin-Löf [Martin-Löf 1987]. Elle permet de penser la solide certitude dont la démonstration dote les résultats mathématiques tout en invalidant l'interprétation de cette certitude comme la marque d'un accès direct à une vérité absolue et transcendante. En s'appuyant sur cette analyse, la suite de ce travail définit une forme de quasi-mode d'existence propre aux êtres mathématiques qui respecte les traits principaux d'un mode d'existence selon l'ontologie latourienne. En conclusion, des éléments de discussion sont apportés quant à la manière dont ce quasi-mode pourrait être placé dans cette ontologie, notamment par rapport au mode de la référence objective qui prévaut dans de nombreuses autres sciences.

1 Introduction

Désignée par l'abréviation EME dans la suite de ce texte, l'*Enquête sur les modes d'existence* est d'abord un livre de Bruno Latour, [Latour 2012]. La version numérique de cet ouvrage est étoffée par l'enquête collective [Latour 2013] à laquelle les internautes ont la possibilité de participer. Le livre et sa version numérique augmentée visent à renouveler notre vision des modes d'existence et des régimes de vérité associés. Il s'agit d'un projet de grande ampleur qui se propose de revisiter le cœur de notre modernité – les sciences, les techniques, le droit, la religion, la politique, l'économie, etc. – et d'élaborer une description explicite d'une multiplicité de formes d'existence, chacune dotée de ses propres conditions de félicité. Ce projet d'une *ontologie pluraliste* se place en opposition avec le point de vue qui accompagne la modernité selon lequel il n'y a qu'une seule forme d'existence, à savoir celle qui relève de la Science et plus largement de la Raison. Cette opposition n'a nullement pour objet de critiquer l'institution scientifique, ni de nier son importance ; le propos de ce projet est plutôt de mettre la science à sa juste place en restituant finement la riche spécificité de son fonctionnement tout en concevant la possibilité d'autres institutions et d'autres formes d'existence elles aussi significatives de la modernité [1].

De fait, un moment essentiel dans la genèse de l'EME est la mise en évidence du mode d'existence prépondérant dans la démarche scientifique pour produire une connaissance objective, avant tout dans les sciences expérimentales et de terrain [2], ce qui laisse provisoirement à l'écart les mathématiques. Il s'agit du *mode de la référence* – référence objective – noté [REF] et caractérisé par la construction de *chaines de référence*. Une description un peu plus précise de ce mode et de la notion de chaine de référence sera donnée vers la fin de ce travail (voir la partie 5.1) au moyen de la présentation d'un exemple caractéristique. Il suffit pour l'instant de savoir qu'une chaine de référence est une succession (un enchainement) de médiations (d'inscriptions scripto-visuelles), chaque inscription [3] étant produite à partir de la précédente. La chaine s'arrête lorsque la dernière inscription obtenue est suffisamment

1. L'un des motifs de cette refonte ontologique est de fournir un nouveau point de vue approprié pour penser et réagir face à la menace d'une catastrophe écologique et climatique de plus en plus pressante. Malgré son immense intérêt, cet aspect ne sera pas évoqué dans la suite du fait qu'il n'interfère pas immédiatement avec le sujet traité dans le présent article.

2. Dans un premier temps, le premier auteur du présent texte interprétait ce mode comme spécifique à la démarche scientifique expérimentale et de terrain, et caractérisant cette dernière. Après discussion avec Isabelle Stengers et Bruno Latour, il semble que cette interprétation est un peu rapide. D'une part, on peut observer la mise en œuvre de ce mode en dehors du cadre strictement scientifique, comme le montre la place occupée par l'exemple d'une excursion sur le mont Aiguille dans l'EME. D'autre part, il n'est pas absolument clair que ce même mode recouvre tout ce qui se fait dans les sciences expérimentales et de terrain.

3. La description dans l'EME du mode de la référence fait grand usage du terme d'*inscription* ou de manière équivalente de celui de *forme*, voire de celui d'*idéographie*, pour désigner un dispositif concret qui permet d'opérer une transition entre une face plus matérielle et une face qui relève plus de l'écriture ou du calcul. Pour citer l'EME : « par exemple une vitrine d'exposition sur laquelle on pose un spécimen est une inscription au même titre que l'écran d'un scanner médical ou un tableau excel » [Latour 2013, « Livre », colonne « Vocabulaire », entrée « Inscription »].

claire et explicite pour éclairer le problème étudié. Finalement, quelque chose existe objectivement lorsque les scientifiques concernés ont pu construire une chaine de référence qui montre cette chose.

Puisque les mathématiques sont incontestablement une composante du champ scientifique, se pose le problème de savoir si elles relèvent de ce mode d'existence [REF]. Cette question n'a pas de réponse évidente et elle est loin d'être tranchée ni même franchement abordée dans l'état actuel de l'EME. Certes, la question de l'ontologie des mathématiques est source d'un questionnement philosophique récurrent : *de facto*, le statut des êtres mathématiques a toujours été l'objet d'interrogations et il n'est pas étonnant de retrouver un écho de cette pierre d'achoppement dans l'EME. En première analyse, on peut préciser quelques aspects de cette difficulté.

— Ranger les mathématiques dans le mode de la référence objective [REF] tel que ce dernier est présenté dans l'EME nécessite de montrer comment l'activité mathématique relève elle aussi des chaines de référence. Pour cela, et parce que la caractéristique essentielle de la pratique des mathématiques est l'élaboration de démonstrations, il semble nécessaire d'établir un pont entre la notion de chaine de référence et celle de démonstration. De prime abord, cela n'est pas évident et d'ailleurs, ce point ne semble pas évoqué dans l'EME.

— Cette difficulté est certainement liée au fait que les chaines de référence ont été mises en évidence dans la pratique des sciences possédant explicitement une base expérimentale ou de terrain, pratique qui se déploie dans des laboratoires qui constituent le cadre indispensable à la réussite de ces recherches : le laboratoire offre des conditions matérielles, financières, politiques et humaines qui constituent une dimension importante de l'activité scientifique. L'analogue semble nettement plus difficile à concevoir dans le cas d'une science formelle comme les mathématiques pour laquelle la base expérimentale est absente en première approximation, et la vie de laboratoire nettement moins spectaculaire. Néanmoins, les dernières décennies ont vu notablement s'accroitre l'importance des laboratoires comme structures de base de la recherche en mathématiques.

— Outre la difficulté à pénétrer au cœur de la pratique mathématique, l'obstacle principal à la clarification de ce problème est certainement la captation philosophique, vieille comme les mathématiques et la philosophie grecques, qui fait de la démonstration mathématique la forme paradigmatique de la démarche rationnelle parfaite, capable de mener directement et sans perte à la vérité pensée comme absolue et indépendante des acteurs humains. Cette captation est finement présentée et mainte fois évoquée dans l'EME et aussi dans l'ouvrage [Netz 1999, p. 290] qui sera mentionné plus loin dans ce texte (voir aussi [Latour 2009, p. 189-191]). Il apparait que cette idée d'une méthode permettant l'accès direct, plein et entier à la vérité, et la force qu'elle exerce implicitement dans notre culture occidentale, obscurcit particulièrement la réflexion sur la question posée. Ce point de vue, nommé formalisme dans l'EME, a joué un rôle décisif dans l'histoire culturelle de la modernité. Pour reprendre les termes de Netz dans [Netz 1999], « cette vision a hanté la culture occidentale » sur le long terme. D'une certaine manière, l'EME apparait comme une critique frontale de cette conception. Cependant, force est de reconnaitre que, même une fois dévoilé et critiqué, cet arrière-fond philosophique n'en continue pas moins à troubler notre réflexion et à rendre délicate l'identification d'un mode d'existence adéquat pour les mathématiques.

Et pourtant, Bruno Latour a depuis longtemps émis l'hypothèse (voir [Latour 1985]) que le cas des sciences formelles et abstraites comme les mathématiques devrait pouvoir se traiter de manière peut-être encore plus évidente que celui des sciences de laboratoire ou de terrain. Il suppose que c'est essentiellement le poids de nos préjugés philosophiques, particulièrement prégnants en ce qui concerne les mathématiques, qui nous aveugle sur ce point. Le point de vue développé dans la suite de la présente analyse pourrait en partie valider la pertinence de cette intuition.

Notre ambition est de déterminer un mode d'existence pour les mathématiques qui soit à la fois conforme à l'esprit de l'EME et compatible avec l'expérience pratique des mathématiciens et des utilisateurs de mathématiques (dans la suite de ce travail, le terme de mathématicien désigne une personne ayant acquis la compétence lui permettant d'étudier et de produire lui-même des développements mathématiques). Le titre du présent texte évoque les modes d'existence au pluriel parce que notre enquête identifie un autre mode, qui fait intervenir le calcul mécanique de l'ordinateur comme étape essentielle d'un raisonnement (comme « hiatus » dans la « trajectoire » de l'existence de l'être mathématique, voir la partie 5.1 pour l'emploi précis de ces deux mots) ; il utilise l'article déterminé, « les modes », pour afficher notre ambition d'une enquête ouverte et la plus large possible.

L'idée principale est de s'attaquer d'abord à l'arrière-fond philosophique évoqué précédemment. Pour cela, une critique de la conception formaliste des mathématiques est menée ; elle permet en contrepoint de proposer une conception empirique de la notion de démonstration mathématique. Ce travail, peut-être le plus conséquent de l'article, est basé sur la notion d'expérience chère à William James [James 2005], mais elle est aussi inspirée par certains aspects de la philosophie du mathématicien, logicien et philosophe suédois Per Martin-Löf [Martin-Löf 1987], sans oublier de précieuses réflexions de LudwigWittgenstein [Wittgenstein 2006] et John Dewey [Dewey 2014] d'intérêt pour ce sujet. Ce point de vue permet de comprendre que tout résultat mathématique est doté de la certitude résultant de sa démonstration, tout en étant affecté d'une forme de fragilité irréductible héritée du fait que la démonstration est d'abord une expérience. Cela permet d'invalider l'interprétation de cette certitude comme la marque d'un accès direct à une vérité absolue et transcendante.

Cette étude préparatoire mais essentielle étant menée, il est possible d'en déduire, somme toute assez simplement, un mode d'existence – par prudence, il est préférable d'évoquer plutôt un quasi-mode d'existence – propre aux êtres mathématiques. Ce quasi-mode respecte pour l'essentiel les caractéristiques d'un mode d'existence selon l'EME. De plus, il présente à la fois des analogies significatives et éventuellement quelques différences notables avec le mode d'existence de la référence objective. La question de l'articulation de ce quasi-mode avec celui de la référence objective peut alors commencer à être discutée.

La présente étude est une version augmentée de l'article [Wallet & Neuwirth 2018].

2 L'apport de R. Netz et de C. S. Peirce : la place des diagrammes en mathématiques

2.1 L'émergence des mathématiques grecques selon Netz

Dans [Latour 2009], Bruno Latour présente un ouvrage qui constitue selon lui la première avancée décisive dans la direction d'une « approche non formaliste du formalisme ». Il s'agit du livre de Netz publié en 1999 sous le titre *The shaping of deduction in Greek mathematics : a study in cognitive history*, [Netz 1999]. Cette étude présente une analyse de l'émergence des mathématiques grecques du point de vue de l'histoire cognitive et plus particulièrement de la constitution de la déduction. Ce travail d'historien s'appuie sur l'étude minutieuse des textes mathématiques grecs encore accessibles, parfois sous la forme de fragments, écrits en gros pendant un millénaire débutant au 5e siècle av. J.-C. L'analyse de Netz se place en opposition explicite avec la démarche épistémologique classique, telle que celle de Thomas Kuhn [Kuhn 1972], qui s'intéresse essentiellement aux systèmes de croyances partagées – les paradigmes – sur lesquels se fonderait le développement des connaissances scientifiques, ainsi qu'aux grands basculements de ces paradigmes lors des révolutions scientifiques. Netz met en doute que le travail scientifique se fonde réellement sur ces grands paradigmes qui apparaissent plutôt après coup dans les explications des épistémologues. Au contraire, ce sont pour lui les pratiques partagées qui constituent la base efficiente du développement concret des sciences. Justement, il se propose de mettre en lumière les pratiques partagées qui indiquent le mieux la force des ressources cognitives spécifiques aux mathématiques grecques.

La première pratique abordée par Netz est celle de l'introduction du diagramme avec lettres qui est l'outil le plus emblématique des mathématiques grecques : voir la figure 1. Il s'agit à coup sûr d'un apport de première importance qui a été, et continue à être, universellement utilisé dans l'ensemble des sciences et des techniques. Dans le cadre des mathématiques grecques, le diagramme avec lettres est un dispositif qui, en relation d'interdépendance avec le texte pur, offre une vue synoptique du cas considéré et joue le rôle d'univers de référence du texte. Cet univers est marqué par une double finitude : les objets qui sont marqués sont bornés et en nombre fini, ce qui en fait un bon support pour la pensée mathématique. De plus, la nature des objets représentés sur le diagramme n'est nulle part précisée. Non seulement les mathématiciens grecs n'apportent aucun élément de réponse à la question de savoir ce que pourraient bien être en vérité les entités qui peuplent leurs raisonnements mais de

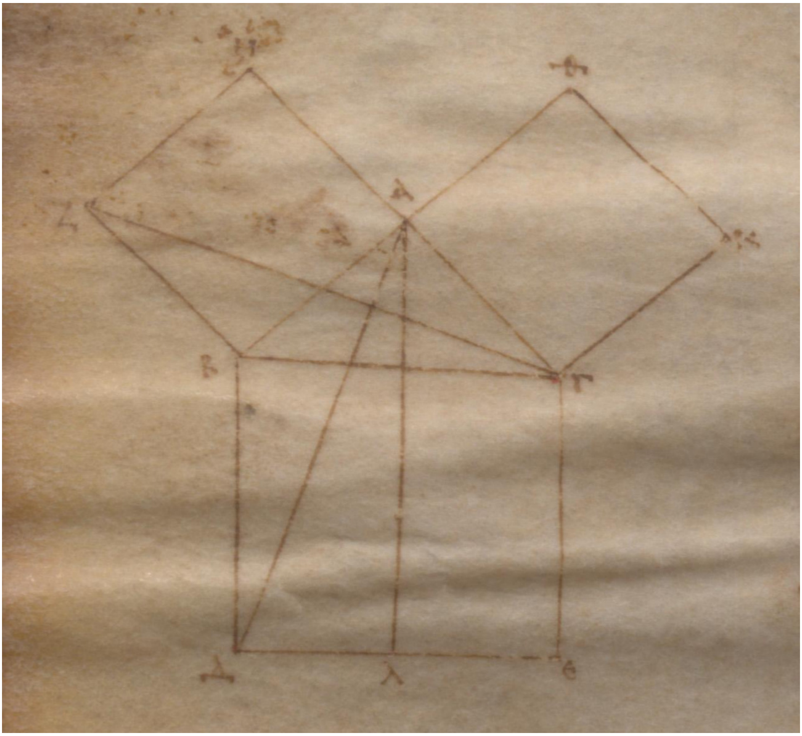

FIGURE 1 – Le diagramme avec lettres qui accompagne le théorème de Pythagore dans les *Éléments* d'Euclide sur le folio 31 du manuscrit MS D'Orville 301 de l'an 888, reproduit avec l'aimable autorisation de l'Institut de mathématiques Clay.

plus ils ne posent jamais la question de la réalité ultime des objets mathématiques [4]. D'une certaine manière, l'ambigüité ontologique semble être constitutive de cette discipline. Ce parti pris a pour effet bénéfique d'écarter les questions qui fâchent, celles pour lesquelles un consensus est quasiment impossible, particulièrement dans la tradition de la polémique propre à la démocratie grecque.

La seconde pratique des mathématiques grecques relevée par Netz est l'utilisation d'un langage fortement spécifique. Sa première propriété est la petite taille de son lexique : 143 mots utilisés répétitivement sont responsables de 95 % du corpus des œuvres d'Archimède, *L'arénaire* mise à part. On a déjà vu que le diagramme avec lettres permet d'extraire de l'infinité des entités géométriques un univers de référence fini de petite taille suffisant et commode pour le travail de démonstration. Le lexique mathématique fait la même chose par rapport à la vaste étendue du lexique de la

4. Un symptôme *a contrario* en sont les difficultés rencontrées par un philologue et historien des mathématiques comme Árpád Szabó [Szabó 2000] pour expliquer cette absence de questionnement.

langue grecque. De plus, Netz note que ce langage possède une structure remarquable : pour une part importante, on l'obtient par une combinaison d'un petit nombre de briques qu'il nomme *formules*. Ce sont de petites phrases ou groupes de mots, se répétant avec fort peu de variabilité. La présence massive de ces formules indique qu'elles ont un rôle cognitif important dans la structuration et la communication des argumentaires [5].

En conclusion, Netz met en évidence les deux caractéristiques fortes des mathématiques grecques que sont d'une part l'introduction du diagramme avec lettres, qui évite tout questionnement ontologique sur la nature ultime des objets traités, et d'autre part l'utilisation d'un langage au lexique réduit, qui se développe implicitement selon une « structure en formules ». Selon Netz, ces deux pratiques sont les sources principales de l'émergence et de l'efficience du mode déductif dans les mathématiques grecques, et il en analyse en détail la genèse.

2.2 Le diagramme au cœur des mathématiques selon C. S. Peirce

Considéré comme le fondateur du courant pragmatiste en philosophie, Charles Sanders Peirce est un philosophe américain. Avec Ferdinand de Saussure, il est l'un des pères de la sémiotique (ou sémiologie), science des signes (verbaux ou non verbaux) et du sens dont ils sont porteurs. Peirce a été l'objet d'une reconnaissance tardive longtemps après sa mort lorsque des chercheurs se sont mis à exploiter les environ 12 000 pages de ses écrits déposées à l'université de Harvard. Depuis lors, ses idées suscitent un grand intérêt et de nombreux travaux au niveau international. Dans la présente partie consacrée à la place que Peirce accorde aux diagrammes dans les mathématiques, les auteurs se sont principalement appuyés sur les travaux de Christiane Chauviré [Chauviré 1987, 2008] pour appréhender l'apport de ce philosophe à cet égard.

Le point de vue de Peirce sur les mathématiques s'appuie sur les bases de sa sémiotique, à savoir la notion de signe et son lien avec la pensée. En toute généralité, un signe désigne quelque chose qui, quelle qu'en soit la raison, est interprétée comme représentant une autre chose. Contrairement à d'autres, Peirce n'impose pas au signe d'être simple ou minimal : les signes qu'il considère sont souvent des agencements complexes. Par exemple, on verra bientôt qu'un diagramme avec lettres de la géométrie grecque, aussi complexe soit-il, est un signe au sens de Peirce au même titre qu'une simple lettre nommant un objet géométrique dans le même diagramme.

Ce philosophe considère que la pensée nécessite l'utilisation des signes au sens fort suivant : la fonction des signes n'est pas de représenter une pensée déjà produite par un processus se déroulant ailleurs, par exemple dans l'esprit d'un sujet humain ;

5. Cependant, la manière dont ces formules se combinent est complexe. Chaque démonstration met en place un réseau d'anaphores, doit gérer la généralité de la proposition et les modalités des énoncés, et Fabio Acerbi parle très à propos de *La syntaxe logique des mathématiques grecques* [Acerbi 2012].

au contraire, *les signes constituent le substrat indispensable à la constitution et au développement de la pensée et ultimement, l'acte de penser consiste à manipuler des signes.* De plus, Peirce classifie les signes en trois catégories, à savoir le symbole, l'indice et l'icône en fonction du type de rapport qu'un signe entretient avec son objet. Le *symbole* est un signe de nature arbitraire dont la seule relation avec la chose représentée est une convention : la lettre nommant un objet géométrique est un exemple de symbole. L'*indice* est un signe qui entretient un rapport physique ou matériel avec la chose représentée : le mouvement de rotation des ailes d'un moulin est un indice du vent. L'*icône* est un signe qui a un rapport de ressemblance avec la chose qu'il représente : le dessin d'un arbre peut être considéré comme une icône de la notion d'arbre.

Dans la pratique de la géométrie depuis les Grecs, le diagramme tracé explicitement sur un support n'est pas supposé être le véritable objet de l'étude. La meilleure preuve en est que des imperfections dans le tracé sont acceptées, parfois même conseillées. Bref, puisque ce diagramme tient lieu de la configuration géométrique idéale sur laquelle porte le raisonnement tout en étant non confondu avec elle, il est un signe au sens de Peirce. Il n'est pas difficile d'identifier la catégorie de ce signe puisque le symbole et l'indice sont d'emblée disqualifiés. Le diagramme géométrique est donc une icône : sa vertu est de représenter une configuration géométrique par un rapport de ressemblance. D'après Peirce, cette ressemblance porte sur la forme de la configuration, sachant que pour lui, *la forme d'une chose est la structure de cette chose, c'est-à-dire l'ensemble des relations entre les parties constitutives de cette chose.* L'intérêt du diagramme est qu'il rend perceptible cette forme abstraite par l'observation directe, au même titre que quiconque peut percevoir une configuration d'objets concrets située dans son champ visuel. Il est notable que de nombreux secteurs des mathématiques utilisent explicitement des diagrammes se présentant sous la forme de figures géométriques (au sens d'une disposition concrète de points, de droites et autres courbes, de lettres et de chiffres), alors même que les objets étudiés ne relèvent pas de la géométrie. Pour ne donner qu'un exemple emblématique, il suffit de citer la théorie des catégories dans laquelle les diagrammes sont des figures constituées principalement de flèches, et dont la géométrie représente des propriétés abstraites sans rapport immédiat avec la géométrie au sens usuel. La figure 2 montre un diagramme de ce type illustrant la notion de *pullback* dans une catégorie. Toutes ces formes géométrisées de diagrammes relèvent clairement de l'analyse précédente. Poser qu'un diagramme en ce sens est une icône donnant à voir la forme d'une configuration abstraite sur une figure géométrique est une clarification intéressante, mais cela ne constitue peut-être pas une grande surprise et encore moins une révolution dans la philosophie des mathématiques. De fait, la position de Peirce est bien plus audacieuse comme la suite va le montrer.

Tout d'abord, il introduit une extension de la notion de diagramme qui coupe le lien qui liait cette notion avec celle de figure géométrique. En toute généralité, un diagramme est une icône qui met en scène de manière perceptible la forme de la chose

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[ddl, bend right, "g''"'] \arrow[ddr, bend left, "f''"] \arrow[d, dotted, "\alpha"] & \\
 & P \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
A \arrow[r, "f"] & C & B \arrow[l, "g"']
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2 – Le diagramme de la propriété universelle du pullback (P, g', f') de deux morphismes $f\colon A \to C$ et $g\colon B \to C$.

représentée par cette icône [6]. Pour Peirce, il n'y a quasiment pas de limite quant à la nature d'une entité pour qu'elle puisse être interprétée comme l'icône d'une autre chose ; la seule et impérieuse condition est que cette entité ressemble à cette chose sous un certain rapport. Ce degré de généralité se reporte pleinement sur la notion de diagramme comme la suite va le montrer.

Comme exemple très simple de diagramme en ce sens, Peirce propose l'arrangement suivant susceptible d'apparaitre dans une présentation des bases de sa sémiotique :

$$\text{Signe} : \begin{cases} \text{symbole} \\ \text{indice} \\ \text{icône} \end{cases}$$

En effet, il s'agit d'un dispositif graphique et textuel – une inscription scripto-visuelle – qui illustre de manière empiriquement perceptible la propriété abstraite selon laquelle la classe des signes est constituée de la réunion des classes des symboles, des indices et des icônes.

Sa notion généralisée de diagramme permet à Peirce d'énoncer sa thèse fondamentale sur la sémiologie des mathématiques : *dans tous ses champs d'étude, c'est l'essence même de la pensée mathématique en acte de se traduire constamment par un travail de construction, d'observation et de transformation de diagrammes.* Cette

6. En plus du diagramme, l'analyse percienne distingue deux autres types d'icônes : l'*image*, qui désigne un signe perçu comme la représentation analogique de quelque chose – l'image, c'est « la ressemblance à l'état pur », le « degré zéro de l'icône » – et la *métaphore*, qui consiste à remplacer une relation sémiotique par une nouvelle relation sémiotique sur la base d'une similarité non préexistante introduite à cette occasion [Verhaegen 1994] . Quel que soit l'intérêt de ces notions par ailleurs fort discutée dans la littérature [Verhaegen 1994], [Esquenazi 1997], [Lefebvre 2013], c'est le diagramme dans l'acception généralisée précédente qui constitue pour Peirce le processus sémiotique essentiel à l'œuvre dans les mathématiques. C'est cette thèse qui est retenue dans le présent article, et elle constitue l'un des appuis à la conception empirique de la démonstration donnée dans la partie 4.

thèse prend le contre-pied de l'idée reçue selon laquelle le mathématicien accède directement aux formes ou concepts abstraits ; il est éventuellement ajouté que cela résulte d'une faculté plus ou moins mystérieuse nommée l'intuition. Il se trouve que le point de vue de Peirce englobe aussi une interprétation éclairante de l'intuition mathématique parfaitement en accord avec la précédente thèse, puisqu'il en donne la définition suivante : *l'intuition d'une forme abstraite est la saisie empirique de cette forme sur une icône qui la représente.*

Pour comprendre la pertinence de ce point de vue tout à fait radical, on peut le tester sur le cas des formules algébriques qui peuplent les traités d'algèbre. En voici un exemple extrait au hasard des *Éléments de mathématique* de Bourbaki [Bourbaki 1970, page A.I.93].

$$\left(\sum_{\lambda\in \mathrm{L}} x_\lambda\right)^n = \sum_{|\beta|=n} \frac{n!}{\prod_{\lambda\in \mathrm{L}} \beta_\lambda!} \prod_{\lambda\in \mathrm{L}} x_\lambda^{\beta_\lambda}. \tag{14}$$

Pour Peirce, une formule de ce type, avec ses notations si particulières et sa manière d'occuper l'espace sur le support de l'écriture – savoir-faire inventé graduellement au cours du développement historique de ce domaine – est aussi un diagramme. En effet, cette graphie donne à voir au mathématicien qui l'observe nombre de propriétés de l'objet abstrait ainsi représenté, et prépare les opérations qu'on pourra lui appliquer. Autre exemple, comment ne pas être saisi par l'aspect diagrammatique de l'ensemble suivant de formules ?

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

C'est ainsi qu'il est possible d'interpréter une bonne partie de la pratique de l'algèbre comme un travail d'observation et de transformation de diagrammes. Mais bien entendu, celui qui se livre à cette activité algébrique n'a pas à être conscient de l'interprétation diagrammatique de son travail : il « fait de l'algèbre », un point c'est tout ! Ce qui vient d'être dit sur les formules algébriques est évidemment valable pour toute formule mathématique quel que soit le domaine mathématique considéré.

Si on prend au sérieux le degré de généralité avec lequel quelque chose est susceptible de jouer le rôle d'icône, qui pourrait être n'importe quoi d'après Peirce, un fragment de langage lui-même peut être porteur d'une dimension diagrammatique. Précisément, une séquence purement textuelle dans un développement mathématique constitue un diagramme, sous réserve qu'elle se révèle susceptible de mettre en scène une forme abstraite de manière perceptible. Dans cet ordre d'idée, la structure en « formules » du texte mathématique grec mise en lumière par Netz est interprétable comme l'explicitation de la dimension diagrammatique de ce texte, dimension indispensable à la fécondité de l'activité mathématique. On peut ajouter qu'en général, séquences textuelles, formules mathématiques et éventuellement figures géométriques sont inséparables et concourent à la constitution de diagrammes composés qui sont des mixtes de ces divers ingrédients. D'ailleurs, le diagramme géométrique introduit par les Grecs est lui même un diagramme composé puisqu'il est constitué de lettres et de dessins. Enfin, une entité mentale peut être un diagramme, si cette entité est ressentie comme satisfaisant la définition de Peirce. Finalement, les diagrammes au sens général apparaissent comme le substrat de l'activité mathématique. Cette activité se réalise par diverses opérations portant sur des diagrammes, comme les constructions et transformations de diagrammes. D'après Peirce, les transformations de diagrammes apportent la preuve visible que les mathématiques s'enrichissent par la production de nouvelles connaissances puisque en effet, ces opérations ne sont nullement prédéterminées.

2.3 Le point sur la question d'un mode d'existence en mathématiques après Netz et Peirce

Les travaux de Netz et de Peirce présentés dans les parties précédentes portent tous les deux sur les mathématiques, mais diffèrent notablement, tant par le champ d'étude – mathématiques grecques et mathématiques en général – que par le type d'approche – méthodes empiriques d'analyse textuelle des sciences sociales et analyse philosophique et sémiotique –, au point qu'il peut sembler aventureux de vouloir en tirer une leçon commune. Et pourtant, ces mêmes différences font que ces deux approches des mathématiques se complètent relativement bien en ce qui concerne la place du diagramme dans les mathématiques. En effet, le diagramme géométrique avec lettres dont Netz a analysé l'importance dans les mathématiques grecques est généralisé par Peirce en un dispositif iconique jouant un rôle essentiel dans l'ensemble des mathématiques et non plus dans la seule géométrie grecque. D'autre part, Netz a mis en évidence des facteurs linguistiques spécifiques chez les Grecs – utilisation d'un langage au lexique réduit et structuration de ce langage par l'emploi répétitif de formules –, facteurs dont on peut admettre la persistance au delà de l'Antiquité jusqu'à nos jours et qui constituent un cadre dans lequel la notion de diagramme généralisé au sens de Peirce se révèle pertinente pour l'activité mathématique en général. Il s'agit maintenant d'analyser dans quelle mesure cette leçon commune permet de progresser relativement à la question d'un mode d'existence pour les mathématiques au sein de l'EME.

Préalablement, il est intéressant de noter que l'un des bénéfices majeurs de l'introduction dans l'EME du mode [REF] de la référence objective est que ce mode n'a pas vocation à être l'unique vecteur de toute l'ontologie. Au contraire, cette conception du travail scientifique laisse de la place à d'éventuels autres modes d'existence capables de prendre en charge de nouveaux êtres, de les faire exister, de les instaurer. C'est effectivement ce qui est fait dans [Latour 2012, 2013] par l'introduction d'une série de modes d'existence pour, par exemple, les êtres de la fiction, les êtres de la technique, les êtres du droit, de la politique, de la parole religieuse, etc. Chacun de ces nouveaux modes d'existence se manifeste par le truchement de trajectoires (continuité) constituées de sauts entre des formes différentes (discontinuité) se succédant selon un principe de « véridiction » [Latour 2013, « Livre », colonne « Vocabulaire », entrée « Véridiction »] spécifique à chaque mode. La richesse de ce nouveau point de vue sur l'ontologie, sa capacité à rendre compte de pratiques aussi éloignées que par exemple celles relevant d'une part de la recherche scientifique et d'autre part de la parole religieuse, laisse penser qu'il devrait pouvoir permettre une approche originale et pertinente du cas des mathématiques.

Les analyses de Netz et de Peirce constituent un premier pas dans cette direction. En effet, la description qu'ils donnent des mathématiques est manifestement en forte corrélation avec le fond philosophique qui initie l'analyse anthropologique dans la démarche scientifique développée par l'EME. C'est vrai en ce qui concerne la critique vis-à-vis de l'approche épistémologique qui privilégie les révolutions scientifiques au détriment d'une étude concrète du fonctionnement réel d'une science normale. C'est aussi vrai pour l'importance donnée aux véritables technologies intellectuelles que sont d'un côté le travail sur les diagrammes couplé avec un langage enrégimenté, de l'autre la fabrication et l'étude des inscriptions scripto-visuelles. Dans les deux cas, il s'agit de « rematérialiser » la connaissance mathématique, c'est-à-dire de montrer en quoi elle est dépendante de procédés concrets de construction et de manipulation d'inscriptions, dont l'importance est généralement ignorée par l'approche purement épistémique du savoir mathématique.

Néanmoins, ce que l'on ne trouve pas dans les analyses de Netz et de Peirce, ce qui d'ailleurs n'est pas leur propos, c'est la mise en évidence des cheminements particuliers – l'analogue de la notion de chaine de référence dans les sciences expérimentales – par lesquels se manifesterait l'existence des entités mathématiques. Toutefois, Netz analyse très précisément la forme des démonstrations des Grecs.

Après Netz et Peirce, que peut-on dire alors sur la manière dont se manifestent les êtres mathématiques ? Ce sont les « existants » [Latour 2013, « Livre », colonne « Vocabulaire », entrée « Êtres, existants »] qui résultent des agencements particuliers produits par les mathématiciens. Ces agencements sont faits de textes, de dessins et de diagrammes constituant des ensembles éminemment structurés. Essentiellement, on y voit, et cela depuis les anciens Grecs, se répéter la forme suivante : l'introduction d'un cadre de travail par un jeu de définitions, de diagrammes, de notations et de commentaires[7], puis l'annonce du résultat à démontrer suivie de sa validation par une démonstration proprement dite. La leçon de Netz et de Peirce est que ces formes ne deviennent productives et partageables par une communauté que sous certaines conditions techniques et cognitives qui caractérisent ces mathématiques, précisées dans les parties 2.1 et 2.2 ci-dessus. Marquées par l'usage des démonstrations comme moyen de validation ultime des résultats, ce sont ces mathématiques qui, héritières des Grecs, se sont trouvées au cœur de la révolution scientifique et sont maintenant pratiquées dans les lieux de recherche partout dans le monde. Dans la présente étude,

7. Dans les *Éléments* d'Euclide, cette introduction n'est accompagnée d'aucun commentaire. D'autres traités antiques contiennent une préface, mais celle-ci n'a en général pas de finalité méthodologique.

ce sont elles qui sont désignées par l'expression « les mathématiques [8] » et qui constituent son objet central.

Ceci étant admis, la place centrale des démonstrations dans les mathématiques [9] suggère que les êtres mathématiques manifestent leur existence par des parcours en relation avec les démonstrations dans lesquelles ils sont impliqués. Est-il possible d'interpréter sans distorsion manifeste ces parcours démonstratifs comme des chaines de référence au sens de l'EME ? Ou bien, peut-on concevoir les démonstrations comme les trajectoires d'un nouveau mode d'existence, qui lui serait spécifique aux entités mathématiques ? Pour répondre à ces questions, un long détour pour élaborer une conception non formaliste des mathématiques, conception venant elle-même en critique de la vision formaliste de cette discipline, s'avère utile.

3 La démonstration et l'idée formaliste de sa perfection

La logique contemporaine met à disposition plusieurs types de description de la notion de démonstration captant plus ou moins bien la forme de la pratique argumentaire des mathématiciens. Le calcul nommé « déduction naturelle » est particulièrement intéressant pour ce propos et la description qui suit s'en inspire un peu, en évitant toutefois les aspects techniques moins pertinents dans ce travail philosophique. Introduite par le mathématicien et logicien allemand Gerhard Gentzen [10] [Gentzen 1955], la déduction naturelle a pour objet premier de proposer un formalisme reproduisant le mode naturel du raisonnement mathématique par opposition

8. L'expression est trompeuse car elle peut donner à penser que « les » mathématiques en question sont parfaitement unifiées et qu'elles épuisent la totalité des formes de l'activité mathématique. Cela est tout à fait discutable, ne serait-ce qu'au niveau historique. Un exemple frappant d'une autre pratique mathématique est donné par l'étude [Chemla 2016] de textes datant de la Chine impériale du 3^{e} au 7^{e} siècle. On y découvre une culture mathématique riche mais très différente de celle qui est au centre de l'attention du présent travail. Malgré cette altérité, certaines des caractéristiques des mathématiques grecques relevées par Netz semblent présentes, en particulier un usage, en partie caché, d'inscriptions scripto-visuelles.

9. À juste titre, les mathématiciens n'aiment guère que l'on réduise leur activité à l'écriture de démonstrations. De fait, une démonstration en bonne et due forme n'est susceptible d'être rédigée qu'après une longue phase préparatoire relativement informelle. Il n'empêche que c'est l'élaboration finale d'une démonstration qui est le but de ce travail préalable et qui en marque le succès. De plus, la phase préparatoire informelle est difficile à observer puisqu'elle comporte souvent des phases de réflexion intense sans manifestation extérieure significative. On peut écouter la belle description qu'en donne André Lichnerowicz dans l'interview [Vernier 1987] dont la pointe est le propos rapporté que « le plus difficile pour une femme de mathématicien, c'est de distinguer un mathématicien qui travaille et un mathématicien qui dort ».

10. Gentzen (1909-1945) présente la curiosité d'avoir été à la fois un très grand logicien et un nazi semble-t-il convaincu. Il serait malvenu d'en déduire que son œuvre en logique – la déduction naturelle, le calcul des séquents, la cohérence de l'arithmétique de Peano – présente une quelconque connivence avec le national-socialisme. De fait, son apport scientifique s'est révélé d'une extrême importance pour les développements modernes de la théorie de la démonstration.

au style de la méthode axiomatique [11] commune aux systèmes de Frege, de Russell et Whitehead et de Hilbert. Selon Gentzen, le raisonnement mathématique naturel repose non pas sur la référence à une poignée d'axiomes trop souvent abscons mais sur l'application de règles d'inférences claires, efficaces et en aussi grand nombre que nécessaire dans chaque secteur de cette discipline.

Selon la terminologie utilisée dans les travaux de Per Martin-Löf [Martin-Löf 1987], un résultat mathématique dont on sait qu'on a le droit de l'affirmer est nommé un *jugement*, ce terme étant pris exclusivement dans le sens de *jugement mathématique* dans toute la suite du présent texte. Un jugement est donc un élément établi de connaissance mathématique : il se présente sous la forme d'un énoncé mathématique qui a été préalablement reconnu comme valide.

La forme la plus simple d'un jugement est « A est vrai [12] », où A désigne une proposition. Par exemple, l'énoncé que « la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits » est une proposition, et l'affirmation que cette proposition est vraie est un jugement qui est par exemple établi par le raisonnement que l'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide et que nous présentons dans la partie 4.1.

Maintenant, il reste à savoir de quel droit on peut affirmer un jugement. Certains sont donnés préalablement à la phase déductive ; ils traduisent une sorte d'évidence basique et immédiate relative aux objets considérés et au cadre de travail. Les autres jugements sont tous ceux que l'on peut obtenir par déduction, c'est-à-dire par application de *règles d'inférence* : chacune de ces règles décrit comment zéro, un ou plusieurs jugements permettent d'établir un autre jugement. Ces règles d'inférence reprennent sous une forme épurée les bases de la logique du raisonnement humain. La déduction naturelle représente une démonstration mathématique comme un enchainement de jugements [13], chaque jugement étant établi à partir du précédent (ou des précédents) par une règle d'inférence, le dernier jugement établi étant l'affirmation du théorème.

A priori, il n'y a pas grand-chose à reprocher à la description de la notion de démonstration développée ci-dessus sinon qu'elle est excessivement brève et formelle. Toutefois, ce mode de description donne facilement prise à une interprétation formaliste, cette dernière se révélant être une version moderne de l'antique captation

11. La méthode axiomatique n'est pas représentative de la pratique courante des mathématiciens. La meilleure preuve en est que la grande majorité d'entre eux n'ont que de très vagues idées sur le système axiomatique qui est censé être le fondement de leur travail. Cela ne les empêche aucunement de faire des mathématiques !

12. Le jugement « A est vrai » est synonyme de « A est un théorème » dans certains écrits de logique. Néanmoins, la tradition mathématique veut que l'on réserve le terme de théorème aux résultats qui sont à la fois importants et difficiles à démontrer. Il y a d'autres formes de jugement, en particulier le jugement hypothétique « A est vrai sous l'hypothèse que B est vrai ».

13. Plus généralement, la structure d'une démonstration peut être un peu plus complexe qu'une simple suite organisée comme un parcours linéaire : c'est plutôt une famille de jugements reliés par des règles d'inférence qui confluent vers le jugement final. La structure combinatoire d'une telle configuration est ce que les logiciens nomment un *arbre de preuve*. Cette même structure serait vraisemblablement appropriée pour les chaines de référence. Dans le présent travail de nature essentiellement philosophique, il semble inutile de préciser davantage ce point technique.

philosophique des mathématiques grecques telle qu'elle avait été opérée par les philosophes platoniciens.

En effet, on a vu qu'une démonstration apparait comme une structure constituée de jugements reliés par des inférences logiques ; or les inférences logiques sont parfaitement caractérisées et cataloguées par le travail des logiciens depuis le siècle dernier : cette structure peut donc être simulée par un calcul en réduisant le texte de la démonstration à une série de symboles assemblés selon des règles syntaxiques précises, sans utilisation de la langue naturelle. Il en découle que la démonstration devient un dispositif formel objectif dont la validité tient à son objectivité, c'est-à-dire à son caractère indépendant de l'approche subjective de l'esprit humain. Autrement dit, la validité d'une démonstration réside ultimement dans une propriété objective d'un objet combinatoire extérieur à notre conscience. En conséquence, une fois qu'elle est convenablement formalisée, une démonstration mathématique constitue une forme d'argumentation imparable, incontestable, menant inéluctablement à sa conclusion. Ainsi, la vérité dévoilée par une démonstration acquiert un caractère universel, immuable et permanent, bien exprimé par la conception tarskienne de vérité.

Afin d'illustrer la réalité de ce point de vue, voici une longue citation issue de l'introduction du livre I des *Éléments de mathématique* de Bourbaki [Bourbaki 1954], intitulé *Théorie des ensembles*, qui a pour but explicite de montrer les changements – par rapport au vénérable héritage légué par les Grecs – que les développements contemporains apportent à la notion de démonstration.

> [...] l'analyse du mécanisme des démonstrations dans des textes mathématiques bien choisis a permis d'en dégager la structure, du double point de vue du vocabulaire et de la syntaxe. On arrive ainsi à la conclusion qu'un texte mathématique suffisamment explicite pourrait être exprimé dans une langue conventionnelle ne comportant qu'un petit nombre de « mots » invariables assemblés suivant une syntaxe qui consisterait en un petit nombre de règles inviolables : un tel texte est dit *formalisé*. La description d'une partie d'échecs au moyen de la notation usuelle, une table de logarithmes, sont des textes formalisés ; les formules du calcul algébrique ordinaire en seraient aussi, si l'on avait complètement codifié les règles gouvernant l'emploi des parenthèses et qu'on s'y conformât strictement, alors qu'en fait certaines de ces règles ne s'apprennent guère qu'à l'usage, et que l'usage autorise à y faire certaines dérogations.
>
> La vérification d'un texte formalisé ne demande qu'une attention en quelque sorte mécanique, les seules causes d'erreur possibles étant dues à la longueur ou à la complication du texte ; c'est pourquoi un mathématicien fait le plus souvent confiance à un confrère qui lui transmet le résultat d'un calcul algébrique, pour peu qu'il sache que ce calcul n'est pas trop long et a été fait avec soin. Par contre, dans un texte non formalisé, on est exposé aux fautes de raisonnement que risquent d'entrainer, par exemple, l'usage abusif de l'intuition, ou le raisonnement par analogie. En fait, le mathématicien qui désire s'assurer de la parfaite correction, ou, comme

on dit, de la « rigueur » d'une démonstration ou d'une théorie, ne recourt guère à l'une des formalisations complètes dont on dispose aujourd'hui, ni même le plus souvent aux formalisations partielles et incomplètes fournies par le calcul algébrique et d'autres similaires ; il se contente en général d'amener l'exposé à un point où son expérience et son flair de mathématicien lui enseignent que la traduction en langage formalisé ne serait plus qu'un exercice de patience (sans doute fort pénible). Si, comme il arrive mainte et mainte fois, des doutes viennent à s'élever, c'est en définitive sur la possibilité d'aboutir sans ambigüité à une telle formalisation qu'ils portent, soit qu'un même mot soit employé en des sens variables suivant le contexte, soit que les règles de la syntaxe aient été violées par l'emploi inconscient de modes de raisonnement non spécifiquement autorisés par elles, soit encore qu'une erreur matérielle ait été commise. Ce dernier cas mis à part, le redressement se fait invariablement, tôt ou tard, par la rédaction de textes se rapprochant de plus en plus d'un texte formalisé, jusqu'à ce que, de l'avis général des mathématiciens, il soit devenu superflu de pousser ce travail plus loin ; autrement dit, c'est par une comparaison, plus ou moins explicite, avec les règles d'un langage formalisé, que se fait l'essai de la correction d'un texte mathématique.

C'est ainsi que la mise au clair de ce qu'est une démonstration au moyen d'un point de vue avant tout formaliste peut conduire à conforter l'idée de la perfection absolue de l'argumentation mathématique. Non seulement cette conception mérite d'être questionnée, mais, par un glissement insidieux, elle fait de la démonstration mathématique le modèle par excellence de la méthode rationnelle permettant, selon « les modernes [14] », l'accès direct et complet à la Vérité quel que soit le domaine ou le problème considéré.

4 Une conception empirique du jugement mathématique

4.1 L'expérience d'un jugement

L'interprétation formaliste précédente peut induire le biais qu'un jugement serait obtenu en tant que tel grâce au dispositif formel que constitue une démonstration formalisée, indépendamment des acteurs mathématiciens concernés, de leur appréhension de ladite démonstration, de leurs tentatives, de leurs discussions, de leurs calculs. Pour échapper à ce travers, il suffit de remarquer qu'une configuration de

14. Conformément à l'utilisation de ce terme dans l'EME [Latour 2013, « Livre », colonne « Vocabulaire », entrée « Modernes, modernisation »], « les modernes » désignent ces personnes qui adhèrent pleinement au grand récit de l'émancipation selon lequel, depuis la révolution scientifique, s'établirait progressivement mais irréversiblement la distinction absolue entre Illusion et Raison, entre un passé archaïque et un futur émancipé, entre Croyance et Savoir Vrai. Voir l'EME [Latour 2012, 2013] pour de plus amples développements sur ce thème et son rapport avec la crise écologique.

signes sur une feuille de papier ou un tableau ne devient éventuellement une démonstration – formelle ou pas – qu'à la condition que des acteurs humains puissent en faire l'expérience. Cette remarque nous met sur la voie d'une autre approche philosophique, cette fois-ci dans l'esprit de l'*empirisme radical* de William James [James 2005]. Cette doctrine est centrée sur la notion d'expérience, ce dernier terme se référant à tout ce dont un sujet individuel fait l'expérience dans le flux continu de sa propre vie. Autrement dit, l'expérience est le champ instantané du présent, à la fois continu et changeant, qui constitue le vécu de chaque personne. L'intérêt de l'empirisme jamesien pour notre questionnement se manifeste dans le principe suivant qui en offre un résumé percutant :

> *N'admettre que ce dont on puisse faire l'expérience, et rendre justice à tout ce qui peut être objet d'expérience*[15].

De ce point de vue, un jugement, plus exactement l'affirmation d'un jugement ou l'adhésion à un jugement, est une expérience d'un certain type qu'il faut maintenant essayer de décrire.

La question est de savoir ce qui caractérise les jugements parmi les expériences porteuses de connaissance. La réponse qui va être donnée est inspirée par la lecture du travail [Martin-Löf 1987] du logicien, mathématicien et philosophe Per Martin-Löf, connu entre autres comme le concepteur de l'étonnante et riche *théorie constructive des types*. Néanmoins, les développements qui vont suivre ne sont pas dans la droite ligne de l'analyse de Martin-Löf. De fait, cet auteur ne se réfère pas directement à l'empirisme ou au pragmatisme de James. Ses sources sont plutôt l'œuvre de Kant et surtout la phénoménologie à travers les analyses de Husserl sur les fondements de la logique[16]. Néanmoins, l'intuitionnisme auquel se réfère Martin-Löf n'est pas totalement étranger à l'empirisme, comme relevé dans [Bourdeau 2004].

La propriété fondamentale qui fait qu'un énoncé mathématique est un jugement est qu'*on sait qu'on a le droit de l'affirmer* : il possède une démonstration. Pour l'instant, rien de bien nouveau. La divergence avec le point de vue formaliste se marque si l'on insiste sur la nature de cette connaissance simplement en mettant en avant la notion d'expérience. C'est ce qui est fait avec la définition suivante qui va jouer un rôle essentiel dans les développements qui suivent.

> *Une* expérience de démonstration *d'un jugement est une expérience par laquelle un mathématicien saisit l'évidence de ce jugement.*

On peut dire qu'une expérience de démonstration est une expérience par laquelle ce mathématicien littéralement *voit* ce jugement ; alors, pour le sujet de cette expé-

15. Cette formulation provient de la préface de [James 2005].

16. De plus, dans ses travaux, Martin-Löf se réfère explicitement à l'intuitionnisme dont il est un représentant ancré dans la période contemporaine *post* 1960. Contrairement au maitre Brouwer initiateur de ce courant, il ne jette pas l'opprobre sur le langage et les langues formelles. Néanmoins, il est profondément fidèle à l'exigence de sens qui constitue le trait principal de l'intuitionnisme. Cela se retrouve dans son interprétation de la démonstration d'un jugement qu'il donne dans [Martin-Löf 1987], qui a inspiré la définition donnée dans le présent travail. Voir la présentation synthétique [Bourdeau 2004] pour plus de précisions sur l'intuitionnisme et l'apport de Martin-Löf.

rience, le jugement *est*, pleinement, sans restriction au point qu'il lui est impensable d'en douter, de s'y soustraire. Chaque terme de la définition a son importance : « expérience » bien entendu pour qualifier un segment du flux de la vie propre à un individu (ce qui n'empêche pas que la conclusion de l'expérience puisse être partagée : ce point sera discuté dans la partie 4.2), « mathématicien » pour indiquer que la reconnaissance pleine et entière de cette expérience nécessite une compétence généralement acquise par l'enseignement et la pratique au sein d'une communauté scientifique spécifique, enfin « l'évidence » pour marquer qu'une expérience de démonstration rend visible et manifeste le jugement, qu'elle expose au regard la totalité d'un arrangement qui le valide sans conteste et l'établit comme fait mathématique. Dans l'utilisation qui vient d'en être faite, les expressions « voir un jugement », « rendre visible » ou « exposer au regard » ne sont pas de simples métaphores destinées à désigner la saisie directe par l'esprit de propriétés abstraites. Comme l'a montré Peirce, la dimension diagrammatique des mathématiques permet au mathématicien d'amener dans sa perception sensible (en général la vision) la forme de la configuration abstraite dont il traite, et il peut ainsi l'observer et la manipuler avec la force brute que donne cette perception.

Afin d'illustrer ce qu'est cette expérience de la vision d'un jugement, considérons l'exemple de la Proposition 32 du Livre I des *Éléments* d'Euclide qui énonce le jugement selon lequel *la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits*. Cet exemple est intéressant du fait qu'il est relativement élémentaire tout en étant caractéristique de la démarche inaugurée par les Grecs. La démonstration est basée sur le diagramme présenté dans la figure 3. Sur ce diagramme se distinguent en traits continus la donnée initiale d'un triangle ABC et en traits discontinus une construction auxiliaire telle que B, C et D soient alignés et se succèdent dans cet ordre sur cette droite et que CE soit parallèle à BA, le point E étant situé du même côté de la droite prolongeant BC que le point A. Imaginons l'expérience vécue par un mathématicien

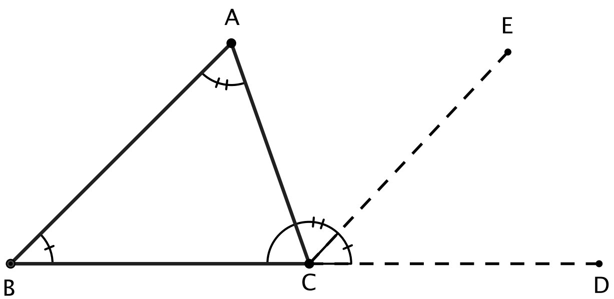

FIGURE 3 – Un diagramme avec lettres analogue à celui qui accompagne la Proposition 32 du Livre I des *Éléments* d'Euclide.

qui scrute ce diagramme. En se remémorant le schéma général des angles définis par deux droites parallèles coupées par une sécante et les relations d'égalité afférentes, cet observateur note les égalités d'angles suivantes : $\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{ECD}}$ et $\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{ACE}}$. Alors ce scrutateur géomètre ne peut qu'être saisi par l'évidence du jugement considéré qui se donne à voir complètement et clairement sur le diagramme.

Cette expérience qu'est une expérience de démonstration d'un jugement est en partie un acte mental, mais elle ne se réduit pas au moment ultime pendant lequel le mathématicien est saisi par cette évidence. Ce moment est préparé par la démarche souvent laborieuse d'analyse critique et d'appropriation à laquelle se livre le mathématicien en composant ou en décryptant une inscription faite de textes, de figures, de schémas, de formules, de calculs, etc. Ce n'est qu'à la fin de cette phase d'exploration et de confrontation que cette expérience peut éventuellement surgir pleine et entière. C'est la totalité du processus menant à l'évidence finale qui est l'expérience de démonstration. Autrement dit, le succès de la phase finale de l'expérience de démonstration se manifeste dans la conscience du mathématicien mais il dépend grandement de l'inscription scripto-visuelle sur laquelle s'appuie ce processus et plus généralement des conditions cognitives caractéristiques des mathématiques et de la dimension diagrammatique de cette discipline mises en lumière dans les travaux de Netz et Peirce présentés dans la partie 2.

Contrairement à l'approche formaliste de la démonstration évoquée dans la partie 3, une expérience de démonstration d'un jugement ne se fonde pas sur l'utilisation explicite de techniques et méthodes logiques. Ce qui justifie une expérience de démonstration d'un jugement par un mathématicien, c'est la mise en place par ce dernier d'un dispositif dont l'expérience est vécue comme la manifestation incontestable du bien-fondé – l'évidence – de ce jugement. Dans l'ordre conceptuel, cette manifestation de l'évidence mathématique précède l'analyse logique du raisonnement, qui elle procède d'une mise en forme postérieure à l'expérience de démonstration. En général, cette évidence n'est pas immédiatement accessible. Le travail de construction d'une expérience de démonstration auquel se livre le mathématicien consiste à fabriquer un cheminement souvent indirect, permettant de transporter étape par étape l'évidence jusqu'à obtenir l'évidence finale du jugement. Ce transport de l'évidence produit à chaque étape une expérience de démonstration d'un jugement intermédiaire. Ainsi, il apparait qu'une expérience de démonstration d'un jugement se scinde elle-même en une succession d'expériences de jugements intermédiaires, c'est-à-dire en une succession d'expériences de l'évidence de chacun de ces jugements. Nous proposons de lire le passage suivant de Hermann Weyl dans ce sens.

> Le célèbre ouvrage de Dedekind, *Nature et fonction du nombre*, 1888, préf. 1re éd., s'ouvre sur cette phrase : « Ce qui est démontrable ne doit pas, en science, être cru sans démonstration ». Cette assertion est probablement typique de la pensée de la plupart des mathématiciens, elle n'en prend pas moins les choses à l'envers. Comme si un rapport de fondation aussi médiat que celui que nous nommons démonstration, était capable de susciter une « croyance » sans que nous nous assurions de l'exactitude de chaque pas isolé au moyen d'une intuition immédiate ! C'est cette intuition (non pas la démonstration), qui est partout la source ultime de

la connaissance, elle consiste à avoir « l'expérience directe du vrai [17] ». [Weyl 1994, p. 59.]

Ainsi, par l'expérience de démonstration globale, l'évidence se propage de jugement en jugement pour culminer par l'évidence du jugement final.

Mais d'où vient la puissance de la conviction attachée à une expérience de démonstration d'un jugement, cette certitude qui a impressionné les philosophes au point d'y voir le paradigme d'un accès direct à la Vérité ? Pourquoi la « certitude nécessaire », c'est-à-dire le type de confiance que l'on accorde à un résultat qui résulte d'une expérience de démonstration, est-elle considérée comme l'une des formes de certitude la plus incontestable qui soit ? Il y aurait lieu d'approfondir ces questions et de relativiser certaines de ces formulations, par exemple en discutant les arguments développés par Wittgenstein dans [Wittgenstein 2006] et par Dewey dans [Dewey 2014], ce qui n'est pas fait sinon de manière allusive dans le cadre de la présente contribution. Pour l'instant, il suffit de constater que c'est la notion même d'expérience de démonstration telle qu'elle vient d'être définie qui explique la puissance de la certitude nécessaire. Celui qui éprouve une expérience de démonstration d'un jugement, c'est-à-dire celui qui est saisi par l'évidence du résultat énoncé, est absolument certain de la validité du jugement considéré. À l'opposé, celui qui admet qu'un résultat est démontré mais dont la conviction est mitigée d'une dose de doute, celui-ci n'a simplement pas éprouvé une expérience de démonstration de ce résultat. Comme le montrera le point 2 de la partie 4.4, ce n'est pas une question de force qui distingue la conviction attachée à une expérience de démonstration d'un jugement, c'est une question de qualité, celle qui résulte du cheminement de l'évidence qui aboutit en pleine lumière, sans zone d'ombre et sans délégation à un oracle [18], au jugement considéré. Rappelons encore une fois que la nature même d'une expérience de démonstration et la qualité de la certitude nécessaire qui en découle, sont profondément dépendantes des conditions et dispositifs propres aux mathématiques précisés par Netz et Peirce [19].

4.2 Inscription de démonstration et partage d'un jugement

Maintenant qu'a été introduit le concept d'expérience de démonstration, il est notable que cette notion ne recouvre pas la totalité des significations contenues dans

17. Weyl cite ici Edmund Husserl : « Une évidence n'est, au contraire, rien d'autre que "l'expérience vécue" de la vérité » [Husserl 1959, § 51].

18. Un oracle contemporain pourrait être : l'avis d'un expert assurant d'autorité que telle démonstration est valide, ou bien encore le recours à un calcul sur machine approprié pour gérer tout ou partie d'une démonstration (voir le point 2 de la partie 4.4). En toute rigueur, l'argument selon lequel tel jugement est acquis du seul fait qu'il a fait l'objet d'une publication est aussi une forme de recours à un oracle...

19. D'ailleurs, c'est lorsque ces conditions sont mises à mal par l'étendue et la complexité du champ mathématique considéré que la certitude nécessaire peut commencer à être mise en doute ; c'est par exemple le sens de certaines déclarations du mathématicien Vladimir Voevodsky à propos de son absence de confiance en de nombreux résultats célèbres et publiés de son domaine de recherche, y compris les siens.

l'idée usuelle de démonstration. En effet, dans un texte de mathématiques (livre, article ou lettre), la partie du document qui est censée justifier un théorème est elle-même qualifiée de démonstration (ou de preuve) du théorème. Or il est clair que cet objet concret qu'est la démonstration en ce sens est quelque chose de différent de l'expérience de démonstration du théorème en question. C'est d'autant plus clair pour un mathématicien qui sait que généralement, la simple lecture d'une démonstration d'un théorème est loin de suffire pour en éprouver l'évidence. Sa pratique des mathématiques lui a montré qu'avant d'atteindre cette évidence, il est souvent nécessaire de se livrer à un travail d'exploration de cette démonstration, et que cette tâche est délicate, et son issue incertaine. La définition qui suit permet de préciser utilement cette distinction.

> *Une* inscription de démonstration *d'un jugement donné est une inscription scripto-visuelle (couchée sur le papier, tracée sur un tableau, enregistrée dans un fichier informatique...) présentant une configuration d'arguments textuels et graphiques susceptible en principe de permettre ou de favoriser l'expérience de démonstration du jugement.*

La notion d'inscription de démonstration d'un jugement est donc intrinsèquement différente de celle d'expérience de démonstration puisque la première est une forme faite de textes, de tableaux, de schémas, de diagrammes, et que la seconde est une expérience se concluant chez celui qui l'éprouve par l'acte mental de l'évidence du jugement.

Néanmoins, ces deux notions sont liées. Ou bien l'inscription de la démonstration est élaborée en même temps que l'auteur cherche à éprouver la validité d'un énoncé, validité qui est finalement attestée par l'expérience de la démonstration. Dans ce cas, la recherche de cette expérience oriente la fabrication d'une inscription, et cette dernière, au fur et à mesure de son élaboration, offre un outil scripto-visuel stable facilitant l'avènement de l'expérience de la démonstration. Ou bien on dispose *a priori* d'une démonstration déjà rédigée, et un travail d'investigation basé sur cette inscription est susceptible d'être constitutif d'une expérience de démonstration du jugement considéré. Ainsi, *une inscription de démonstration d'un jugement joue le rôle d'un guide pour le cheminement de l'évidence jusqu'à l'expérience de démonstration de ce jugement*[20]. Finalement, c'est l'idée habituelle de démonstration qui est scindée en les deux notions différentes mais complémentaires que sont l'inscription de démonstration et l'expérience de démonstration[21].

L'intérêt principal d'une inscription de démonstration d'un jugement est de conserver et de communiquer des éléments permettant de valider ce jugement. L'acte de communiquer la démonstration d'un jugement est essentiel dans la vie scientifique

20. C'est un peu le même rapport qui existe entre le topo-guide décrivant une randonnée (bel exemple d'inscription scripto-visuelle) et l'accomplissement sur le terrain de cette même randonnée (expérience éventuellement délicate et incertaine).

21. Cette manière de distinguer deux notions différentes dans celle de démonstration est d'usage purement philosophique. Elle ne vise aucunement à s'imposer dans la pratique des mathématiciens.

de la communauté des mathématiciens. Cet acte présuppose la croyance que la démontrabilité d'un jugement est une notion partageable.

Pourtant, il va de soi qu'une expérience de démonstration d'un jugement est essentiellement privée du fait que l'expérience éprouvée par un individu lui appartient en tant que moment de sa vie propre et que toute autre personne est dans l'incapacité d'y accéder pleinement. Néanmoins, on constate dans la pratique de la communauté des mathématiciens que la validation d'un jugement est une notion partageable : dans de très nombreux cas, les mathématiciens se mettent d'accord pour reconnaitre qu'une inscription de démonstration permet de valider un jugement, ce qui signifie qu'un travail d'exploration de ce document génère une expérience de démonstration du jugement chez un nombre suffisant de mathématiciens concernés.

Avec Wittgenstein, nous pouvons estimer que cette propriété ne relève pas d'une explication philosophique mais d'un arrière-fond de pratiques et de formes de vie [Wittgenstein 2004]. À l'origine de ce contexte de pratiques partagées, il y a l'enseignement de cette science, dans lequel on apprend collectivement à éprouver l'évidence de tel ou tel énoncé. En ce sens, l'apprentissage des mathématiques est aussi un apprentissage collectif de la notion de démontrabilité et du consensus qui en découle. Finalement, faire des mathématiques, c'est être implicitement convaincu que la validité d'un raisonnement mathématique est une notion qui a un sens collectif. D'ailleurs, il est fréquent que la construction d'une démonstration soit l'œuvre non pas d'une seule personne mais de tout un groupe de protagonistes [22].

Lorsqu'un jugement est partagé par un nombre significatif d'acteurs compétents sur le sujet, la communauté des mathématiciens accorde sa confiance à ce jugement. Cela implique que ce résultat devient une sorte de « fait mathématique » sur lequel tout mathématicien peut s'appuyer sans être dans l'obligation d'en éprouver lui-même l'évidence. Cette forme d'acceptation communautaire d'un nouveau jugement est rendue nécessaire par l'étendue et la vitesse actuelle de développement du champ mathématique. Sans doute que dans l'Antiquité, même dans sa période tardive, l'extension du domaine mathématique permettait à tout amateur sérieux d'en maitriser lui-même l'étendue sans avoir à s'en remettre à l'avis de ses pairs.

Cette manière de procéder peut sembler être une forme de recours à un oracle, mais elle en diffère parce que d'une part il y a eu partage de la démonstration par un panel d'experts de confiance, et que d'autre part il est toujours possible à quiconque de se reporter à la démonstration. Ce dernier argument n'est pas tout à fait réaliste du fait de la grande spécialisation des mathématiques actuelles et de l'extrême complexité de certaines démonstrations. Quoi qu'il en soit, le processus de validation d'un

22. Dans ce dernier cas, on peut estimer que le partage de l'expérience de l'évidence va au delà de la simple juxtaposition d'expériences indépendantes. En effet, l'intensité de la communication entre les interlocuteurs dans ses aspects verbaux et non verbaux (intonations, gestes, regards complices, sons divers, etc.) peut réussir à percer quelque peu l'extériorité de ces expériences en instaurant une forme de partage un peu plus conséquent. Cette situation est en partie analogue à celle qui aboutit au partage du monde physique qui nous entoure par l'intermédiaire de nos expériences perceptives, partage défendu fermement par James [James 2005] pour qui l'empirisme radical n'est pas un solipsisme.

nouveau jugement est organisé en deux niveaux se succédant dans le temps : le niveau individuel ou quasi-individuel lorsqu'un ou quelques acteurs font l'expérience initiale de l'évidence de ce jugement et en communiquent une inscription de démonstration, puis le niveau collectif lorsqu'un nombre significatif d'autres acteurs compétents partagent ce jugement en approuvant l'inscription de démonstration. L'existence de ces deux niveaux renforce considérablement la fiabilité des jugements mathématiques. Enfin, ce mécanisme de validation collectif en deux étapes ne doit pas occulter le fait que, *in fine*, c'est l'expérience de démonstration qui constitue la pierre angulaire et la spécificité de l'activité mathématique, même lorsque cette expérience est déléguée à un groupe d'experts lors de la deuxième étape du processus d'évaluation. En dernier ressort, c'est sur cette expérience que repose toute la procédure.

4.3 Le phénomène des erreurs *post demonstratio*

Dans la vie courante, les raisonnements que nous faisons semblent souvent bien fragiles : facilement remis en cause, ils sont la plupart du temps l'occasion de querelles sans issues. La contemplation des divers débats publics dans nos démocraties fatiguées en fournit un exemple saisissant. *A contrario*, les raisonnements mathématiques ont la réputation d'être d'une solidité infaillible et d'imposer de fait un consensus. C'est en partie justifié par la nature même de la validation d'un jugement mathématique en deux étapes, explicitées dans la partie 4.2 précédente, qui constituent un réquisit d'une très grande exigence excluant en principe la contestation. Néanmoins, l'idée d'un discours parfait tel que l'ont pensé les philosophes platoniciens de l'Antiquité ou les laudateurs contemporains de l'essence formelle des mathématiques, idée excluant par essence toute faute, résulte d'un glissement abusif. La manifestation la plus claire de cet abus de réputation réside dans le phénomène des erreurs *post demonstratio*. Le caractère irrépressible de ce phénomène a été remarquée par Martin-Löf dans son étude [Martin-Löf 1987]. La terminologie « erreur *post demonstratio* » est introduite par les auteurs du présent texte. Cette dernière ne doit pas être confondue avec la faute commise par l'apprenti mathématicien qui ne sait pas encore articuler un raisonnement mathématique. Le terme d'erreur *post demonstratio* est employé lorsque : 1) à un moment donné, un jugement est validé par la procédure décrite précédemment ; 2) à un moment ultérieur, éventuellement longtemps après, une erreur est découverte dans cette validation. La manifestation de cette erreur est la découverte d'un argument nouveau dont l'effet concret est de rendre impossible l'expérience de l'évidence de ce jugement. Bien que ne mettant pas en péril l'édifice des mathématiques, la fréquence d'apparition de ces erreurs est cependant non négligeable. D'ailleurs, tout mathématicien sait très bien qu'il lui arrive de trouver des erreurs dans des raisonnements préalablement validés, que ces raisonnements proviennent de lui-même ou d'une autre personne, qu'ils soient déjà publiés ou non dans la littérature scientifique. Habituellement, la présence de ce type d'erreur est analysée comme la simple marque de l'imperfection ou de la finitude de l'esprit humain. Il en découle que les conséquences philosophiques du phénomène des erreurs *post demonstratio* ne sont pas correctement perçues.

Il est vrai que l'on est face à un paradoxe. D'une part, le processus de la démonstration – expérience de l'évidence, inscription guidant cette expérience, partage de l'évidence guidée par l'inscription – est agencé, admirablement agencé peut-on ajouter, pour exclure les erreurs : mener à son terme ce processus est la méthode, initiée en grande partie par les mathématiciens grecs, qui apporte la garantie que le raisonnement ainsi produit est valide, exempt de toute faute. Mais d'autre part, la nature même de cette procédure ne permet pas d'exclure définitivement la possibilité qu'une erreur puisse être détectée par la suite. La raison en est qu'*il n'y a aucun moyen extérieur à l'expérience de démonstration d'un jugement qui puisse permettre de s'assurer définitivement de sa validité. La fiabilité d'une démonstration se fonde uniquement sur une forme d'expérience humaine, celle de l'évidence d'un jugement.* C'est déjà beaucoup, surtout si l'inscription qui appuie cette expérience est reconnue comme valide par une large communauté. Mais le raisonnement mathématique ne peut pas prétendre atteindre une perfection sans faille, une forme de validité éternelle, acquise pour la nuit des temps, car rien dans ce qui constitue la pratique des mathématiques ne peut justifier cette prétention. Une simple expérience humaine n'étant pas taillée pour atteindre l'absolue perfection, il faut se résoudre à reconnaitre une irréductible part de fragilité aux résultats mathématiques.

Ainsi, l'assurance d'une garantie absolue du bien-fondé d'un jugement transcendant l'expérience de démonstration est un mythe et un non-sens. La technique de la démonstration d'un jugement est la méthode mise au point par les hommes pour attester de la validité de ce jugement ; faute d'être acquise à tout jamais, cette validité est assurée dans le temps de l'expérience humaine, c'est-à-dire tant qu'il y aura des hommes qui exploreront la démonstration de ce jugement pour en éprouver l'évidence et qui confronteront ce jugement avec les nouveaux acquis mathématiques avec lesquels il pourrait être en relation. D'ailleurs, il est notable que les mathématiciens préfèrent généralement revisiter les démonstrations des jugements qu'ils doivent utiliser dans leur propre travail plutôt que de les admettre directement [23].

D'une certaine manière, c'est la croyance que la technique de la démonstration n'est qu'un moyen pour accéder à une instance extérieure à cette expérience qui fonde l'idée de l'incontestabilité du raisonnement mathématique. Pour les philosophes platoniciens, cette instance était le monde transcendant des idées pures. Pour les modernes d'aujourd'hui, cette instance est plus volontiers le monde des objets formels. D'où cet ultime refuge pour la thèse de l'infaillibilité du discours mathématique : un raisonnement formalisé, c'est-à-dire complètement coulé dans le moule syntaxique de l'une des théories formalisant la pratique des mathématiques, peut sembler par essence complètement imparable. Si on admet cette thèse, on est alors tenté de voir à nouveau tout raisonnement usuel comme une approximation nécessairement imparfaite

23. Bien entendu, il ne s'agit que d'une préférence, et un mathématicien n'a pas toujours la possibilité de retraverser tous les outils qu'il utilise. C'est le cas pour certains théorèmes de nos mathématiques actuelles dont la démonstration complète nécessite plusieurs milliers de pages comme par exemple le « théorème énorme » qui classifie les groupes simples finis.

d'un objet formel parfait (voir la citation de Bourbaki page 15), ce qui expliquerait à la fois la présence d'erreurs cachées dans la pratique ordinaire des mathématiques et une stratégie pour les éviter, à savoir celle de s'approcher autant que faire se peut de la formalisation complète. Mais qu'est-ce qu'une démonstration formelle ? Comme cela a déjà été noté, une configuration de signes sur un support quelconque ne peut prendre le statut de démonstration formelle que dans le cas où elle est identifiée comme telle dans le cadre d'une expérience d'un sujet mathématicien. Quelle que soit la nature de cette expérience, il ne s'agit que d'une simple expérience humaine, inapte à fonder une infaillibilité sans restriction. En conséquence, la stratégie consistant à assoir la perfection absolue d'un raisonnement mathématique aboutissant à un certain jugement en le formalisant complètement ne peut pas fonctionner : à supposer que l'on soit capable de procéder à cette formalisation, cela ne ferait que déplacer la possible intrusion future d'erreurs dans l'expérience qui assure que l'entité syntaxique obtenue possède la qualité de démonstration formelle [24].

Finalement, il n'existe pas de méthode permettant de s'assurer définitivement de la validité absolue d'une démonstration. D'ailleurs, s'il en existait une, il suffirait de l'appliquer à chaque démonstration produite pour être certain qu'elle ne sera jamais mise en défaut par le surgissement d'une erreur. Néanmoins, il ne faut pas en déduire que le raisonnement mathématique est miné par des erreurs potentielles. Ce que révèle l'analyse précédente, c'est que le mécanisme de la preuve ne permet pas d'exclure à tout jamais la possibilité d'une erreur, ce qui ne veut pas dire qu'il y aura dans le futur – certainement ou avec une grande probabilité – apparition d'erreurs. De fait, en l'absence d'une instance transcendante permettant d'évaluer dans l'absolu un jugement donné, une expérience de démonstration de ce jugement offre une excellente garantie sur sa validité, à la fois extrêmement solide et limpide sur son fondement [25].

4.4 Deux remarques

1. Jusqu'à ce point, l'analyse présentée auparavant n'a nullement pris en compte les fortes différences, pratiques et théoriques, qui en gros scindent la communauté des mathématiciens en deux écoles, d'une part les mathématiques classiques, et d'autre part les mathématiques constructives [26]. En fait, la présentation d'une conception

24. Ce qui ne veut pas dire que le travail sur les démonstrations formelles ne présente pas d'intérêt scientifique ! C'est seulement une certaine utilisation de ces développements formels à des fins philosophiques qui est critiquée ici.

25. Cette garantie est quelque peu mise à mal par la course à la publication qui anime la recherche actuelle. Même en mathématiques, cette fièvre productiviste pousse à ne pas trop se poser de question sur la fiabilité des outils utilisés et hélas aussi sur la qualité des preuves. D'où des erreurs fréquentes qui sont relevées par les relecteurs des articles, du moins lorsque ces derniers acceptent de dégager le temps nécessaire à cette tâche, au détriment de leurs propres publications...

26. En termes d'effectif, ces deux écoles sont inégales puisque seulement une minorité de mathématiciens peuvent être qualifiés de constructivistes. Cette disparité n'empêche pas le courant constructiviste d'avoir à nouveau une grande importance, en particulier du fait de ses liens forts, théoriques et pratiques, avec l'informatique et la logique.

non formaliste de la démonstration présentée ci-haut est censée s'appliquer de manière égale aux mathématiques développées dans ces deux groupes. Cela peut paraitre étonnant à un lecteur connaisseur de l'histoire des mathématiques depuis la fin du 19e siècle, qui sait parfaitement que ces deux courants s'opposent en particulier sur ce que doit être une démonstration. De plus, ce même lecteur peut aussi remarquer que la définition de la notion d'expérience de démonstration donnée dans la partie 4.1 semble relativement proche des conceptions philosophiques développées dans l'intuitionnisme, comme l'indique la note 16 faisant référence à Martin-Löf. Cependant, les auteurs du présent texte défendent que, au delà de l'opposition philosophique sur la querelle des fondements, c'est la forme paradigmatique de la notion de démonstration, telle qu'elle est pratiquée depuis les Grecs, qui est bien captée par la définition choisie ici. Tout mathématicien, classique ou constructiviste, admet la validité d'une démonstration lorsque, au terme d'un travail d'exploration et de maturation, il est saisi par l'évidence de la conclusion. Jusqu'à maintenant, cette expérience de la démonstration est constitutive de l'essence de l'activité mathématique, et elle transcende les controverses. C'est dans le choix des moyens utilisés pour édifier la démonstration que l'opposition est pertinente [27]. Par exemple, l'utilisation de la règle du tiers exclu est jugée légitime par un mathématicien classique au sens où elle lui semble marquée par l'évidence, alors que cette utilisation est rejetée par un mathématicien constructiviste pour qui ce même moyen rompt le cheminement de l'évidence [28].

2. Une autre question non encore abordée dans cette discussion est relative à l'utilisation de calculs sur machine dans une démonstration. En effet, de manière analogue à ce qui se passe dans toutes les autres sciences, les progrès technologiques et théoriques font apparaitre des dispositifs de calcul susceptibles d'être utilisés dans la vérification ou la construction de démonstrations. C'est le cas des assistants de preuve comme le logiciel *Coq* [Coq development team 1984-2018] qui permettent de vérifier, de compléter ou même de construire des démonstrations. Un exemple maintenant classique de la réussite de cette démarche est le théorème des quatre couleurs dont la démonstration complètement certifiée a été obtenue en 2004 [Gonthier 2005] et dont on ne possède aucune démonstration pouvant se passer de calculs sur machine.

Pour illustrer l'impact de l'usage des ordinateurs par un exemple simple, imaginons d'abord que la seule démonstration que nous aurions de ce que la somme des nombres entiers de 1 à 2 millions fait 2 billions et 1 million était l'inscription du calcul de cette somme sur une machine ; or nous avons une démonstration, qui est que cette somme est aussi celle des nombres entiers de 2 millions à 1, et qu'en additionnant terme à terme les termes de ces deux sommes, on obtient 2 millions de fois

27. L'opposition est aussi totale en ce qui concerne la notion de vérité (voir par exemple la présentation donnée dans [Bourdeau 2004]). Cette dissension majeure ne semble pas affecter le fait qu'une démonstration est vécue comme l'expérience de l'évidence de sa conclusion.

28. À ce propos et en dehors de tout engagement partisan, les auteurs du présent texte ont pour leur part le sentiment que, en ce qui concerne le cheminement de l'évidence qui constitue le cœur de l'expérience de démonstration, les mathématiques constructives constituent un cadre plus favorable à la force de cette expérience.

2 millions et 1. L'évidence de cette démonstration nous parait d'une autre qualité que l'inscription du calcul.

La question est de savoir en quoi la notion de démonstration présentée auparavant pourrait être modifiée par ces nouvelles pratiques. Par exemple, considérons une démonstration dont une partie n'est validée que par un calcul sur machine ; est-ce qu'elle peut générer une démonstration au sens de l'expérience de l'évidence de son résultat ? À première vue, il semble que non parce que le cheminement de l'évidence guidé par la démonstration est *a priori* rompu : la partie de la démonstration prise en charge par la machine se présente comme une béance à ce niveau, du moins pour celui qui n'est pas capable de comprendre ce que fait le programme informatique. Notons que l'intrusion de la matérialité dans l'efficience des mathématiques n'est pas nouvelle et elle est même structurelle d'après la contribution de Netz sur l'émergence des mathématiques dans le monde grec ; ce qui semble nouveau avec la mécanisation des démonstrations est que le dispositif mis en œuvre certes peut apporter une réponse, mais que cette dernière n'est pas de nature à favoriser la démonstration au sens de l'expérience de l'évidence de sa conclusion.

Néanmoins, un mathématicien peut être en capacité de saisir le fonctionnement de la machine, d'en démontrer la correction, pour finalement estimer que, tant bien que mal, l'évidence poursuit son chemin dans la partie traitée machinellement. Encore faut-il avoir une confiance absolue en le dispositif électronique piloté par le programme qui effectue la tâche demandée. Il faudrait une confiance de l'ordre de celle que l'on accorde à un résultat mathématique validé par une démonstration, c'est-à-dire, une confiance qui exclut totalement le doute du fait que l'on est pénétré de son évidence par le contrôle que l'on a pu exercer sur l'intégralité du processus qui valide le résultat. On voit bien que cela ne peut pas fonctionner ainsi. Dans le cas considéré, le détail du fonctionnement intime du processus machinel qui valide le résultat n'est justement pas accessible (nous négligeons ici une défaillance toujours possible au niveau matériel de la mise en œuvre par une machine concrète). Comme indiqué dans la la note 18, on est dans le cas de l'utilisation explicite d'un oracle selon la terminologie utilisée à la fin de la partie 4.1.

Force est de constater que les mathématiques tributaires de telles démarches informatiques se rapprochent des autres sciences comme la physique qui dépendent de manière plus ou moins essentielle de dispositifs matériels expérimentaux. Mais alors il faut être conscient que ces mathématiques nouvelles sont, dans leur méthode même, d'une nature différente du procédé de la démonstration instauré par les Grecs, qui depuis ce moment inaugural a constitué l'originalité et la marque distinctive de cette discipline. Il est possible que ce soit une nouvelle science qui émerge de cette manière, à la frontière des mathématiques, de la logique et de l'informatique : une science dont les objets sont les démonstrations formelles, et dont la démarche est fortement dépendante d'outils informatiques puissants. La confiance accordée aux résultats fournis par ces démarches peut être très forte car le travail scientifique concerné est souvent de qualité incontestable. Par exemple, la certification *Coq*, label donné à un résultat vérifié par l'assistant de preuve *Coq*, est considérée comme une forme très haute de validité [29], à tel point que si un résultat obtenu par *Coq* entrait en contradiction avec un jugement validé par une démonstration au sens développé précédemment de l'évidence vécue, il ne va pas de soi que la confiance serait prioritairement accordée au deuxième. Autrement dit, sur le plan de la force de la confiance, un résultat certifié par *Coq* n'a rien à envier à un résultat certifié par une démonstration. Mais ce n'est pas la force en elle-même de la confiance accordée à un résultat qui est la marque distinctive de l'essence de la démarche mathématique. C'est la nature du processus qui légitime le résultat, à savoir la démonstration comme expérience de son évidence qui est spécifique aux mathématiques depuis les Grecs. Cette expérience crée chez celui qui l'éprouve une forme de rapport particulier avec le résultat validé, rapport qui est incompatible avec la délégation d'une partie de la démonstration à un oracle.

5 Conclusion : vers un mode d'existence pour les mathématiques

Cette partie terminale a pour objet principal d'introduire une forme de mode d'existence propre aux êtres mathématiques respectant le patron de l'EME et de discuter le placement de ce mode dans celui de la référence [REF]. Préalablement, quelques précisions doivent être apportées relativement au mode [REF] et à la notion générale de mode d'existence au sens de l'EME.

5.1 Quelques précisions sur les modes d'existence en général et sur le mode [REF] en particulier

Il n'est guère utile pour un lecteur ne connaissant pas le sujet de donner une description de la notion de mode d'existence selon l'EME en égrenant les termes du métalangage qui a été forgé pour fixer un cadre général à cette notion. Il est certainement préférable d'évoquer préalablement un cas concret. C'est ce qui va être fait avec la présentation succincte de la manière dont le travail d'une mission scientifique de terrain est analysé par l'anthropologie des sciences. Le type de pratique scientifique correspondant à cette mission semble de prime abord aussi éloigné que possible de la pratique des mathématiques, ce qui devrait permettre par la suite de mieux faire apparaitre les analogies et différences entre les modalités d'existence des êtres sous-jacents à ces pratiques.

29. Plus précisément, la certification a lieu sur la base d'une inscription de démonstration spécialement adaptée à l'assistant de preuve, élaborée à partir d'une démonstration dont un mathématicien a fait l'expérience et qu'il a rédigée. Alors pourquoi certifier ? Trois raisons nous viennent à l'esprit : les erreurs *post demonstratio* (c'est la motivation initiale de Voevodsky, qui a été très affecté par de telles erreurs comme évoqué dans la note 19) ; convaincre les autres mathématiciens de la correction de la démonstration et en particulier de l'absence d'oubli d'un cas particulier parmi un grand nombre d'autres (théorème de Hales de la conjecture de Kepler, théorème des quatre couleurs) ; développer la certification en tant que discipline scientifique (théorème de Feit-Thompson ; on peut noter qu'au cours de la certification de ce théorème, quelques erreurs de la démonstration originelle ont été corrigées, mais qu'elles étaient superficielles).

L'exemple choisi est celui de la lumineuse étude [30] développée dans [Latour 2001]. Ce texte analyse le travail d'une mission scientifique dont l'objet est de comprendre la dynamique de la transition forêt-savane dans une région reculée du Brésil proche de Boa Vista. L'étude montre l'élaboration concrète d'une chaine de médiations – maintenant appelée chaine de référence – depuis le choix de la parcelle choisie pour mener l'investigation, la triangulation de cette parcelle à l'aide d'un « pédofil [31] », les prélèvements d'échantillons de terre à différentes profondeurs et leur placement dans une pédocomparateur [32], les traitements de ces échantillons permettant d'extraire du pédocomparateur des tableaux numériques, enfin l'élaboration d'un diagramme final tenant sur une simple feuille de papier et résumant à lui tout seul l'investigation, la conclusion de cette dernière sur la structure du sol au voisinage de la lisière et la formulation de l'hypothèse d'une probable avancée dans le temps de la forêt sur la savane grâce au laborieux travail des vers de terre. Cette chaine est donc constituée par la succession d'inscriptions scripto-visuelles, chacune étant plus abstraite et moins matérielle que la précédente. Le choix judicieux de ces formes, le protocole très précis avec lequel ce choix est fait ainsi que l'opération qui fait passer d'une inscription à la suivante, tout cela permet à l'information de circuler dans les deux sens le long de la chaine, entre les points extrêmes que sont la parcelle initiale et le diagramme final. L'évolution des inscriptions le long de la chaine va vers la simplicité perceptive en passant graduellement de l'indéchiffrable fouillis du terrain initialement choisi au limpide diagramme terminal. En effet, la fonction de la chaine est d'arriver à une inscription finale qui soit suffisamment claire, simple et significative pour emporter la conviction des chercheurs concernés. Finalement, ce que l'on pourrait nommer de manière quelque peu pédante « l'ontologie objective de la nature du sol transversalement à la lisière » est ce que donne à voir le diagramme final en gardant soigneusement en mémoire la circulation de la référence tout le long de la chaine.

Cette description met concrètement en évidence les traits principaux des chaines de référence. Selon l'EME, ces chaines d'inscriptions sont au cœur du mode d'existence [REF], au sens où quelque chose existe objectivement lorsque l'on peut mettre en place une chaine de référence qui établit cette chose *via* la cascade d'inscriptions constituée par cette chaine. La dissemblance, l'éloignement entre chaque inscription et l'inscription suivante est appelée le *hiatus* propre au mode [REF]. Ce hiatus peut être perçu au niveau très général de la seule dissemblance de deux inscriptions en tant que simples entités scripto-visuelles (dissemblance que l'on pourrait interpréter comme des différences entre les parties textuelles ou graphiques de chacune des inscriptions). De manière plus spécifique, ce hiatus peut aussi signifier le manque *a priori* de conviction que la seconde inscription est conçue de manière à porter une information que l'on peut rapporter à la première, cette conviction étant une expé-

30. Cette étude est un splendide exercice de philosophie appliquée. La description qui en est donnée dans le présent article est d'une brièveté qui ne lui rend pas justice.

31. C'est le petit nom donné à un instrument permettant de mesurer les distances dans un terrain naturel encombré et non aplani.

32. Dispositif permettant de ranger des échantillons de terrain selon une disposition planaire en rapport avec la localisation des prélèvements.

rience recherchée par les acteurs scientifiques qui élaborent la chaine ou en prennent connaissance.

La *condition de félicité* qui permet de lisser une telle chaine est que l'opération qui fait passer d'une inscription à la suivante soit conçue de manière à préserver une certaine constance[33], de telle sorte que l'information lisible sur la deuxième inscription remonte à une information portée par l'inscription précédente. La dernière inscription d'une chaine de référence permet en principe de conclure mais elle n'a de valeur que par l'ensemble de la chaine qui, du fait des conditions de félicité, permet de faire transiter cette information en remontant pas à pas la chaine de manière à aboutir au phénomène initial sur lequel porte l'étude.

Après la présentation d'un exemple concret et de certains éléments du mode [REF] correspondant, il est temps d'énoncer quelques généralités significatives sur les modes d'existence au sens de l'EME. Un mode d'existence désigne un collectif d'entités partageant une même manière d'être et de s'animer, et dont la présence active peut être décelée dans notre modernité, du moins lorsqu'on abandonne le dogme selon lequel il y a une seule forme d'existence qui est celle de la vérité objective à laquelle la Science et la Raison donnent un accès direct et sans perte. L'une des idées-phares de l'EME est que, bien qu'une multiplicité de modes d'existence distincts puissent être distingués, ces derniers partagent des traits communs qui permettent de les identifier et de les classer. Ce sont principalement :

— un certain type de *trajectoire* qui est le support principal de l'existence dans le mode considéré – dans le cas de [REF], ce sont les chaines de référence ;
— un certain type de *hiatus* qui sépare deux étapes successives quelconques d'une trajectoire – dans le cas de [REF], c'est l'éloignement, la dissemblance entre deux inscriptions successives d'une chaine de référence ;
— un certain type de *conditions de félicité et d'infélicité* qui sont les conditions de vérité ou de fausseté propres au mode considéré – dans le cas de [REF], étant donnée une chaine de référence et une information qui émerge à la dernière étape de la chaine, la condition de félicité énonce que cette information est pertinente si elle peut être rapportée d'étape en étape en remontant toute la chaine de référence.

5.2 Un quasi-mode d'existence pour les mathématiques

Le propos de cette partie est de décrire le fonctionnement, la manière d'être et de se présenter à nous, des êtres qui se manifestent quand un mathématicien (ou un groupe de mathématiciens) met au point un développement mathématique ou parcourt un tel développement. Comme cette description peut se faire en suivant le patron des modes d'existence au sens de l'EME, il semble naturel d'en déduire que les entités mathématiques relèvent d'un tel mode. En toute rigueur, il serait préférable de

33. On peut remarquer l'analogie avec une méthode utilisée pour montrer qu'un algorithme itératif est correct, c'est-à-dire qu'il fait bien ce qu'on attend de lui. Cette méthode consiste à chercher un invariant de boucle, c'est-à-dire un prédicat qui reste constant au cours des itérations.

parler pour l'instant d'un quasi-mode car, à supposer que l'argumentaire qui suit soit suffisant pour établir une forme de mode d'existence acceptable, il restera à le placer dans l'architecture générale proposée par l'EME selon l'une des options suivantes : comme relevant purement et simplement du mode de la référence objective [REF], ou bien comme sous-mode de ce même [REF] mais doté d'une forte spécificité, ou bien comme nouveau mode à part entière, ou bien comme autre chose encore... L'idée qui va être développée est que ce quasi-mode d'existence est déjà presque présent, en pointillé, dans la description empiriste du raisonnement mathématique donnée dans la partie 4.

Préalablement, il convient de revenir sur les inscriptions scripto-visuelles qui interviennent dans la pratique des mathématiques. Dans la partie 4.2, avec la notion d'inscription de démonstration (d'un jugement), nous avons introduit une telle inscription en insistant sur la différence essentielle avec l'expérience de démonstration (du même jugement). Il est maintenant utile de considérer la notion *a priori* banale d'*énoncé mathématique* (expression simplifiée en *énoncé* dans la suite) : habituellement, c'est un texte qui exprime un contenu mathématique, que ce dernier soit établi – ce qui en fait un jugement – ou ne le soit pas. Élargissons cette notion de manière à inclure éventuellement d'autres éléments afin d'en faire un tout relativement complet sur le plan de l'expression habituelle des mathématiques. Par exemple, l'ajout peut être une partie graphique, un diagramme, une image, etc. Évidemment, tous ces éléments extra-textuels doivent être comptés à égalité d'importance avec la partie strictement textuelle. Pour prendre un exemple élémentaire et bien connu, le mathématicien qui évoque le théorème de Thalès met en place immédiatement, sur un support matériel et/ou dans une image mentale, un texte et un diagramme avec lettres : le tout décrit ce résultat et en constitue l'accrochage matériel et symbolique. Ce cadre scripto-visuel – cette forme – est pratiquement indispensable à tout travail sur le résultat considéré. Dans la suite, l'expression d'énoncé est prise au sens élargi que nous venons de préciser. Après ce préalable, le mode d'existence pour les mathématiques peut être abordé en précisant son type de hiatus, de trajectoire et de condition de félicité.

Le hiatus du quasi-mode d'existence pour les mathématiques est la discontinuité manifestée par l'éloignement entre un énoncé donné initialement et un énoncé final. Cet éloignement peut être compris comme la simple dissemblance entre les deux inscriptions scripto-visuelles en jeu ; de manière plus spécifique, il peut aussi être interprété comme l'absence d'expérience de démonstration qui permettrait de passer du premier au second.

Le saut, la transition, la transformation reliant ces énoncés est une inscription de démonstration qui est présentée comme un guide susceptible de faire transiter l'évidence du premier au second. Pour important qu'il soit, ce guide ne certifie pas que l'expérience du cheminement de l'évidence sera au rendez-vous de celui qui le parcourt.

La condition de félicité de ce saut est que cette démonstration soit considérée comme valide, c'est-à-dire qu'elle génère l'évidence de l'énoncé final chez celui qui éprouve cette « passe » [Latour 2013, « Livre », colonne « Vocabulaire », entrée « Passe »] particulière, c'est-à-dire l'expérience du cheminement de l'évidence du premier au second énoncé. Lorsque cette condition est réalisée, l'énoncé final par delà le hiatus devient un jugement, sous réserve que l'énoncé source en deçà soit lui-même un jugement, et le saut s'identifie à une inscription de démonstration de ce jugement à partir du jugement source. Autrement dit, cette condition de félicité est satisfaite lorsque l'évidence peut circuler jusqu'à l'énoncé final en suivant le guide fourni par la démonstration.

Une fois définis les éléments précédents, on considère les trajectoires obtenues en enchainant hiatus et sauts, trajectoires qui seront nommées au moins provisoirement *chaines démonstratives*. Précisément, une telle chaine est donnée par :

— une succession d'inscriptions $I_1, I_2, \ldots, I_n$ qui sont des énoncés ; la première de ces inscriptions I_1 est supposée être un jugement ;

— une succession d'inscriptions $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ telles que pour chaque $k = 1, 2, \ldots, n-1$, l'inscription D_k soit une démonstration de I_{k+1} à partir de I_k.

On peut représenter ceci sous la forme du graphique suivant :

$$I_1 \xrightarrow{D_1} I_2 \xrightarrow{D_2} I_3 \xrightarrow{D_3} \cdots \longrightarrow I_{n-1} \xrightarrow{D_{n-1}} I_n. \tag{*}$$

De fait, cette notion de chaine démonstrative n'est qu'une certaine mise en forme, en termes de chaines d'inscriptions, de la notion générale de démonstration. Cette manière de présenter la notion de démonstration a pour objet d'en donner une présentation proche de celle d'une chaine de référence sans en déformer le contenu. Avec les notations introduites dans la définition (*), la chaine démonstrative peut être vue comme la démonstration de I_n à partir de I_1. D'un point de vue purement formel, cette démonstration globale pourrait remplacer la chaine toute entière en réduisant cette dernière à un seul saut

$$I_1 \xrightarrow{D} I_n.$$

Dans la pratique, il en va autrement, car, dans le but de faire circuler plus facilement l'évidence, le mathématicien sait qu'il est préférable de scinder la démonstration globale en une succession de démonstrations intermédiaires, chacune étant plus facile à élaborer et plus à même de susciter le transport de l'évidence [34]. Cela justifie pleinement la notion de chaine démonstrative, qui plus est en exhibant une propriété importante : pour que ces chaines deviennent opérationnelles, il est préférable que les énoncés successifs soient suffisamment « proches » au sens où il est relativement aisé de faire transiter l'évidence entre eux. À propos de la structure essentiellement linéaire d'une telle chaine – certainement réductrice par rapport à la complexité combinatoire que peut prendre en général une démonstration – il est bon de rappeler la mise en garde exprimée dans la note 13 (et les mises en garde de Gentzen [Gentzen 1955, pages 19-20] lui-même).

34. En ce sens, l'argumentation mathématique n'est pas aussi éloignée de la rhétorique que l'on se plait à le dire.

La condition de félicité définie précédemment pour un saut isolé se généralise dans les mêmes termes à une chaine toute entière : une chaine démonstrative satisfait la condition de félicité lorsque chacun de ses sauts constitutifs la satisfait, autrement dit lorsque l'évidence peut cheminer le long de la chaine en validant comme jugement chacun des énoncés successifs. Au contraire, la condition d'infélicité est satisfaite lorsque le cheminement de l'évidence est interrompu en un point de cette chaine.

Finalement, le quasi-mode d'existence des êtres mathématiques est porté par ces chaines démonstratives lorsqu'elles sont reconnues satisfaire la condition de félicité. Un être mathématique (c'est-à-dire un objet ou une propriété mathématique) est amené à l'existence lorsqu'une chaine démonstrative satisfaisant la condition de félicité énonce, montre cette existence. C'est ainsi que tout jugement, habituellement conçu comme un acquis de connaissance, est également interprétable comme une extension de l'ontologie : telle entité (objet ou propriété) est dotée d'une existence avérée par la chaine démonstrative correspondante. Par exemple, une chaine démonstrative associée au théorème de Pythagore amène à l'existence, pour un triangle rectangle, la propriété d'égalité entre les carrés construits sur les côtés adjacents à l'angle droit et le carré construit sur l'hypoténuse.

Dans quel lieu ces êtres vivent-ils ? L'ambigüité ontologique des mathématiques relevée par Netz fait qu'aucun lieu n'est attribué d'emblée aux objets mathématiques dans ce que nous nommons naïvement la réalité extérieure. Depuis les mathématiques grecques, la réponse platonicienne à cette difficulté a été de postuler que ces objets se tiennent figés dans l'immuable éternité d'une sorte de monde suprasensible des idées pures. Le quasi-mode d'existence des êtres mathématiques présenté dans cette partie 5.2 permet avantageusement d'éviter ce recours à la transcendance tout en restant au plus près de la pratique des acteurs de cette sciences. Il reste que, si on le souhaite, on peut dire que les entités mathématiques peuplent des mondes qui leur sont propres tout en restant attachées aux dispositifs scripto-visuels qui les supportent. Être mathématicien, c'est peut-être d'abord avoir la capacité de reconnaitre ces mondes, d'y accéder, de les voir s'animer à partir du seul travail sur des inscriptions appropriées. Du fait du caractère spécifique et généralement difficile à mettre en œuvre du processus qui amène ces êtres à l'existence, il est naturel de les qualifier de lointains. Le seul moteur d'animation d'un monde d'entités mathématiques est le cheminement de l'évidence le long des chaines démonstratives correspondantes. Dans ce nouveau cadre, il ne faut pas oublier la leçon de Netz et de Peirce : un tel monde ne devient opérationnel que parce que certaines conditions techniques et cognitives sont satisfaites, conditions qui permettent à la pratique des mathématiques de se déployer principalement dans la dimension diagrammatique (voir la partie 2). Évidemment, ces conditions accentuent encore plus l'éloignement d'un tel monde relativement à celui des « affaires courantes ».

Comme cela est énoncé dans l'EME, « *chaque saut par dessus une discontinuité représente un risque pris qui peut réussir ou rater* ». Dans le cas qui nous intéresse, le risque est que l'inscription de démonstration soit considérée comme insuffisante pour générer l'expérience de l'évidence de l'énoncé final. L'objet de la condition de félicité est donc de surmonter ce risque. Cependant, le risque ne peut pas être éliminé définitivement : c'est la leçon enseignée par le phénomène des erreurs *post demonstratio*, c'est-à-dire la nécessité d'envisager l'éventualité d'erreurs dans la démonstration du jugement considéré. Traduite dans notre perspective ontologique, cette leçon montre que l'existence d'un être mathématique ne peut pas avoir la valeur d'une vérité définitive transcendant l'expérience du cheminement de l'évidence éprouvé par un mathématicien. Cet être est doté d'une existence certaine tant que le transport de l'évidence qui le valide est reconnu comme tel, ce qui ne peut exclure la découverte future d'une faille susceptible d'invalider cette existence. La raison en est que ce cheminement est une expérience, celle de l'évidence du jugement final, et non pas l'accès à une forme de réalité indépendante des acteurs mathématiciens. Comme indiqué précédemment, on peut y voir la raison de la manie qu'ont les mathématiciens de parcourir les argumentaires menant à des êtres mathématiques pourtant déjà acquis : ils testent le risque d'une erreur et font ainsi l'expérience de leur existence. Le maintien dans l'existence – la *subsistance* selon le vocabulaire général de l'EME – des êtres mathématiques pourrait se faire au prix de cette vérification sans cesse renouvelée.

Dans la suite de ce travail, le quasi-mode précédent va être comparé au mode de la référence objective tel qu'il a été présenté dans la partie 5.1. Cette comparaison permettra de discuter quelle place pourrait être attribuée aux êtres mathématiques dans l'EME.

5.3 Éléments de comparaison entre [REF] et le quasi-mode d'existence des êtres mathématiques

La comparaison entre le quasi-mode d'existence des êtres mathématiques et celui de la référence objective se réduit principalement à la comparaison des chaines et des conditions de félicité propres à chacun. C'est ce qui va être fait dans la suite en mettant en lumière des analogies et des différences entre

— d'une part la technique des chaines de référence pratiquée dans les sciences de terrain ou expérimentales rapidement présentées dans la partie 5.1 et qui, pour éviter un risque de confusion avec une éventuelle notion plus large de chaine de référence, seront provisoirement appelées des *chaines de référence objective*,

— d'autre part le travail de la preuve mis en œuvre en mathématiques et représenté par les *chaines démonstratives* introduites dans la partie 5.2 précédente.

La première analogie est que ces deux types de chaines se présentent comme des trajectoires dont les nœuds – les étapes successives – sont des inscriptions scripto-visuelles. Il s'agit d'une analogie relative au cadre général des modes d'existence décrits dans l'EME puisque seules les trajectoires du mode [REF] présentent cette particularité. Pour autant, la nature de ces inscriptions peut révéler une différence notable entre les deux types de chaines. En effet, comme c'est le cas dans l'exemple présenté dans la partie 5.1, les inscriptions d'une chaine de référence objective peuvent inclure des données matérielles extraites du milieu étudié, ce qui n'est pas le cas d'une chaine démonstrative. Cependant, cette différence tend à se gommer sinon à disparaitre lorsque l'on considère le déroulement d'une chaine de référence objective. En effet, les inscriptions d'une chaine démonstrative sont des énoncés qui utilisent les outils habituels de représentation d'entités mathématiques par un mixte de textes et d'images. Or, comme cela est relevé dans la partie 5.1, l'une des propriétés des chaines de référence objective est l'utilisation croissante le long de la chaine de ces mêmes outils. Précisément, la succession des formes d'une chaine de référence objective est marquée par une double dynamique : la diminution, allant le plus souvent jusqu'à la disparition pure et simple, de données matérielles en rapport avec le phénomène étudié, et l'augmentation d'entités de nature mathématique.

Une deuxième analogie significative apparait au niveau de la fonction des chaines de référence et des chaines d'existence mathématique. Dans les deux cas, ces dispositifs ont pour but de créer une conviction à propos de la vérité d'un énoncé scientifique, cette conviction étant atteinte à la fin de la construction de la chaine dans les deux cas. Comme la suite va le montrer, cette ressemblance ne va pas jusqu'à inclure la nature même de cette conviction.

Une troisième analogie concerne le hiatus se présentant dans chacun des deux types de chaines, hiatus qui dans les deux cas est formulé de manière identique comme la dissemblance et l'éloignement de deux inscriptions successives. Comme précisé précédemment, cet éloignement peut être interprété comme un manque *a priori*, celui de l'expérience en laquelle consiste la satisfaction de la condition de félicité correspondante. L'analogie en question concerne donc la formulation du hiatus, ce qui n'exclut pas une certaine dissemblance découlant elle-même d'un contraste entre les deux types de conditions de félicité.

Justement, une quatrième analogie peut être relevée en ce qui concerne les conditions de félicité. Dans chacune de ces chaines, chaque saut d'une inscription à la suivante doit satisfaire une condition de félicité qui est de préserver certaines constantes. C'est ainsi qu'est formulée dans l'EME une propriété fondamentale des chaines de référence objective qui permet à l'information de circuler le long de la chaine dans les deux sens. Pour les chaines démonstratives, la condition de félicité est le transport de l'évidence : chaque saut est lui-même un cheminement qui doit permettre à l'évidence de se propager depuis l'énoncé initial source du saut jusqu'à l'énoncé final but du saut.

Enfin, une dernière analogie est relative au caractère lointain, c'est-à-dire éloigné des affaires communes, des entités amenées à l'existence selon l'un ou l'autre des deux modes. En effet, il ne faut rien de moins qu'une chaine – de référence objective ou démonstrative – et donc toute une série de médiations, d'instruments et/ou de raisonnements, pour réussir à les instaurer.

Une source notable de dissemblance est relative au moteur de la conviction obtenue à l'issue du parcours de ces chaines. Pour une chaine de référence objective, on peut discerner deux principaux facteurs de conviction : le premier est la confiance dans le protocole suivi tout au long de la chaine pour contrôler le maintien des constantes, le second est la simplicité perceptive de la dernière inscription. Autrement dit, le premier facteur est de nature globale puisqu'il concerne l'ensemble de la chaine, et il correspond à la satisfaction de la condition de félicité correspondante ; le second est local puisqu'il est en rapport avec la dernière inscription seulement. Dans le cas d'une chaine démonstrative, cette conviction réside dans l'expérience de l'évidence du dernier énoncé, qui n'est pas du même ordre que l'expérience de la simplicité perceptive de cet énoncé final. Cette dernière inscription devient évidente pour un mathématicien non pas du fait qu'il la trouve simple à appréhender mais parce que cet acteur expérimente qu'un certain cheminement de l'évidence aboutit à cette inscription. Ainsi, le facteur de conviction d'une chaine démonstrative est avant tout global et il se confond avec la satisfaction de la condition de félicité correspondante. Néanmoins, on peut raisonnablement argüer que l'expérience que constitue le parcours d'une chaine démonstrative apporte une certaine familiarité avec sa dernière inscription qui, en conséquence, acquiert une forme de simplicité perceptive [35]. Ce n'est donc peut-être pas cette propriété de simplicité perceptive de la dernière inscription qui constitue la différence la plus notable entre les deux types de chaines. C'est au niveau des conditions de félicité que la dissemblance est frappante. En effet, dans le cas d'une chaine démonstrative, cette condition se confond avec l'expérience de l'évidence de la dernière inscription. Cette évidence signifie que l'acteur concerné voit littéralement, perçoit directement, c'est-à-dire sans recours à un oracle, la validité du résultat final. Cette signification de l'évidence est entièrement dépendante de l'aspect diagrammatique de la pensée mathématique. En effet, cette vision directe du résultat final n'est rien d'autre que l'expérience perceptive de diagrammes convenablement (et souvent laborieusement) modifiés. Au contraire, une chaine de référence objective inclut généralement des transformations – utilisation cruciale d'appareillages technologiques, généralisation inductive du résultat d'expériences singulières – qui ne peuvent pas produire la même forme d'évidence, même si la conviction qui en découle peut elle aussi être très forte. En conclusion, même si elles sont voisines, les conditions de félicité propres aux deux types de chaines ne peuvent être confondues puisque le transport de l'évidence d'une chaine démonstrative n'est fondamentalement pas de même nature que le maintien de constantes d'une chaine de référence objective.

Le lecteur attentif mais peu familier du point de vue de l'EME peut s'attendre à ce que l'on souligne une autre différence « évidente » concernant le rapport au monde matériel des entités amenées à l'existence dans chacun de ces modes, puisqu'il peut être clair pour lui que les êtres de la référence objective se caractérisent par une présence active dans un secteur de la réalité matérielle, alors que les êtres mathéma-

35. Pour prendre un exemple scolaire, l'inscription qu'est l'énoncé du théorème de Pythagore est perçue comme terriblement abstraite et complexe pour l'élève qui la découvre dans son cursus ; mais si par la suite, cet élève réussit à apprivoiser une démonstration de ce résultat, cette inscription devient à ses yeux plus concrète et familière, bref, la perception qu'il en a se modifie dans le sens d'une plus grande simplicité. Pour invoquer James, une expérience entretient toujours des relations (qui sont elles-mêmes l'objet d'expériences) avec un contexte constitué d'autres expériences. Ainsi, la perception d'une inscription n'est pas une expérience isolée et elle mobilise immédiatement d'autres expériences qui lui donnent une partie de ses caractéristiques.

tiques se cantonnent dans des mondes symboliques et abstraits sans ancrage matériel. Il se trouve que cette évidence est remise en cause par l'EME, du fait même que la notion de monde matériel ou de matière y est analysée comme une confusion – un amalgame entre deux modes d'existence – d'où découle la pauvreté de l'ontologie des modernes (voir [Latour 2013, chapitre 4]). Cette notion de matière au sens des modernes est profondément transformée dans l'EME ; en particulier, elle acquiert un statut multimodal : chaque mode d'existence possède sa propre notion de matière qui désigne l'ensemble des entités dont dépendent les êtres de ce mode. L'effondrement dans le cadre de l'EME de la notion unimodale de monde matériel fait que l'attente supposée du lecteur perd toute pertinence et ne peut qu'être abandonnée.

En guise de conclusion toute provisoire, le quasi-mode d'existence des entités mathématiques décrit dans la partie 5.2 et le mode de la référence objective présentent un nombre significatif d'analogies qui rendent difficiles une séparation pure et simple : ces modes ont, pour reprendre une notion chère au second Wittgenstein, comme un air de famille. Cependant, ces deux mêmes modes exhibent aussi au moins une forme de différence assez nette qui empêche l'identification des deux ou même la fusion de l'un dans l'autre. Or, il semble inévitable de pouvoir disposer de ces deux modes afin de couvrir le maximum du champ scientifique. D'ailleurs, c'est le plus souvent un mixte des deux qui semble être à l'œuvre lorsque la démarche considérée présente à la fois un développement mathématico-déductif et un dispositif expérimental. Un exemple récent et spectaculaire en est l'extraordinaire construction étalée sur près d'un siècle qui vient de confirmer l'existence des trous noirs *via* la perception des ondes gravitationnelles[36]. La démarche mythique de Thalès déterminant la hauteur d'une pyramide par l'intermédiaire du théorème qui porte aujourd'hui son nom est tout aussi exemplaire. À la réflexion, cette idée d'associer les deux modes semble inévitable pour rendre compte de l'activité scientifique même dans le cas des sciences expérimentales ou de terrain. En effet, puisque les inscriptions qui constituent les étapes des chaines de référence font fortement intervenir des entités mathématiques, le moindre traitement mathématique de ces inscriptions – par exemple un simple calcul numérique – en toute rigueur relève du quasi-mode d'existence des êtres mathématiques. Pour tenir compte de ces contraintes, une solution est de concevoir le mode [REF] sous la forme d'un mode élargi contenant non seulement le mode de la référence objective restreint décrit dans la partie 5.1 mais aussi le quasi-mode des êtres mathématiques[37]. Cela revient à penser [REF] comme un mode composé[38]. Si

36. Voir la notion de « treuil ontologique » introduite par Étienne Klein [Klein 2008] pour évoquer le rôle des mathématiques dans l'ontologie de la physique. Le risque de ranimer l'antienne des mathématiques comme langage de la nature est implicitement présent, mais l'ancrage dans le cadre des modes d'existence de l'EME ajouté au quasi-mode présenté dans la présente contribution devrait constituer un puissant antidote.

37. Remarquons que les mathématiques tributaires du calcul sur machine évoquées dans la partie 4.4 ont un mode d'existence différent des mathématiques habituelles mais relevant clairement de ce mode [REF] élargi.

38. À propos de cette idée de mode composé, il y a un précédent dans l'EME avec le cas du mode *reproduction* [REP] qui se scinde lui-même en deux notions distinctes – deux quasi-modes ? – les *inertes* et les *vivants*.

cette hypothèse est retenue, il restera à donner une description cohérente et unifiée de cette acception étendue du mode [REF]. En attendant, il est facile d'esquisser une description schématique de ce mode : ses *trajectoires* sont des chaines d'inscriptions obtenues chacune à partir de la précédente par une transformation ; son *hiatus* est la dissemblance, l'éloignement des inscriptions successives ; sa *condition de félicité* est la circulation de la référence objective ou de l'évidence le long de la chaine.

Guy Wallet remercie Isabelle Stengers pour ses remarques et encouragements relativement à une version préliminaire de ce travail. Il remercie aussi Bruno Latour pour l'intérêt appuyé qu'il a manifesté pour une seconde version du même travail, et pour une discussion qu'il a organisée dans son laboratoire à ce propos. Enfin, les deux auteurs remercient Fabien Ferri pour les avoir mis sur la piste des thèses de Peirce commentés dans les écrits [Chauviré 1987, 2008] de Christiane Chauviré.

Références

ACERBI, Fabio [2012], La sintassi logica della matematica greca, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00727063, prépublication.

BOURBAKI, Nicolas [1954], *Éléments de mathématique : première partie, Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I, Théorie des ensembles. Chapitre I, Description de la mathématique formelle. Chapitre II, Théorie des ensembles*, Actualités scientifiques et industrielles 1212, Paris : Hermann.

—— [1970], *Éléments de mathématique : Algèbre. Chapitres 1 à 3*, Paris : Hermann, nouvelle éd.

BOURDEAU, Michel [2004], Présentation : intuitionnisme et philosophie, *Revue internationale de philosophie*, 230, 383–400, https://www.cairn.info/revue-internationale-de-philosophie-2004-4-page-383.htm.

CHAUVIRÉ, Christiane [1987], Schématisme et analyticité chez C. S. Peirce, *Archives de Philosophie*, 50(3), 413–437, http://www.jstor.org/stable/43035224.

—— [2008], *L'œil mathématique*, Paris : Éditions Kimé.

CHEMLA, Karine [2016], La diversité des cultures mathématiques : un passé et quelques futurs possibles, *La Gazette des mathématiciens*, 150, 16–30.

COQ DEVELOPMENT TEAM, The [1984-2018], *The Coq proof assistant reference manual*, LogiCal project, http://coq.inria.fr.

DEWEY, John [2014], *La quête de la certitude : une étude de la relation entre connaissance et action*, Bibliothèque de philosophie, Paris : Gallimard, traduction et présentation par Patrick Savidan de *The quest for certainty : a study of the relation of knowledge and action*, 1929.

Esquenazi, Jean-Pierre [1997], Peirce et (la fin) de l'image : sens iconique et sens symbolique, *MEI « Médiation Et Information »*, 6, 59–73, http://www.mei-info.com/revue/6/icone-image.

Gentzen, Gerhard [1955], *Recherches sur la déduction logique*, Paris : Presses universitaires de France, traduction par Robert Feys et Jean Ladrière de *Untersuchungen über das logische Schließen*, 1935.

Gonthier, Georges [2005], A computer-checked proof of the Four Colour Theorem, Rap. tech., Microsoft Research Cambridge, https://web.archive.org/web/20160304224502if_/http://research.microsoft.com/en-US/people/gonthier/4colproof.pdf.

Husserl, Edmund [1959], *Recherches logiques : tome premier : prolégomènes à la logique pure*, Épiméthée : essais philosophiques, Paris : Presses universitaires de France, traduction par Hubert Élie de *Logische Untersuchungen : erster Band : Prolegomena zur reinen Logik*, 2e édition, 1913.

James, William [2005], *Essais d'empirisme radical*, Marseille : Agone, traduction et présentation par Guillaume Garreta et Mathias Girel de *Essays in radical empiricism*, 1912.

Klein, Étienne [2008], *Galilée et les Indiens : allons-nous liquider la science ?*, Flammarion, chap. Des Indiens dans la ville, 15–21.

Kuhn, Thomas [1972], *La structure des révolutions scientifiques*, Paris : Flammarion, traduction par Laure Meyer de *The structure of scientific revolutions*, 2e édition, 1970.

Latour, Bruno [1985], Les « vues » de l'esprit : une introduction à l'anthropologie des sciences et techniques, *Culture technique*, 14, 3–29, http://hdl.handle.net/2042/31688.

—— [2001], *L'espoir de Pandore : pour une version réaliste de l'activité scientifique*, Paris : La Découverte, chap. 2 : Sol amazonien et circulation de la référence, 33–82, traduction par Didier Gille de *Pandora's hope : essays on the reality of science studies*, 1999.

—— [2009], Un livre de Reviel Netz pour une approche non formaliste des formalismes, *Revue d'anthropologie des connaissances*, 3(2), 185–206, doi:10.3917/rac.007.0185, recension de [Netz 1999]. Traduction par Dominique Vinck et Rigas Arvanitis révisée par l'auteur de « The Netz-works of Greek deductions », 2008.

—— [2012], *Enquête sur les modes d'existence : une anthropologie des modernes*, Paris : La Découverte.

—— [2013], An inquiry into modes of existence : an anthropology of the moderns, http://modesofexistence.org, Fondation nationale des sciences politiques, Paris.

Lefebvre, Martin [2013], Peirce et l'image : présentation, *Recherches sémiotiques*, 33, 3–17, doi:10.7202/1035281ar.

Martin-Löf, Per [1987], Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof, *Synthese*, 73, 407–420, doi:10.1007/BF00484985.

Netz, Reviel [1999], *The shaping of deduction in Greek mathematics : a study in cognitive history*, Ideas in context, Cambridge : Cambridge University Press.

Peirce, Charles Sanders [1933-1958], *Collected papers*, Cambridge : Harvard University Press, huit tomes.

—— [1976], *The new elements of mathematics*, La Haye : Mouton.

Szabó, Árpád [2000], *L'aube des mathématiques grecques*, Paris : Vrin, traduction par Michel Federspiel de *Die Entfaltung der griechischen Mathematik*, 1994.

Verhaegen, Philippe [1994], Image, diagramme et métaphore : à propos de l'icône chez C. S. Peirce, *Recherches en communication*, 1, 19–48, http://sites.uclouvain.be/rec/index.php/rec/article/view/291.

Vernier, Éric [1987], *André Lichnerowicz, mathématicien*, Bry-sur-Marne : Institut national de l'audiovisuel, interview par Olivier Postel-Vinay diffusée sur FR3 le 17.11.1990.

Wallet, Guy & Neuwirth, Stefan [2018], Enquête sur les modes d'existence des êtres mathématiques, soumis, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01943079.

Weyl, Hermann [1994], Le continu, dans : Le continu *et autres écrits*, Paris : Librairie philosophique J. Vrin, Mathésis, 33–124, traduction et présentation par Jean Largeault de *Das Kontinuum : kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, 1918.

Wittgenstein, Ludwig [2004], *Recherches philosophiques*, Bibliothèque de philosophie, Paris : Gallimard, traduction par Françoise Dastur, Maurice Élie, Jean-Luc Gautero, Dominique Janicaud et Élisabeth Rigal de *Philosophische Untersuchungen*, 1953.

—— [2006], *De la certitude*, Bibliothèque de philosophie, Paris : Gallimard, traduction et présentation par Danièle Moyal-Sharrock de *Über Gewißheit*, 1969.