Les mathématiques de l'Antiquité

Stefan Neuwirth

Table des matières

Cette présentation propose d'approfondir, textes à l'appui, trois crises des mathématiques de l'Antiquité tout en introduisant à la philosophie antique des mathématiques. Il s'agit
— des problèmes posés au *continu* par les paradoxes de Zénon,
— de la tentative de le ramener au discret anéantie par la découverte de l'*incommensurabilité*
— du rôle obscur du *postulat des parallèles*.
Nous nous baserons sur les *Éléments* d'Euclide et nous nous tairons par contre impardonnablement sur les autres auteurs mathématiques tels qu'Archimède, Apollonius de Perga (*Coniques*), Ménélaos d'Alexandrie (*Sphériques*), Diophante d'Alexandrie (*Arithmétique*) et Pappus d'Alexandrie (*Collection mathématique*).

1 Les mythes de l'origine des mathématiques

Deux textes grecs très anciens racontent de manière très différente l'origine des mathématiques. Le premier est extrait du livre *L'enquête* d'Hérodote d'Halicarnasse (−484-−425). Le titre de ce livre, Ἱστοριάι (Historiai) en grec, a donné le mot *histoire* en son sens actuel.

> Ce roi, m'ont dit les prêtres, partagea la terre entre tous les Égyptiens par lots carrés d'égale superficie ; il assura par là ses revenus, en imposant à leurs possesseurs une redevance annuelle. Tout homme à qui le fleuve enlevait une parcelle de son lot allait signaler la chose au roi ; Sésostris envoyait alors des gens inspecter le terrain et en mesurer la diminution, pour accorder dorénavant à l'homme une réduction proportionnelle de sa redevance. Voilà, je pense, l'origine de la géométrie, qui passa plus tard en Grèce ; mais le cadran solaire, le gnômon et la division du jour en douze parties nous sont venus des Babyloniens. [Hér64, p. II, 109]

On n'est pas sûr si Sésostris correspond à un pharaon de la 12^e^ dynastie ou à deux pharaons confondus de la 19^e^ dynastie ; l'essentiel qu'on sache à son sujet est dû à Hérodote.

Hérodote distingue donc deux sources pour les mathématiques grecques :
— l'Égypte pour le calcul d'aire de terrains agricoles dans un but d'équité fiscale ;
— Babylone pour la mesure du temps (le gnômon est la tige qui par son ombre indique l'heure sur le cadran solaire).
Ces deux activités requièrent en effet une technique accomplie : calcul de longueur et connaissance de l'angle droit pour l'une et description de la trajectoire du soleil au fil de l'année pour l'autre. Dans les deux cas, il faut aussi savoir compter !

Le deuxième texte est extrait du livre *Métaphysique* d'Aristote (−384-−322), dit « le Stagirite » car né à Stagire en Macédoine. Le titre de ce livre, Τὰ μετὰ τὰ φυσικά (Ta meta ta phusika) en grec, n'a pas été donné par Aristote et exprime seulement que ce texte suit sa *Physique* ; il a néanmoins donné naissance au mot *métaphysique*. Le voici.

> En outre, nous ne regardons d'ordinaire aucune de nos sensations comme étant une sagesse, bien qu'elles nous fournissent les connaissances les plus autorisées sur les choses individuelles ; mais elles ne nous disent le pourquoi de rien, pourquoi, par exemple, le feu est chaud : elles se bornent à constater qu'il est chaud.
>
> C'est donc à bon droit que celui qui, le premier, trouva un art quelconque, dégagé des sensations communes, excita l'admiration des hommes ; ce ne fut pas seulement en raison de l'utilité de ses découvertes, mais pour sa sagesse et sa supériorité sur les autres. Puis les arts nouveaux se multiplièrent, dirigés, les uns vers les nécessités de la vie, les autres vers son agrément ; or toujours les inventeurs de ces derniers arts ont été considérés comme plus sages que les autres, et cela, parce que leurs sciences ne tendent pas à l'utilité. De là vient que tous ces différents arts étaient déjà constitués, quand on découvrit ces sciences qui ne s'appliquent ni au plaisir, ni aux nécessités, et elles prirent naissance dans les contrées où régnait le loisir. Aussi l'Égypte a-t-elle été le berceau des arts mathématiques, car on y laissait de grands loisirs à la caste sacerdotale. [Ari53, 981b10-981b24]

Ce texte est beaucoup plus théorique que le précédent et son sens sera plus clair après les sections 2 et 3 sur l'école philosophique des éléates, qui le précède d'un siècle. Les *sensations* dont il est question ici sont les informations données par nos cinq sens. Le mot *art* est aujourd'hui d'un usage plus restreint qu'avant. Il se dit τέχνη (tekhnē) en grec et se rapproche ainsi de *technique* : il désigne ici le savoir-faire et l'intelligence pratique qui devine le pourquoi des phénomènes. La *science* se dit ἐπιστήμη (epistēmē) en grec, mot que l'on retrouve dans *épistémologie* : c'est l'intelligence théorique dégagée des applications, l'abstrait dégagé du concret. Aristote décrit ainsi le cheminement de l'expérience vers la science comme un éloignement des sensations et un accès aux causes. La science est une connaissance supérieure qui se désintéresse de toute application immédiate.

Aristote souligne qu'il faut des loisirs pour accéder à ce degré de connaissance ! Il considère enfin lui aussi que les mathématiques viennent d'ailleurs, c'est-à-dire d'Égypte.

Ce que ces deux textes proposent, ce sont des mythes : malgré les 24 siècles qui nous séparent d'eux, les origines des mathématiques devaient leur sembler aussi lointaines qu'à nous. Ils se distinguent toutefois des écrits qui attribuent l'invention des mathématiques à un Dieu comme Hermès, Palamède ou Prométhée. L'article [Vit96] de Bernard Vitrac revient sur ces mythes.

En conclusion, ces deux textes décrivent déjà les mathématiques comme une science abstraite qui permet de mesurer et de compter et qui mène au développement de la forme causale.

2 Parménide d'Élée

2.1 Introduction

Le témoignage d'Aristote nous pousse ainsi à rechercher l'origine des mathématiques grecques dans des préoccupations métaphysiques et en particulier de comprendre

— la méfiance vis-à-vis des sensations et

— la recherche des formes déductives.

Les traces du monde sensible dans le monument de la science grecque que sont les *Éléments* d'Euclide sont circonscrites aux premières définitions : « un *point* est ce dont il n'y a aucune partie », « une *ligne* est une longueur sans largeur », « les *limites d'une ligne* sont des points », « une *ligne droite* est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle », etc. et à la notion commune I.7 : « les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles » (voir section 7.1). La perfection de la géométrie d'Euclide est allée de pair avec le développement d'une philosophie qui exclut le réel de la construction des mathématiques.

Plusieurs historiens ont voulu retracer les circonstances de l'élaboration des *Éléments*. Parmi ceux-ci, Árpád Szabó [Sza69 ; Sza94] se démarque en considérant la structure axiomatique des *Éléments* comme une réaction à la philosophie de Parménide d'Élée.

Nous allons donc commencer par relire les fragments du poème de Parménide, des paradoxes de Zénon d'Élée et du traité du pythagoricien Philolaos de Crotone comme des entreprises de penser le réel. Parménide et Zénon enseignent qu'on ne peut penser que le continu ; Philolaos soutient qu'on ne peut connaître que par le discret.

Les ouvrages consultés relèvent davantage de la philologie que de la philosophie : plutôt que de chercher à reconstruire un système de pensée, j'ai voulu comprendre ce qu'il y a d'intemporel dans les questions posées par ces auteurs et saisir la matière de leurs réponses dans l'épaisseur de leurs mots. Cela montrera combien leurs réponses aussi sont toujours actuelles. Cette présentation permettra, je l'espère, une lecture fraîche et directe de textes fondateurs de la philosophie, et de faire revivre le feu qui a vu naître l'axiomatique léguée par les Grecs.

2.2 Le poème

Les historiens de la philosophie font donc remonter ces préoccupations au poème de Parménide, né à Élée à la fin du 6e siècle avant notre ère. Ce poème est considéré comme l'œuvre inaugurale de la métaphysique. Il raconte l'initiation de Parménide.

2.2.1 Le discours de la déesse

Après un long voyage qu'il décrit minutieusement, Parménide rencontre la déesse.

> La déesse, avec bienveillance, me reçut.
> Elle prit ma main droite en sa main et me dit :
> « Jeune homme, toi qui viens ici, accompagné
> De cochers immortels, portés par des cavales,
> Salut ! Car ce n'est point une Moire ennemie,
> Qui t'a poussé sur cette voie (hors des sentiers
> Qu'on voit communément les hommes emprunter),
> Mais Thémis et Dikè. Apprends donc toutes choses,
> Et aussi bien le cœur exempt de tremblement
> Propre à la vérité bellement circulaire,
> Que les opinions des mortels, dans lesquelles
> Il n'est rien qui soit vrai ni digne de crédit ;
> Mais cependant aussi j'aurai soin de t'apprendre
> Comment il conviendrait que soient, quant à leur être,
> En toute vraisemblance, lesdites opinions,
> Qui toutes vont passant toujours. » (B I 24-32 [88, pages 255-256].)

Les Moires sont les divinités du destin. Thémis et Dikè sont respectivement les déesses de la justice divine et humaine, mais il faut les voir ici comme représentations de la « nécessité par nature », c'est-à-dire que Parménide a accédé à un état et à des forces qui lui permettent d'emprunter la voie de la connaissance (voir [Frä55a, partie III]).

La vérité se dit ἀλήθεια (alētheia) en grec et signifie « dévoilement » au sens propre ; l'opinion se dit δόξα (doxa), mot qui a donné le suffixe « -doxe » en français. La déesse oppose donc l'une à l'autre : l'une est « exempte de tremblement », les autres « vont passant toujours ». L'opinion se base sur les sensations et l'apparence ; pour accéder à la vérité, à ce qui est (dans un sens absolu), il faut chercher à le penser. La déesse propose de les enseigner toutes les deux, mais les quatre derniers vers sont surprenants : les opinions peuvent être vraisemblables et l'homme peut les organiser de manière à les rendre probables ; la déesse lui enseignera aussi la manière dont les opinions peuvent prendre cette forme convenable. Cela reste une nécessité pour l'homme qui, même si on lui a dévoilé la vérité, continuera à user de ses cinq sens et voudra donner de la vraisemblance à ses sensations.

2.2.2 Le « il est »

La déesse présente ainsi la vérité dévoilée.

> Mais il ne reste plus à présent qu'une voie
> Dont on puisse parler : c'est celle du « il est ». (B VIII 1-2 [88, page 261].)

Guido Calogero propose d'accéder à la leçon de Parménide par une analyse logique des assertions : « [la pensée] ne peut s'effectuer sans prendre corps dans une affirmation, dont le verbe être est le constituant essentiel, parce qu'il est la forme commune et universelle de toute qualification ou prédicat possible, qui ne peut être pensé sans celle-ci, alors que celle-ci peut réciproquement être pensée pour elle-même et sans aucun ajout » [Cal77, pages 8-9]. Je suis pour ma part la voie de Parménide en concentrant ma pensée sur le fait même d'être en faisant abstraction des étants.

Je cite de longs passages du poème pour leur donner une cohérence interne. La description du « il est », c'est-à-dire de l'être en soi (et non des étants) paraîtra fantastique.

> Sur cette voie il est de fort nombreux repères,
> Indiquant qu'échappant à la génération,
> Il est en même temps exempt de destruction :
> Car il est justement formé tout d'une pièce,
> Exempt de tremblement et dépourvu de fin.
> Et jamais il ne fut, et jamais ne sera,
> Puisque au présent il est, tout entier à la fois,
> Un et un continu. Car comment pourrait-on

Origine quelconque assigner au « il est » ?
Comment s'accroîtrait-il et d'où s'accroîtrait-il ?
Je t'interdis de dire ou même de penser
Que le « il est » pourrait provenir du non-être,
Car on ne peut pas dire ou penser qu'il n'est pas.
Quelle nécessité l'aurait poussé à être
Ou plus tard ou plus tôt, si c'était le néant
Qu'il avait pour principe ? Aussi faut-il admettre
Qu'il est absolument, ou qu'il n'est pas du tout.
Jamais non plus la force attachée au discours
Ne pourra concéder que du néant procède
Un être susceptible à lui de s'ajouter ;
Aussi Dikè lui a, l'enserrant dans ses liens,
De naître ou de périr ôté toute licence :
En fait elle le tient. (B VIII 2-15 [88, page 261].)

On accède au « il est » par une méditation et celle-ci a lieu dans une étendue qui permet au « il est » d'être pensé comme « un et un continu ». Mais dans ce passage, l'accent est mis sur son rapport au temps et sur l'impossibilité de penser le changement. Nous nous concentrerons sur le passage suivant qui étudie son rapport à l'espace.

Et il n'est pas non plus
Divisible en effet, puisqu'il est en entier,
Sans avoir çà ou là quelconque chose en plus
Qui pourrait s'opposer à sa cohésion,
Ou quelque chose en moins. Il est tout rempli d'être.
Aussi est-il tout continu. En effet, l'être
Embrasse au plus près l'être. (B VIII 22-25 [88, page 262].)

Reprenons les termes qui décrivent le « il est » dans son extension. Il est « tout rempli d'être », « tout entier à la fois », « tout continu », « formé tout d'une pièce », rien ne « pourrait s'opposer à sa cohésion ». Il n'est « pas non plus divisible ». Selon Ernst Cassirer, « en vertu de cette conclusion, le concept mathématique de l'espace « vide », tel qu'il a été pensé par les pythagoriciens comme « écartement », comme διάστημα entre les corps, est dévalué ontologiquement et aboli » [Cas25, page 42].

Or il est immobile,
Pris dans les limites de formidables liens ;
Il est sans commencement et il est sans fin,
Car la génération comme la destruction
Ont été écartées loin de lui, et la foi
Véridique les a, elle aussi, rejetées.
Identique à lui-même en lui-même il repose,
Il est là en lui-même immobile en son lieu ;
Car la Nécessité puissante le retient
Dans les liens l'enchaînant à sa propre limite ;
C'est pourquoi la sentence a été décrétée
Que l'être ne saurait se dispenser de fin.
Il ne manque de rien, en effet. À rebours,
En n'étant pas, de tout il serait dépourvu. (B VIII 25-33 [88, page 262].)

Puis Parménide semble énoncer l'identité du penser et de l'être.

Or le penser est identique à ce en vue
De quoi une pensée singulière se forme.
On chercherait en vain le penser sans son être,
En qui il est un être à l'état proféré.
Car rien d'autre jamais et n'est et ne sera
À l'exception de l'être, en vertu du décret
Dicté par le Destin de toujours demeurer
Immobile en son tout. C'est pourquoi ne sera
Qu'entité nominale ⟨et pur jeu de langage⟩

Tout ce que les mortels, croyant que c'était vrai,
Ont d'un nom désigné : tel naître ou bien périr,
Être et puis n'être pas, changer de position,
Et changer d'apparence au gré de la couleur. (B VIII 34-41 [88, pages 262-263].)

Pour Hermann Fränkel, ce passage exprime plutôt que « le penser aussi, libéré de ses scories, n'est rien d'autre qu'être conscient » et que « connaître est identique à la connaissance du "il est" » ; « au lieu de la confrontation entre sujet et objet subsiste une conscience uniforme de l'être de lui-même » [Frä55a, page 195].

Mais puisque existe aussi une limite extrême,
Il est de toutes parts borné et achevé,
Et gonflé à l'instar d'une balle bien ronde,
Du centre vers les bords en parfait équilibre.
Car aussi bien en plus et aussi bien en moins,
Aucune variation ici ou là n'existe.
Car il n'est nul non-être à même d'empêcher
Qu'il atteigne partout son parfait équilibre,
Ni être qui en lui soit en plus ou en moins,
Étant donné qu'il est tout entier inviolable.
En toutes directions il s'égale à lui-même,
Et de même façon il touche à ses limites. (B VIII 42-49 [88, page 261].)

Nous verrons dans la partie sur Philolaos combien les limites et le caractère borné sont des propriétés essentielles pour pouvoir accéder à la connaissance. Soulignons en tout cas que Parménide crée et utilise des concepts mathématiques pour décrire l'être.

Paula Philippson associe cette description à la mythologie grecque de l'océan : « [Okeanos], genèse de toute chose et de tout phénomène qu'il renferme, n'a dans son circuit fermé ni début ni fin. [...] Son flux égal et calme, qui le fait apparaître partout identique à lui-même dans toute son extension, le flux s'accomplissant en lui-même du Ὠκεανο ιο τελήεντος ποταμοῖο [Océan fleuve parfait] (Hésiode, *Théogonie* 959) entre limites (πείρατα) qu'Océan-même constitue comme sa forme circulaire et qui pourtant l'attachent lui-même à son lieu » ([Phi44, pages 175-176], citée par Mario Untersteiner [58]).

2.2.3 Pistes pour comprendre le texte

Pour rendre ce texte moins fantastique, je propose deux approches.

— Essayez vous-même de penser ce que c'est que l'être et étudiez, l'un après l'autre, les arguments du poème et demandez-vous s'ils sont vrais (exercice 2.4). Par exemple, Parménide apprend que l'être ne provient pas du non-être : imaginez qu'il n'y ait rien et demandez-vous pour quelle raison quelque chose aurait commencé spontanément à être.

— Osez l'anachronisme qui consiste à penser l'espace-temps, c'est-à-dire les quatre dimensions d'Albert Einstein. On se rend compte alors que nombre de propriétés de l'être parménidien mélangent l'espace et le temps (voir l'exercice 2.5).

En quoi ce texte est-il métaphysique, et en quoi a-t-il un rapport aux mathématiques ? Parménide apprend de la déesse que pour accéder à la vérité, il faut laisser de côté les sensations, les apparences, les opinions et chercher à *penser* l'être. La première leçon de cette expérience est que le néant, le non-être ne peut pas être pensé : il n'est donc pas. Donc l'être est formé d'un seul tenant. De même,

— il échappe à la génération et à la destruction ; il est immobile ;
— il est fait d'un seul tenant ;
— exempt de tremblement, un continu indivisible, gonflé à l'instar d'une balle bien ronde ;
— sans commencement et sans fin ;
— de toutes parts borné et achevé avec une limite extrême.

La question de ce qui est fait ainsi émerger la notion de lieu mathématique et les qualificatifs choisis évoquent les grandes questions de la topologie : les oppositions continu/discret, à bord/sans bord, limité/illimité, un/multiple. La pensée de ce qui est devient une modélisation du réel.

2.2.4 L'opinion des mortels

Mais ici je mets fin au discours assuré
Ainsi qu'à la pensée visant la vérité.
Désormais apprends donc l'opinion des mortels
En ouvrant ton oreille à l'ordre harmonieux
Du discours composé pour ton enchantement.
Ils ont, par convention, en effet assigné
À deux formes des noms ; mais des deux cependant
Un n'en est pas digne — et c'est bien en cela
Qu'ils se sont fourvoyés. Car ils ont estimé
Contraires leurs aspects, et leur ont assigné
Des signes qui fondaient leur distinction mutuelle.
Des deux, l'une est le feu éthéré de la flamme,
C'est le feu caressant et c'est le feu subtil,
Identique à lui-même en toutes directions,
Mais qui à l'autre forme identique n'est pas ;
L'autre par son essence à l'exact opposé,
C'est la nuit sans clarté, dense et lourde d'aspect.
Voici, tel qu'il nous semble en sa totalité,
Le système du monde et son arrangement
Que je vais te décrire, afin que nul mortel
N'en sache plus que toi. (B VIII 50-61 [88, pages 262-263].)

Comme promis, la déesse enseigne à présent l'opinion, le monde des sensations. L'opposition par Parménide de la vérité aux opinions continue à enflammer les philologues et les philosophes. On comprend qu'il condamne l'idée que l'être se décrive avec l'aide du non-être, ou que ce qui est soit un mélange d'être et de non-être. Or, aux vers 31-32 du premier fragment, il soutient que les opinions puissent être formées « en toute vraisemblance ». Les opinions ont donc leur place dans le discours de Parménide. Ce n'est pas un discours de vérité, mais ce discours est nécessaire pour rendre compte de la nature, des sensations, du temps. Mario Untersteiner note d'ailleurs que le jour/feu et la nuit sans clarté sont deux formes du temps ; il soutient que le discours de l'opinion qui suit le fragment VIII n'est pas l'objet de la condamnation de Parménide : être et opinion sont sur une même voie qui mène l'être à la vérité et l'opinion à la vraisemblance. La vérité est définitive ; la vraisemblance par contre est un chemin pour toujours inachevé.

Il me semble ainsi que les mathématiques sont du domaine des opinions et que le rapport des mathématiques à la vérité ou au monde restera un problème philosophique majeur.

3 Zénon d'Élée

Zénon est un élève de Parménide. Il a vécu à Élée au 5^{e} siècle av. J.-C. Il confronte la pensée de l'être avec l'opinion que suscitent les sensations, et en particulier avec l'existence d'êtres multiples et la nature discrète de la matière. Il le fait sous une forme originale qui a marqué la philosophie au point qu'Aristote le considère comme le père de la dialectique : il met les opinions à l'épreuve de la pensée et aboutit à des paradoxes.

3.1 Version d'Aristote

Seuls quatre fragments des écrits de Zénon nous sont parvenus. En particulier, le paradoxe le plus connu, « Achille et la tortue » n'y apparait pas et correspond à un compte rendu dans la *Physique* d'Aristote qui me semble beaucoup moins élaboré et beaucoup plus empêtré dans la considération d'une situation concrète que ces fragments. Je ne suis donc pas convaincu qu'il remonte effectivement à Zénon.

Voici donc la présentation d'Aristote des quatre arguments de Zénon contre le mouvement.

> Les arguments de Zénon contre le mouvement sont au nombre de quatre ; ils causent beaucoup de soucis à ceux qui veulent les résoudre. Le premier argument porte sur l'inexistence du « se mouvoir », compte tenu du fait que le mobile doit d'abord parvenir à la moitié avant d'atteindre le

> terme de son trajet, argument que nous avons déjà discuté auparavant. (*Physique* VI, IX, 239*b*9-14 [88, page 287].)
>
> Le second argument est celui qu'on appelle l'*Achille*. Il consiste à dire que le plus lent à la course ne peut pas être rattrapé par le plus rapide, étant donné que le poursuivant doit nécessairement atteindre le point d'où le poursuivi est parti, de telle sorte que le plus lent doit sans cesse avoir une certaine avance. Cet argument est identique à celui de la dichotomie, à cette différence près que ce n'est pas en deux que se trouve divisée la grandeur restante. (*Physique* VI, IX, 239*b*14-20 [88, page 288].)
>
> Le troisième argument est celui dont nous venons de parler, à savoir que la flèche qui se déplace est immobile. C'est ce qui résulte du fait que l'on admet que le temps est composé d'instants. Que l'on refuse cette prémisse et le raisonnement s'écroulera. (*Physique* VI, IX, 239*b*30-33 [88, page 288].)
>
> Le quatrième argument est celui qui fait appel à deux trains formés d'une succession de masses égales et qui se croisent sur un stade, en passant, l'un comme l'autre, devant un train immobile. La queue du premier train (C) est située à l'une des extrémités du stade ; la tête de l'autre train (B) est située au milieu ; les deux trains vont à vitesse égale. Pour Zénon, la conséquence est que la moitié du temps est égale au double.
>
> La fausseté de l'argument tient à ce que l'on pose qu'une masse met le même temps à passer devant une masse en mouvement et devant une masse immobile. Or c'est cela qui est faux.
>
> Soit par exemple le train AAAA constitué par des masses immobiles, BBBB le train de masses dont la tête est située au milieu du train AAAA, CCCC le train de masses partant de l'extrémité du stade et qui se déplace en sens contraire du train BBBB et à égale vitesse.
>
> On constate que :
>
> 1° La tête du train BBBB atteint l'extrémité E du stade en même temps que la tête du train CCCC atteint l'autre extrémité D.
>
> 2° Quand le train CCCC se trouve exactement à la hauteur du train BBBB, BBBB et CCCC ayant parcouru chacun la longueur d'un train, le train CCCC n'a parcouru que la moitié du train AAAA ; par conséquent, le temps total est égal à la moitié du temps, car pour chacun des trains en mouvement, le temps mis à passer devant une masse du train AAAA est égal.
>
> 3° Mais quand le train BBBB est passé entièrement devant le train CCCC, la tête du train BBBB et la tête du train CCCC ont atteint en même temps les extrémités du stade ; et le temps mis par BBBB pour traverser le stade est égal au temps de CCCC, puisque les deux trains défilent devant le train AAAA à vitesse constante.
>
> Tel est l'argument de Zénon, et il est faux pour les raisons que nous avons dites. (*Physique* VI, IX, 239*b*33-240*a*18 [88, pages 288-289].)

Tels qu'Aristote les présente, ces paradoxes semblent absurdes. Mais en fait Zénon remet en question notre mode de *penser* le mouvement. Voici la critique d'Aristote de ces quatre arguments. Est-elle recevable selon vous ?

> C'est pourquoi l'argument de Zénon admet une prémisse fausse : qu'il n'est pas possible que les grandeurs illimitées soient chacune parcourue ou touchée une par une par les grandeurs illimitées en un temps limité. En effet, *illimité*, rapporté à la longueur et au temps, se dit en deux sens, de même que rapporté, plus généralement, à tout ce qui est continu : car on peut considérer soit l'infini selon la division, soit l'infini selon les extrémités. Alors qu'il n'est pas possible qu'une chose entre en contact dans un temps limité avec des grandeurs illimitées en quantité, cela est possible si ces grandeurs sont illimitées en division. En effet, du point de vue de la divisibilité, le temps lui-même est illimité. Il en résulte que c'est dans un temps illimité, et non pas dans un temps limité, que s'effectue le parcours de l'illimité et que le contact avec les grandeurs illimitées se fait par des grandeurs illimitées, et non pas par des grandeurs limitées. (*Physique* VI, II, 233*a*21-31 [88, page 287].)

3.2 Version originale

Les fragments originaux sont pour nous des fenêtres qui nous permettent d'accéder à l'univers de pensée des éléates. Je veux les lire de manière matérielle, penser qu'ils peuvent parler pour eux-mêmes et ne pas tenter de construire, ni de reconstruire, un système de pensée à partir d'eux. Nous en resterons ainsi à la première étape de la stratégie de Zénon : ébranler nos convictions.

Je présente ces fragments dans l'ordre dans lequel Simplicius de Cilicie (490-560) en a rendu compte, un millénaire après qu'ils aient été composés par Zénon. On ne sait rien de la transmission de ces fragments jusqu'à Simplicius : ils représentent jusqu'à aujourd'hui un grand problème philologique ; remarquons en particulier que la notion d'authenticité, ainsi que son besoin, ont fortement varié depuis la fin de l'Antiquité.

La traduction que je propose est issue de la comparaison des traductions existantes [Zaf50 ; Frä55b ; 62 ; Cav82 ; 88].

Je voudrais aussi vous avertir que ces fragments s'adressent au fondement d'une théorie de la matière et ne séparent pas la forme du contenu. En référer à un modèle pour lui répliquer, comme à la théorie des séries infinies ou des nombres réels, c'est se boucher les oreilles plutôt que de l'écouter.

Fragment B II

> Si [un étant qui n'a ni grandeur ni épaisseur ni masse] [1] était ajouté à un autre étant, il ne le rendrait en rien plus grand. Car si un étant sans grandeur est ajouté à un autre, il n'est pas possible que celui-ci gagne en grandeur. Et déjà il s'ensuit que l'ajout égale rien. Puis, si la soustraction de quelque chose n'a pas pour effet de rendre l'autre chose plus petite, et que son ajout n'a pas pour effet de la rendre plus grande, il est clair que l'ajouté comme le retranché égalent rien.

Le fragment B II cherche à penser un étant sans grandeur ni épaisseur ni masse. C'est un étant hypothétique qui aurait les propriétés du point géométrique. Or la grandeur, l'épaisseur, la masse sont des propriétés communes aux objets que nous percevons. Zénon demande quel serait le rapport d'un étant sans grandeur avec un étant doué de grandeur et se convainc qu'il n'y en a pas. Ajouté ou enlevé, il ne pourrait changer la grandeur de l'autre étant : il ne peut pas expliquer sa constitution. Il n'est donc rien.

La théorie mathématique actuelle qui cherche à répondre à ces questions est la théorie de la mesure. Pour elle aussi, un ensemble a une grandeur seulement si ses constituants en ont une. On peut chercher à constituer un objet à partir de très petits objets, comme des tranches, mais penser ces tranches comme des plans telle que le fait le calcul des indivisibles résulte d'un passage à la limite qui peut être réalisé dans le modèle, pas dans la réalité.

Fragment B III

> Si les étants sont multiples, il est nécessaire que les étants soient juste autant qu'ils sont réellement, c'est-à-dire ni plus ni moins. Mais si les étants sont juste autant qu'ils sont, ils devraient être limités.
>
> Si les étants sont multiples, les étants sont illimités : en effet, il y a toujours d'autres étants entre les étants, et à nouveau entre ceux-là d'autres encore. Et ainsi les étants sont illimités.

Il s'agit de penser la multiplicité. Qu'est-ce que cela veut dire d'avoir plusieurs choses devant nous ? Comment pouvons-nous arriver au jugement que les étants sont multiples ? Nous devons les imaginer devant nous comme les galets sur une plage et pouvoir les saisir dans leur multiplicité actuelle.

En fait, les stratégies d'évitement des paradoxes de Zénon consistent à refuser le terrain de l'actuel pour se placer sur le terrain du potentiel. Elles veulent constater que la finitude de notre entendement se retrouve dans la finitude du monde, c'est-à-dire que le monde n'est pas là mais en devenir. En particulier, la pensée peut l'atomiser sans que cette atomisation aboutisse jamais.

Zénon nous accorde la possibilité de connaître actuellement et cela précise la signification de la condition de perception de la multiplicité : il faut pouvoir embrasser les étants dans la pensée, de sorte qu'il n'en reste pas à ajouter et qu'on n'en ait pas compté de trop. Il faut donc pouvoir les compter et le mot limité ici veut dire limité en nombre.

Le deuxième paragraphe approfondit la pensée du multiple. Il y a deux interprétations de ce passage.

— Il faut pouvoir penser les étants comme des entités séparées. Or penser des entités séparées nous amène à penser l'espace qui les sépare et leur bord. Cet espace est un étant, qui est encore séparé des étants qu'il sépare. Penser le multiple amène donc à penser toujours davantage d'étants qu'on ne croyait : on en aura toujours oublié.

— À partir du moment où on pense que l'être est divisé en étants, cette divisibilité de l'être s'appliquera de manière homogène à chaque étant. Donc la pensée de la divisibilité désintègre immédiatement l'être en une infinité d'étants !

1. Les crochets contiennent des ajouts au texte pour la clarté ou l'équilibre de la phrase.

Fragment B I

Si l'étant n'avait pas de grandeur, il ne saurait même pas être.

Mais s'il est, il est nécessaire que chaque étant ait quelque grandeur et quelque épaisseur et que l'un se distingue de l'autre. Même raisonnement pour l'étant qui le côtoie. Celui-ci aura aussi une grandeur et un autre le côtoiera. Or le dire une fois revient à le dire sans cesse. Car aucun de ceux-ci ne sera l'ultime, ni l'un ne sera sans côtoyer un autre. Donc, si les étants sont multiples, il est nécessaire qu'ils soient à la fois petits et grands, petits au point de ne pas avoir de grandeur et grands au point d'être illimités.

Ce fragment est lui aussi sujet à deux interprétations contradictoires qui mènent à deux traductions différentes.

— Les étants se distinguent et on peut penser ce qui est à côté d'un étant. Mais alors les étants s'étendent à l'infini et la multiplicité d'étants est illimitée.
— On peut y voir une description matérielle de la deuxième interprétation du fragment B III. Dans ce cas, chaque étant est pensé comme composé de deux parties distinctes qui se côtoient et le « même raisonnement » est appliqué à une des deux parties. On aboutit à un nombre illimité de parties.

Mario Untersteiner [62, pages 186-187] replace les fragments de Zénon dans le contexte de la pensée de Parménide. Selon lui, les paradoxes s'appliquent à la δόξα (doxa, l'opinion) et non à l'ἀλήθεια (alētheia, la vérité dévoilée) : on ne peut expliquer le monde de l'opinion à l'aide de la multiplicité.

Les fragments décrivent donc deux mouvements d'analyse de l'étant : des parties données vers le tout et du tout vers ses parties. Ils démontrent que chacun de ces mouvements d'analyse est infini.

Hermann Fränkel [Frä55b, pages 223-225] propose une interprétation étonnante du fragment B I : selon lui, Zénon considère successivement la surface de l'étant, la surface de sa surface, etc., et montre ainsi que l'étant n'a pas de limite ultime.

La difficulté d'une mathématisation du continu se retrouve dans la *Physique* d'Aristote.

> Le continu est dans le genre du contigu ; je dis qu'il y a continuité, quand les limites par où deux choses se touchent ne sont qu'une seule et même chose, et, comme l'indique le nom, tiennent ensemble. (*Physique* VI, 227*a*10-12 [Ari31].)

> Or, dès qu'on aura montré que tout instant est tel en soi et identique, il sera par là-même évident qu'il est aussi indivisible. Il est, dis-je, nécessaire qu'il soit identique, étant l'extrémité de l'un et de l'autre temps ; en effet, s'il y avait deux instants différents, l'un ne serait pas consécutif à l'autre, pour cette raison qu'un continu n'est pas composé d'éléments sans parties : et, s'ils sont mutuellement séparés, il y aura du temps dans l'intervalle ; car tout continu est tel qu'il y a quelque chose de synonyme entre les limites. (*Physique* VI, 234*a*3-9 [Ari31].)

4 Philolaos de Crotone et les pythagoriciens

Philolaos (−470-−385) est né près de vingt ans après la mort de Pythagore, peut-être à Crotone. C'est néanmoins à lui que sont dus les fragments les plus anciens qui témoignent de l'épistémologie pythagoricienne.

4.1 Illimités et limitants

Commençons par lire trois fragments de Philolaos. La traduction que je propose est issue de la comparaison des traductions existantes [88 ; Huf93].

Fragment B I

Ce sont les illimités et les limitants qui ont, en s'harmonisant, constitué au sein du monde la nature, ainsi que la totalité du monde et tout ce qu'il contient.

Fragment B II

Il est nécessaire que tous les êtres soient ou bien limitants, ou bien illimités, ou bien à la fois limitants et illimités. Mais il ne saurait y avoir rien que des illimités ou rien que des limitants. Aussi, puisqu'il est visible que le monde n'est pas fait rien que de limitants ni rien que d'illimités, il est bien clair que c'est de l'accord à la fois de limitants et d'illimités que le monde ainsi que tout ce qu'il contient ont été constitués. Cela est encore prouvé par l'observation des faits car les choses qui sont constituées de limitants, limitent ; d'autres, constituées à la fois de limitants et d'illimités, limitent et illimitent ; et d'autres encore, constituées d'illimités, seront à l'évidence illimitées.

Fragment B VI (première partie)

Touchant la nature et l'harmonie, voici ce qu'il en est : l'être des choses, qui est éternel, et la nature elle même requièrent une connaissance divine et non humaine ; d'autant plus qu'aucune chose existante ne pourrait être connue de nous, s'il n'existait pas un être fondamental des choses dont se trouve composé le monde : les limitantes et les illimitées. Mais, puisque ces principes existent en tant que non semblables et non homogènes, il serait impossible qu'un monde se soit constitué à partir d'eux, s'il ne s'y était ajoutée une harmonie, quelle que soit la manière dont elle est née. Les semblables et apparentés ne requièrent aucune harmonie ; mais les dissemblables non apparentés et non également ordonnés doivent être nécessairement enchaînés par une harmonie telle qu'ils puissent, grâce à elle, se maintenir dans le monde.

Cherchons à présent à comprendre ce que désignent les deux mots essentiels de ces fragments.

— Les choses *illimitées* sont celles qui sont capables de nuances et de variabilité telles que l'on a difficulté à y poser des repères. Une chose illimitée n'est pas nécessairement infiniment grande, mais elle résiste au microscope : elle est faite d'une matière qui n'a pas d'atome. Elle n'est pas simplement composée d'infiniment petit et tout essai de la découper en morceaux peut circonscrire une région de la chose mais ne supprime pas l'infinie variabilité.

— Les choses limitantes sont aussi dans la nature. En même temps, elles surgissent grâce à un effort de l'intelligence et elles ont un caractère provisoire : elles contiennent une part d'arbitraire qu'une meilleure connaissance permet de réduire. Ce sont elles qui fournissent une prise sur les illimités.

La table 1 propose des exemples de rapports entre choses illimitées et choses limitantes. On se rend compte que ce sont les limitants qui permettent d'appréhender les illimités, c'est-à-dire de les percevoir et de les comprendre. Le premier exemple est dû à Léon Brunschvicg [Bru12, pages 33-35].

illimité	limitant	harmonie	illimité et limitant	nombre
ciel	étoile	constellation	lune	nombre d'étoiles
son	rapport de fréquences	gamme	intervalle de fréquences	rapport de fréquences
discours	lettre	mot ; syntaxe	assertion orale	règle de poésie
mer	phare	carte maritime	lac	coordonnées maritimes
terre	lieu	carte terrestre	village	coordonnées terrestres
espace	point	figure	figure pleine	rapport de longueurs
temps	instant	horloge	jour	calendrier

TABLE 1 – Illimités et limitants

4.2 La gamme de Philolaos

Il semble que la musique ait été une impulsion essentielle dans l'élaboration de la philosophie pythagoricienne. Lisons le fragment suivant, qui est la plus ancienne théorie de la musique qui nous soit parvenue de l'Antiquité.

Fragment B VI (deuxième partie)

La grandeur de l'harmonie comprend la syllabe [« la prise », c'est-à-dire la quarte] et la dioxie [« à travers les aiguës », c'est-à-dire la quinte]. La dioxie est plus grande que la syllabe du rapport 9 : 8 [c'est-à-dire d'un ton]. En effet, une syllabe sépare l'hypate [c'est-à-dire la corde du haut, le mi] de la mèse [c'est-à-dire de la corde du milieu, du la] ; une dioxie la mèse de la nète [c'est-à-dire de la corde du bas, du mi] ; une syllabe la nète de la trite [c'est-à-dire de la corde tierce, du si] ; et une dioxie la trite de l'hypate. Entre la trite et la mèse il y a le rapport 9 : 8. La syllabe a le rapport 4 : 3, la dioxie 3 : 2 et le diapason [« à travers toutes », c'est-à-dire l'octave] 2 : 1. Ainsi l'harmonie comprend cinq rapports 9 : 8 et deux dièses [« laissés passer », c'est-à-dire demi-tons], la dioxie trois rapports 9 : 8 et un dièse, et la syllabe deux rapports 9 : 8 et un dièse.

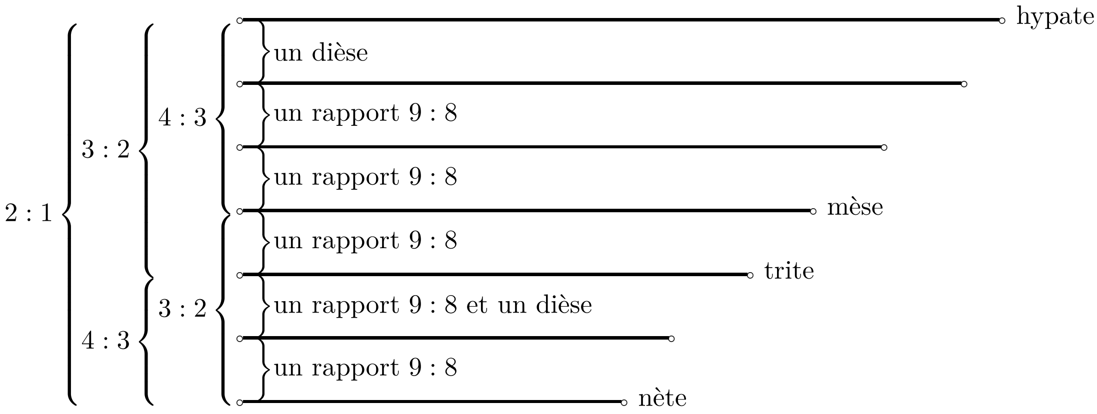


FIGURE 1 – L'heptacorde de Philolaos

Il s'agit de la description de la gamme produite par un heptacorde qui comprend une octave entière, c'est-à-dire que l'accord de l'hypate et de la nète est le plus harmonieux qui soit, celui produit par le pincement d'une corde suivi du pincement de la moitié de cette corde en en tenant le milieu.

Cette description suit la manière dont les musiciens accordent leur instrument :
— la mèse avec la nète pour obtenir une quinte,
— la trite avec l'hypate pour obtenir une quinte,
— puis les autres cordes pour obtenir des tons ;
— néanmoins certains accords contiendront des dièses.

4.3 Les nombres

Les fragments qui suivent sont ceux dont la réception a été la plus forte dans la Grèce antique et jusqu'à aujourd'hui. Ils expriment que les nombres sont des limitants que l'on peut trouver dans toute chose et qu'ils sont l'instrument même de la connaissance.

Fragment B IV

> Et de fait, tout être connaissable a un nombre : sans celui-ci, on ne saurait rien concevoir ni rien connaître.

Aristote a encore résumé cette pensée en une formule qui a fait mouche : « Les pythagoriciens prétendent que les choses mêmes sont nombres » [Ari53, 987*b*28].

Le fragment suivant est un exemple primitif de la théorie des nombres entreprise depuis Pythagore : connaître les nombres permet de connaître la forme des étants.

Fragment B V

> De fait, le nombre a deux formes propres, l'impair et le pair, plus une troisième produite par le mélange des deux, le pair-impair. Chacune des deux formes revêt des aspects multiples, qu'exprime chaque objet pris isolément.

Carl Huffman [Huf93, pages 189-190] avance l'explication peut-être un peu simpliste de la forme « pair-impair » comme forme des rapports de nombres lorsqu'ils se réduisent au rapport d'un nombre pair et d'un nombre impair comme le sont tous ceux de la figure 1. Je vois dans ce fragment le germe d'une dérive vers la numérologie.

Voici comment Ernst Cassirer décrit l'œuvre des pythagoriciens.

> Si les pythagoriciens qualifient le nombre de οὐσία [substance], s'ils unifient systématiquement le concept de nombre et d'être, l'exploit essentiel de cette pensée est qu'elle est la première à découvrir véritablement l'être spécifique du nombre pur. Car l'être physique, sensible, corporel, n'est pas identifié avec celui du nombre ; autant l'un *réfère* à l'autre de manière déterminée, autant ils sont séparés et *distingués*. [Cas25, page 29]

4.3.1 Compte rendu par Aristote des conceptions pythagoriciennes du nombre

Nous reproduisons ci-dessous de longs extraits du livre A de la *Métaphysique* d'Aristote et renvoyons aux exercices pour la discussion. Il s'agit de notre principale source sur la philosophie des mathématiques pythagoriciennes et de leur influence sur la pensée de Platon.

5

<*Suite de l'examen. – Les* PYTHAGORICIENS*, les* ÉLÉATES. *– La cause formelle.*>

Au temps de ces philosophes, et même avant eux, ceux qu'on désigne sous le nom de PYTHAGORICIENS se consacrèrent les premiers aux mathématiques et les firent progresser. Nourris dans cette discipline, ils estimèrent que les principes des mathématiques sont les principes de tous les êtres. Et comme de ces principes les nombres sont, par nature, les premiers, et que, dans les nombres, les PYTHAGORICIENS croyaient apercevoir une multitude d'analogies avec tout ce qui est et devient, plus qu'ils n'en apercevaient dans le Feu, la Terre et l'Eau (telle détermination des nombres étant la justice, telle autre l'âme et l'intelligence, telle autre le temps critique, et de même, pour ainsi dire, pour chacune des autres déterminations) ; comme ils voyaient, en outre, que des nombres exprimaient les propriétés et les proportions musicales ; comme, enfin, toutes les autres choses leur paraissaient, dans leur nature entière, être formées à la ressemblance des nombres, et que les nombres semblaient être les réalités primordiales de l'Univers : dans ces conditions, ils considérèrent que les principes des nombres sont les éléments de tous les êtres, et que le Ciel tout entier est harmonie et nombre. Et toutes les concordances qu'ils pouvaient relever, dans les nombres et la Musique, avec les phénomènes du Ciel et ses parties et avec l'ordre de l'Univers, ils les réunissaient et les faisaient entrer dans leur système ; et, si une lacune se révélait quelque part, ils procédaient en hâte aux additions nécessaires pour assurer la complète cohérence de leur théorie. Par exemple, la Décade paraissant être un nombre parfait et embrasser toute la nature des nombres, ils disent que les Corps célestes en mouvement sont au nombre de dix ; mais comme les Corps visibles ne sont que neuf, pour ce motif ils en supposent un dixième, l'Antiterre.

Nous avons traité de tous ces points par ailleurs, avec plus de précision. Mais si nous y revenons, c'est pour apprendre de ces philosophes aussi ce qu'ils posent comme principes, et comment leurs principes tombent sous les causes que nous avons déjà énumérées. Or, à cet égard, il apparaît qu'ils estiment, eux aussi, que le nombre est principe, à la fois comme matière des êtres et comme constituant leurs modifications et leurs états. Les éléments du nombre sont le Pair et l'Impair ; le Pair est infini, l'Impair, fini ; l'Un procède de ces deux éléments, car il est à la fois pair et impair, et le nombre procède de l'Un ; et l'ensemble du Ciel, comme il a été dit, est nombres.

D'autres, parmi ces mêmes philosophes, reconnaissent dix principes, qu'ils rangent en deux séries parallèles :

Limite et Illimité,
Impair et Pair,
Un et Multiple,
Droit et Gauche,
Mâle et Femelle,
en Repos et Mû,
Rectiligne et Courbe,
Lumière et Obscurité,
Bon et Mauvais,
Carré et Oblong. (*Métaphysique* A, 985*b*23-986*a*26, [Ari53, p. 41-46].)

. . . .

Les PYTHAGORICIENS ont parlé, dans le même sens, de deux principes, mais ils ont ajouté les deux particularités suivantes. D'abord, le Limité, ou l'Un, et l'Illimité ne sont pas, pensaient-ils, certaines autres réalités, telles que le Feu, la Terre ou un autre élément de cette sorte, mais c'est l'Illimité même et l'Un même qui sont la substance des choses dont ils sont affirmés, et c'est pourquoi ils disaient que le nombre est la substance de toutes choses. Telle est la manière dont ils se sont expliqués sur ce point. En second lieu, au sujet de l'essence, c'est eux qui ont commencé à raisonner et à définir ; seulement ils ont procédé d'une façon par trop simpliste. En effet, ils définissaient superficiellement, et, en outre, le premier nombre auquel était applicable la définition donnée, ils le considéraient comme l'essence de la chose définie : comme si on croyait le double et la dyade identiques parce que la dyade est la première chose dont le double est affirmé ! Mais, sans doute, l'essence du double et de la dyade n'est-elle pas la même, sinon l'Un serait multiple ; c'est là du reste une conséquence qu'ils n'hésitaient pas à tirer.

Des anciens philosophes et de leurs successeurs, tel est donc tout ce que nous pouvons retenir.

6

<La théorie platonicienne des Idées.>

Après les philosophies dont nous venons de parler, survint la théorie de Platon, en accord le plus souvent avec celle des Pythagoriciens, mais qui a aussi ses caractères propres, bien à part de la philosophie de l'École Italique. – Dès sa jeunesse, Platon, étant devenu d'abord ami de Cratyle et familier avec les opinions d'Héraclite, selon lesquelles toutes les choses sensibles sont dans un flux perpétuel et ne peuvent être objet de science, demeura par la suite fidèle à cette doctrine. D'un autre côté, Socrate, dont les préoccupations portaient sur les choses morales, et nullement sur la Nature dans son ensemble, avait pourtant, dans ce domaine, cherché l'universel, et fixé, le premier, la pensée sur les définitions. Platon accepta son enseignement, mais sa formation première l'amena à penser que cet universel devait exister dans des réalités d'un autre ordre que les choses sensibles : il est impossible, en effet, croyait-il, que la définition commune existe dans aucun des objets sensibles individuels, de ceux du moins qui sont en perpétuel changement. Guidé par ces raisons, il donna alors à de telles réalités le nom d'*Idées*, disant, d'autre part, que les choses sensibles sont séparées des Idées et sont toutes dénommées d'après elles : c'est, en effet, par participation qu'existe la pluralité sensible, univoque à l'égard des Idées. Quant à cette *participation*, Platon ne modifiait que le nom : les Pythagoriciens, en effet, disent que les êtres existent par *imitation* des nombres ; pour Platon, c'est par une *participation*, le mot seul est changé. Toutefois cette participation ou imitation des Idées, quelle en peut être la nature : c'est là une recherche qu'ils ont laissée dans l'indécision. – De plus, outre les choses sensibles et les Idées, Platon admet qu'il existe les Choses mathématiques, qui sont des réalités intermédiaires, différentes, d'une part, des objets sensibles, en ce qu'elles sont éternelles et immobiles, et, d'autre part, des Idées, en ce qu'elles sont une pluralité d'exemplaires semblables, tandis que l'Idée est en elle-même une réalité une, individuelle et singulière. – Les Idées étant causes pour les autres choses, il estima que les éléments des Idées sont les éléments de tous les êtres ; ainsi, en tant que matière, les principes des Idées sont le Grand et le Petit, et, en tant que substance formelle, c'est l'Un, car c'est à partir du Grand et du Petit, et par participation du Grand et du Petit à l'Un, que naissent les Nombres idéaux. – Que pourtant l'Un soit la substance même, et non le prédicat d'une autre chose de laquelle on dit qu'elle est une, Platon en tombe d'accord avec les Pythagoriciens ; que les nombres soient les causes de la substance des autres êtres, il l'admet encore pareillement avec eux. Mais remplacer l'Infini, qu'ils concevaient comme simple, par une Dyade, et constituer l'Infini avec le Grand et le Petit, voilà l'apport personnel de Platon. Un autre point qui lui est particulier, c'est qu'il place les nombres en dehors des objets sensibles, tandis que les Pythagoriciens prétendent que les choses mêmes sont nombres, et, d'autre part, ne posent pas les Choses mathématiques comme des êtres intermédiaires entre les Idées et le sensible. S'il sépara ainsi du monde sensible l'Un et les Nombres, contrairement aux Pythagoriciens, et s'il introduisit les Idées, ce fut en raison de ses recherches d'ordre logique (car ses prédécesseurs ne possédaient aucune connaissance de la Dialectique) ; si, d'autre part, il pose la Dyade indéfinie comme seconde nature, cela tient à ce que les Nombres, à l'exception des Nombres impairs, naissent facilement de la Dyade, comme de quelque matière plastique. Pourtant c'est le contraire qui se passe en réalité, et l'opinion de ces philosophes n'est pas rationnelle. De la matière ils font sortir, en effet, une multiplicité de choses, tandis que, suivant eux, la forme n'engendre qu'une seule fois ; mais, au contraire, il est manifeste que d'une seule matière on ne tire qu'une seule table, tandis que l'artiste, qui applique la forme, fabrique, tout en étant un, plusieurs tables. Il en est de même du mâle par rapport à la femelle : celle-ci est fécondée par un seul accouplement, mais le mâle féconde plusieurs femelles ; c'est là pourtant une image du rôle que jouent ces principes.

Telle est donc la façon dont Platon a défini sa doctrine sur les points en question. Les considérations qui précèdent montrent avec évidence qu'il ne s'est servi que de deux sortes de causes : de la cause formelle et de la cause matérielle (en effet, les Idées sont causes de l'essence pour toutes les autres choses, et l'Un, à son tour, est cause pour les Idées) ; et cette matière, qui est substrat (et de laquelle se disent les Idées, pour les choses sensibles, et l'Un, pour les Idées), c'est la Dyade, c'est le Grand et le Petit. Platon a encore placé, dans l'un de ces deux éléments, la cause du bien, et dans l'autre, celle du mal, doctrine que déjà, avons-nous dit, cherchaient à soutenir certains philosophes de l'âge antérieur, tels qu'Empédocle et Anaxagore. (*Métaphysique* A, 987*a*13-988*a*17, [Ari53, p. 50-66].)

. . . .

8

<*Critique des systèmes antérieurs à* Platon.>

> ....
>
> Ceux qu'on désigne sous le nom de Pythagoriciens font appel à des principes et à des éléments plus éloignés que ceux des physiologues (la raison en est qu'ils ne les dérivaient pas des objets sensibles, car les Choses mathématiques rentrent dans la classe des êtres sans mouvement, à l'exception de celles dont traite l'Astronomie) : leurs discussions et leurs recherches n'en portent pas moins toutes sur la Nature, car ils décrivent l'origine du Ciel et ils observent ce qui se passe dans ses différentes parties, ses modifications et ses fonctions. C'est à cette étude qu'ils dépensent entièrement leurs principes et leurs causes, d'accord apparemment avec les autres philosophes naturalistes pour penser que la réalité se réduit strictement à ce qui est sensible et à ce qui est contenu dans ce que nous appelons le cercle du Ciel. Et cependant leurs causes et leurs principes sont, ainsi que nous l'avons dit, suffisants, selon leur propre système, pour les hausser à la conception d'un ordre de réalités plus élevé, et s'y adaptent mieux qu'à leurs théories physiques. De quelle manière, cependant, se produira le mouvement, alors qu'on ne pose rien d'autre que la Limite et l'Illimité, avec l'Impair et le Pair ? Ils n'en fournissent aucune explication, pas plus qu'ils n'expliquent comment peuvent s'opérer, sans mouvement et sans changement, la génération et la corruption, ou les révolutions des Corps qui se meuvent dans le Ciel. Bien plus : accordons-leur, ou admettons qu'il soit démontré, que l'étendue résulte de leurs principes ; comment cependant expliquer la légèreté ou la pesanteur des corps ? D'après ce qu'ils supposent eux-mêmes et déclarent, ils doivent rendre compte aussi bien des corps sensibles que des corps mathématiques. Aussi, s'ils n'ont jamais parlé du Feu, de la Terre, et des autres corps de cette sorte, c'est, je pense, parce qu'ils n'ont rien de spécial à dire des êtres sensibles. En outre, comment concevoir que les déterminations du nombre et le nombre lui-même, soient causes des êtres et du devenir de l'Univers matériel, et cela dès l'origine et maintenant encore, s'il n'y a aucun autre nombre en dehors de ce nombre dont le Monde est composé ? Les Pythagoriciens ont, en effet, placé, dans telle partie déterminée de l'Univers, l'opinion et le temps critique, et, un peu au-dessus ou au-dessous, l'injustice et la décision ou le mélange ; et ils en donnent comme démonstration, que chacune de ces choses est un nombre, et que déjà se trouve en fait réunie, dans ce même lieu, une multiplicité de grandeurs composées de nombres parce que les déterminations du nombre qui les constituent sont localisées dans les différentes régions de l'étendue. Mais alors une question se pose : est-ce que ce nombre, que nous devons comprendre comme représentant chacune de ces abstractions, est le même que celui qui est dans l'Univers, ou bien est-ce un autre nombre distinct de lui ? Platon affirme que c'est un autre nombre. Pourtant, lui aussi pense que tous ces êtres, ainsi que leurs causes sont des nombres ; seulement, pour lui, les nombres intelligibles sont causes, et les autres sont sensibles. (*Métaphysique* A, 989*b*29-990*a*32, [Ari53, p. 74-76].)

5 Conclusion sur l'apport des philosophes présocratiques

Le nombre réduit et la forme sèche des fragments présocratiques discutés ici n'empêchent pas de saisir le continu et l'illimité comme défis majeurs pour les éléates et les pythagoriciens. Les paradoxes de Zénon ont décrit très tôt les obstacles d'une description vraisemblable du rapport entre le continu et ses constituants. De même, le nombre comme instrument de connaissance s'est tôt heurté à la découverte de l'incommensurabilité en géométrie.

La forme axiomatique de la géométrie d'Euclide peut être comprise dans ce sens comme une manière d'organiser les opinions sur le monde sensible de manière vraisemblable sans jamais s'exprimer sur la nature du continu, c'est-à-dire sur le rapport entre l'espace et le point, et en émancipant la géométrie du nombre.

Les conséquences d'une approche historique et philosophique de la méthode axiomatique sur la didactique des mathématiques sont discutés par Gilbert Arsac [Ars87].

6 La découverte de l'incommensurabilité

Dans cette section, nous allons raconter comment Kurt von Fritz [Fri45] croit qu'Hippase de Métaponte a découvert l'incommensurabilité au début du 5^{e} siècle avant notre ère. Cette reconstruction est belle, mais elle repose sur une base d'indices très fragile.

Cette découverte est une révolution scientifique par rapport à la science de Philolaos. En effet, si on suit son fragment B v, aussi les figures géométriques doivent être appréhendées par des nombres. En particulier, si on conçoit une figure géométrique particulière, les segments doivent être commensurables, c'est-à-dire qu'ils doivent tous être des multiples d'un segment élémentaire. Or nous allons voir que ce n'est pas le cas.

6.1 Compte rendu de l'incommensurabilité dans les *Éléments* d'Euclide

Nous allons présenter les *Éléments* d'Euclide dans la section 7. Le dixième livre de ces *Éléments* contient le plus ancien exposé d'une théorie de l'incommensurabilité. Je donne ici la traduction de Bernard Vitrac [Euc98].

Définitions

x.1 Sont dites grandeurs *commensurables* celles qui sont mesurées par la même mesure, et *incommensurables*, celles dont aucune commune mesure ne peut être produite.

x.2 Des droites sont, *en puissance*, *commensurables* quand les carrés [décrits] sur elles sont mesurés par la même aire, et *incommensurables* quand aucune aire, commune mesure aux carrés [décrits] sur elles, ne peut être produite.

x.3 Cela étant supposé il est démontré que par rapport à une droite proposée, il existe des droites, infinies en multitude, commensurables ou incommensurables [avec elle], les unes en longueur seulement, les autres aussi en puissance.

D'une part donc que la droite proposée soit appelée *exprimable* et, celles [qui sont] commensurables avec elle, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement, *exprimables* ; d'autre part que celles [qui sont] incommensurables avec elle soient appelées *irrationnelles*.

x.4 Et que d'une part soit appelé *exprimable* le carré [décrit] sur la droite proposée et *exprimables* les [aires] commensurables avec celui-ci, *irrationnelles* d'autre part celles qui sont incommensurables avec celui-ci et *irrationnelles* les [droites] pouvant les produire : s'il s'agit de carrés, les côtés eux-mêmes, s'il s'agit de certaines autres [figures] rectilignes, celles qui décrivent des carrés [qui] leur [sont] égaux.

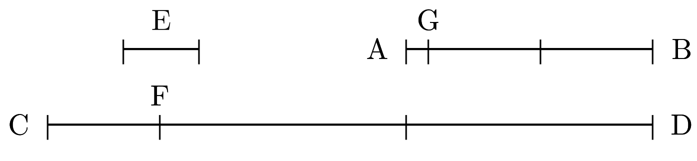
Propositions

x.2 *Si, de deux grandeurs inégales {proposées}*[2] *la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le [reste] précédent, les grandeurs seront incommensurables.*

En effet AB, CD étant deux grandeurs inégales et AB la plus petite, la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, que le reste ne mesure jamais le précédent. Je dis que les grandeurs AB, CD sont incommensurables.

En effet si elles sont commensurables une certaine grandeur les mesurera. Qu'elle les mesure, si c'est possible, et que ce soit E.

Et d'une part que AB mesurant FD, il reste CF plus petite qu'elle, d'autre part que CF mesurant BG, il reste AG plus petite qu'elle et que ceci soit toujours poursuivi jusqu'à ce qu'il reste une certaine grandeur plus petite que E. Que ceci se produise et qu'il reste AG plus petite que E.



Et puisque E mesure AB, mais que AB mesure DF, E mesurera donc aussi DF. Or elle mesure aussi le tout CD ; et donc elle mesurera le reste CF. Mais CF mesure BG ; et donc E mesure

2. Les accolades contiennent les mots ou les passages que Heiberg, l'éditeur du texte grec, considère comme interpolés, c'est-à-dire comme ajoutés au texte original.

BG. Or elle mesure aussi le tout AB ; et donc elle mesurera le reste AG, la plus grande, le plus petit. Ce qui est impossible. Donc aucune grandeur ne mesurera les grandeurs AB, CD ; les grandeurs AB, CD sont donc incommensurables (Df. X.1).

Donc si de deux grandeurs inégales. . ., etc.

Cette proposition X.2 implémente une version géométrique de l'algorithme d'Euclide, appelée « anthyphérèse ».

6.2 Côté et diagonale du pentagone régulier

Selon Kurt von Fritz, l'anthyphérèse comme procédé pour trouver la commune mesure de deux segments aurait été découverte par Hippase de Métaponte dans l'étude du cas particulier du côté du pentagone régulier et de sa diagonale (qui est le côté du pentagramme inscrit dans le pentagone). Dans ce cas particulier, l'anthyphérèse est particulièrement simple à cause de la propriété géométrique suivante : deux diagonales du pentagone régulier se coupent de sorte qu'ils se subdivisent en deux segments dont le plus grand est égal au côté du pentagone. Cette propriété est démontrée dans la proposition 8 du treizième livre des *Éléments* d'Euclide qui repose sur des propositions du premier livre, reproduits dans la section 7, mais aussi du troisième, du quatrième et du sixième livre que je reproduis ici dans la traduction de Bernard Vitrac [Euc90 ; Euc94 ; Euc01].

III.28 *Dans les cercles égaux les droites égales découpent des circonférences égales, la plus grande à la plus grande et la plus petite à la plus petite.*

IV.14 *Circonscrire un cercle autour d'un pentagone donné, lequel est équilatéral et équiangle.*

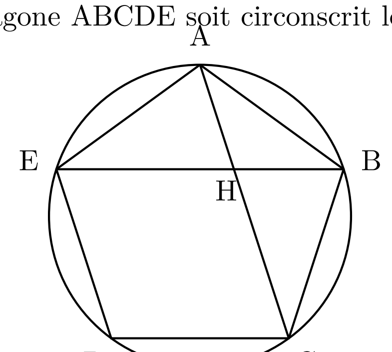
VI.33 *Dans les cercles égaux, les angles ont le même rapport que les circonférences sur lesquelles ils s'appuient, qu'ils soient situés aux centres ou sur les circonférences.*

XIII.8 *Si des droites sous-tendent deux angles consécutifs d'un pentagone équilatéral et équiangle, elles se coupent l'une l'autre en extrême et moyenne raison, et leurs plus grands segments sont égaux au côté du pentagone.*

En effet que les droites AC, BE sous-tendent deux angles consécutifs d'un pentagone équilatéral et équiangle ABCDE, ceux en A, B, se coupant l'une l'autre au point H.

Je dis que chacune d'elles est coupée en extrême et moyenne raison au point H, et que leurs plus grands segments sont égaux au côté du pentagone.

En effet qu'autour du pentagone ABCDE soit circonscrit le cercle ABCDE (IV.14).



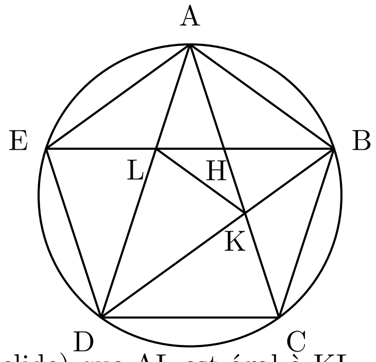
Et puisque les deux droites EA, AB sont égales aux deux AB, BC, et contiennent des angles égaux, donc la base BE est égale à la base AC et le triangle ABE est égal au triangle ABC, et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, ceux que les côtés égaux sous-tendent. Donc l'angle sous BAC est égal à celui sous ABE (I.4) ; donc celui sous AHE [est] double de celui sous BAH (I.32). Or celui sous EAC est aussi double de celui sous BAC, puisqu'en effet la circonférence EDC est aussi double de la circonférence CB (III.28 ; VI.33) ; donc l'angle sous HAE [est] égal à celui sous AHE ; de sorte aussi que la droite HE est égale à EA (I.6), autrement dit à AB. [. . .]

J'interromps ici la démonstration de la proposition 8 parce qu'Hippase n'aurait pas eu besoin de la deuxième moitié de la proposition qui décrit le rapport des deux segments qui composent la diagonale : ce rapport est le nombre d'or puisque la définition 3 du sixième livre énonce ce qui suit.

Une droite est dite *être coupée en extrême et moyenne raison* quand, comme elle [est] tout entière relativement au plus grand segment, ainsi est le plus grand relativement au plus petit.

Nous aurons besoin d'une deuxième égalité géométrique qui découle de la démonstration ci-dessus.

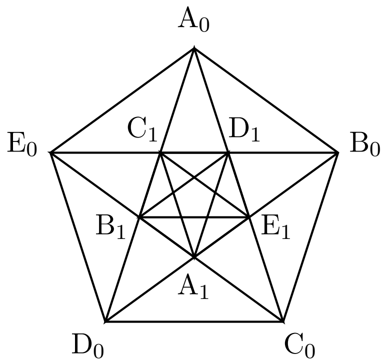
Si des droites sous-tendent quatre angles consécutifs d'un pentagone équilatéral et équiangle, la droite qui joint l'intersection des deux premières à l'intersection des deux dernières est égale à leur plus petit segment.



Je dis (pour imiter le style d'Euclide) que AL est égal à KL.

6.3 Anthyphérèse de la diagonale et du côté du pentagone régulier

Considérons le pentagone régulier $A_0B_0C_0D_0E_0$ et traçons ses diagonales. Elles se coupent en cinq autres points qui sont les sommets d'un petit pentagone régulier $A_1B_1C_1D_1E_1$. Nommons ces points de sorte que A_1 soit opposé à A_0 par le centre du cercle circonscrit, et de même pour les autres points.



Cherchons la commune mesure du côté A_0B_0 et de la diagonale A_0C_0 par le procédé de la proposition x.2.

— Retranchons A_0B_0 de A_0C_0. Par la proposition xiii.8, c'est retrancher D_1C_0 de A_0C_0 : on obtient A_0D_1.
— Retranchons A_0D_1 de A_0B_0. Par la même proposition, c'est retrancher A_0D_1 de A_0E_1 : on obtient D_1E_1.
— Par la deuxième égalité de la sous-section précédente, A_0D_1 égale A_1C_1.

Nous avons donc montré que la commune mesure recherchée est la commune mesure du côté D_1E_1 et de la diagonale A_1C_1 du petit pentagone $A_1B_1C_1D_1E_1$. Or « le dire une fois revient à le dire sans cesse. » Donc cette commune mesure est plus petite que tout segment donné, ce qui est impossible.

Insistons à la fin de cette discussion sur le caractère ontologique de la question de l'incommensurabilité : il s'agit de savoir comment *parler* du rapport entre côté et diagonale du pentagone, alors qu'on sait qu'en pratique, on ne peut pas dessiner des pentagones arbitrairement petits et qu'on se contentera pratiquement d'une commune mesure selon la précision recherchée.

7 Le premier livre des *Éléments* d'Euclide d'Alexandrie

On sait si peu d'Euclide d'Alexandrie qu'on n'est même pas certain qu'il ait jamais existé. Les *Éléments* sont le livre le plus édité de l'humanité après la Bible et en même temps le traité de mathématiques le plus ancien qui nous soit parvenu.

Voici le compte rendu de Maurice Caveing de l'explication par Proclus de Lycie (voir la section 8) du titre de ce traité dans ses *Commentaires sur le premier livre des* Éléments *d'Euclide* (lignes 72.1-75.4).

> Au demeurant, Proclus sur la question est parfaitement clair. C'est ainsi qu'il souligne d'abord la distinction entre les théorèmes qui sont qualifiés d'« éléments », ceux qui sont seulement « élémentaires », et enfin tous les autres. Sont des « éléments » les théorèmes grâce auxquels la théorie progresse vers la connaissance d'autres propositions et qui fournissent la solution des difficultés que celles-ci recèlent. Ils sont en cela comparables aux lettres de l'alphabet qui sont les éléments simples, premiers et indivisibles dont l'arrangement constitue tout mot et tout discours écrits. On retrouve donc ici le sens étymologique qui renvoie à στοῖχος : « rang », « rangée », « ordre (de bataille) ». Des objets A sont des στοιχεῖα de l'objet B seulement si leur arrangement produit B. De même, pour l'ensemble de la Géométrie, poursuit Proclus, il est certains théorèmes directeurs, entretenant avec ceux qui les suivent un rapport de principes à conséquences, qu'on retrouve partout, et qui procurent les démonstrations de nombreux cas particuliers. Par contre, sont élémentaires toutes les propositions qui, bien qu'intervenant dans un certain nombre d'autres, même un assez grand nombre, et ne manquant ni de simplicité ni d'élégance, n'ont pourtant pas valeur d'éléments du fait que leur considération n'est pas commune à la science en toutes ses parties, comme, par exemple, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes. [Euc90, pages 84-85]

L'importance de ce traité m'incite à reproduire l'ensemble des définitions, demandes et notions communes du premier livre, l'ensemble des propositions (théorèmes et problèmes) ainsi que les démonstrations des propositions essentielles pour la compréhension de la demande 5. Je donne la traduction de Bernard Vitrac [Euc90], basée sur l'édition du texte grec par Heiberg.

7.1 Définitions

- I.1 Un *point* est ce dont il n'y a aucune partie.
- I.2 Une *ligne* est une longueur sans largeur.
- I.3 Les *limites d'une ligne* sont des points.
- I.4 Une *ligne droite* est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.
- I.5 Une *surface* est ce qui a seulement longueur et largeur.
- I.6 Les *limites d'une surface* sont des lignes.
- I.7 Une *surface plane* est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle.
- I.8 Un *angle plan* est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.
- I.9 Et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé *rectiligne*.
- I.10 Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est *droit*, et la droite qui a été élevée est appelée *perpendiculaire* à celle sur laquelle elle a été élevée.
- I.11 Un angle *obtus* est celui qui est plus grand qu'un droit.
- I.12 Un angle *aigu* celui qui est plus petit qu'un droit.
- I.13 Une *frontière* est ce qui est limite de quelque chose.
- I.14 Une *figure* est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s).
- I.15 Un *cercle* est une figure plane contenue par une ligne unique {celle appelée circonférence} par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont {jusqu'à la circonférence du cercle} égales entre elles.
- I.16 Et le point est appelé *centre* du cercle.
- I.17 Et un *diamètre* du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.

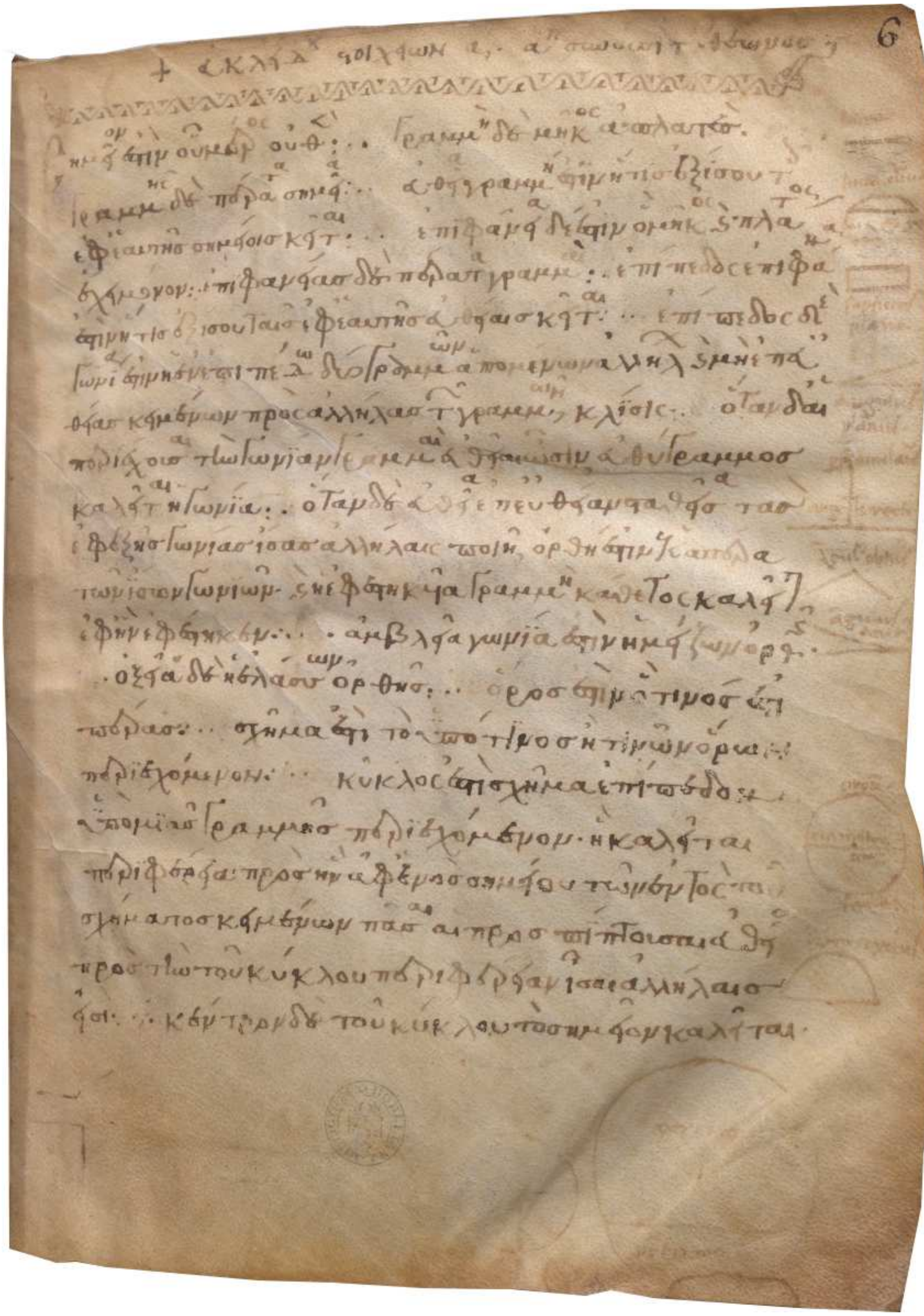


FIGURE 2 – Le début des *Éléments* : folio 6 du manuscrit MS D'Orville 301 (888 après J.-C.)

I.18 Un *demi-cercle* est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui ; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle.

I.19 Les *figures rectilignes* sont les figures contenues par des droites ; trilatères : celles qui sont contenues par trois droites, quadrilatères par quatre ; multilatères par plus de quatre.

I.20 Parmi les figures trilatères est un *triangle équilatéral* celle qui a les trois côtés égaux ; *isocèle* celle qui a deux côtés égaux seulement ; *scalène* celle qui a les trois côtés inégaux.

I.21 De plus, parmi les figures trilatères est un triangle *rectangle* celle qui a un angle droit ; *obtusangle*, celle qui a un angle obtus ; *acutangle*, celle qui a les trois angles aigus.

I.22 Parmi les figures quadrilatères est un *carré* celle qui est à la fois équilatérale et rectangle ; est *oblongue* celle qui est rectangle mais non équilatérale ; un *losange*, celle qui est équilatérale mais non rectangle ; un *rhomboïde*, celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle ; et que l'on appelle *trapèzes* les quadrilatères autres que ceux-là.

I.23 Des droites *parallèles* sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

7.1.1 Commentaire sur la définition du point

Regardons la première définition : « un *point* est ce dont il n'y a aucune partie ». Ouvrez alors votre dictionnaire favori à l'entrée « point » pour vous rendre compte de la difficulté de le définir. Voici un florilège.

> **point** est issu (av. 1100) du latin *punctum*, dérivé du supin (*punctum*) de pungere (→ poindre) et qui, à partir du sens de base de “piqûre, action de piquer”, a développé de nombreuses acceptions particulières concrètes et abstraites. [...] En géométrie, *punctum* correspond au concept fondamental de la plus petite portion d'espace concevable, lié à l'idée de situation et d'analyse spatiales. [...] L'autre sens de base, “endroit fixe et déterminé”, est une extension spatiale (1176–1181) du précédent : lieu, zone aussi minuscule qu'une piqûre. Il est réalisé dans plusieurs spécialisations didactiques avec l'idée plus théorique, déjà assumée par le latin *punctum*, de “lieu sans étendue, défini par ses seules coordonnées” (v. 1265) [...] (Dictionnaire historique de la langue française, 1998)
>
> **point géométrique** rencontre de deux lignes. (Larousse universel, 1923)
>
> **point** en mathématiques, lieu idéal dans l'espace, n'ayant aucune étendue : *Point d'intersection de deux droites.* (Dictionnaire du français contemporain, 1980)
>
> **punto** il più semplice degli enti (essendo gli altri due la linea e il piano), privo di estensione e pertanto di forma: *due retti che si intersecano in un piano, determinano un p.; la retta è formata da una serie di punti.* Il punto geometrico è atto a individuare le posizioni nello spazio; il termine assume pertanto particolari qualificazioni in varie scienze. (Dizionario della lingua italiana, 1983)
>
> **point** that which has position but neither length, breadth, nor thickness; the smallest amount of space or time. (The royal english dictionary and word treasury, 1937)
>
> **point** intersection de deux droites, n'ayant aucune surface propre et généralement désigné par une lettre. *Les points* A, B, C. (Le Robert micro, 1998)
>
> **töčka** geometrijski element bez dimenzija. (Rječnik hrvatskoga jezika, 2000)
>
> **Punkt** Gebilde im Raume (in der Fläche) ohne jede Ausdehnung. (Beckmanns Welt-Lexikon, ≈ 1930)
>
> **point** that which has neither length, breadth, nor thickness. (Chambers's etymological dictionary, 1912)
>
> **point** élément d'espace, de dimension très réduite, qui est ou qui peut être figuré par l'intersection de deux droites : *Par deux points distincts ne peut passer qu'une seule droite. En un point quelconque de la feuille.* (Grand dictionnaire encyclopédique Larousse, 1984)
>
> **point** figure géométrique sans dimension ; intersection de deux lignes. (Petit Larousse, 1992)
>
> **pùnto** uno degli enti fondamentali della geometria, unitamente alla retta e al piano. Nella definizione euclidea, il *p.* è definito come ciò che non ha parti. A questa definizione intuitiva si preferisce oggi sostituire un'impostazione assiomatica, per cui gli enti geometrici fondamentali sono implicitamente definiti dal soddisfare un sistema di assiomi. (Dizionario enciclopedico Melzi, 1994)
>
> **pùnto** Concetto geometrico primitivo, insieme alla retta e al piano, intuitivamente legato al concetto di *posizione* nello spazio, non scomponibile e privo di dimensioni. Negli *Elementi* di Euclide, esso è implicitamente definito dai postulati del piano. Il concetto viene esteso, nella matematica moderna,

a indicare l'ente fondamentale in spazi di varia natura (es. un vettore in uno spazio vettoriale, una funzione in uno spazio funzionale, ecc.) (Enciclopedia Zanichelli, 2000)

point (1) a geometric element of which it is postulated that at least two exist and that two suffice to determine a line (2) a geometric element determined by an ordered set of coordinates. (Encyclopædia britannica, 2003)

point la plus petite portion d'étendue qu'il soit possible de concevoir, ou bien que l'on conçoit comme n'ayant aucune étendue. (Dictionnaire encyclopédique Quillet, 1934)

Punkt mathematisch, ein ausdehnungsloser, untheilbarer ort im raum, der anfangs- und endpunkt einer linie oder jede beliebige stelle auf derselben oder auf einer fläche; die stelle wo eine linie die andere berührt oder wo zwei linien sich schneiden, wo eine linie eine fläche schneidet u. s. w. *wie in der mathematik alle untheilbaren puncte einander ähnlich angenommen werden* (Wolff). *bemühung, die menschen zu entkörpern, um sie in die klasse der mathematischen punkte... zu erhöhen* (Wieland). (Deutsches Wörterbuch, 1889)

7.1.2 Commentaire sur la définition de la ligne droite

Par « droite » Euclide entend toujours une ligne droite limitée, c'est-à-dire un segment.

La définition de la droite a donné lieu à de nombreux commentaires. En particulier, Proclus propose les interprétations suivantes :

— « la ligne droite est la seule qui occupe une distance égale à celle qui existe entre les points placée sur elle » ;
— « Archimède définit la ligne droite comme étant la plus petite de celles qui ont les mêmes extrémités », ce qu'on retrouve dans la proposition I.20 ci-dessous ;
— « Platon définit la ligne droite comme étant celle dont les parties médianes masquent les parties extrêmes » (Platon écrit : « est droit, ce dont le centre fait écran aux deux extrémités »), ce qui est une définition "optique" selon laquelle il existe une position de la ligne droite dans laquelle on la voit réduite à un point ;
— « elle est une ligne tendue au plus haut point » ;
— « elle ne possède pas une partie dans son plan de support et une autre dans un plan plus élevé » ;
— « toutes ses parties s'ajustent semblablement à toutes » ;
— « elle ne forme pas une figure avec une seule ligne de la même espèce », ce qui revient à la notion commune I.9 ci-dessous.

Bernard Vitrac rappelle que l'expression « ἐξ ἴσου » [« de manière égale », « ex aequo »] est « courante dans le vocabulaire politique pour désigner une égalité de statut, de valeur ou un traitement impartial, sans parti pris ».

Pour ma part, je lis dans cette définition une description de la géodésique comme la ligne la moins courbe possible, comme celle qui reste en équilibre entre concavité et convexité, entre courbure d'un côté et de l'autre.

7.2 Demandes

I.1 Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.

I.2 Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.

I.3 Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.

I.4 Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.

I.5 [Postulat des parallèles.] Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

7.3 Notions communes

I.1 Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

I.2 Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.

I.3 Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.

I.4 {Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.

I.5 Et les doubles du même sont égaux entre eux.

I.6 Et les moitiés du même sont égales entre elles.}

I.7 Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.

I.8 Et le tout {est} plus grand que la partie.

I.9 {Et deux droites ne contiennent pas une aire.}

7.4 Propositions

I.1 *Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral.*

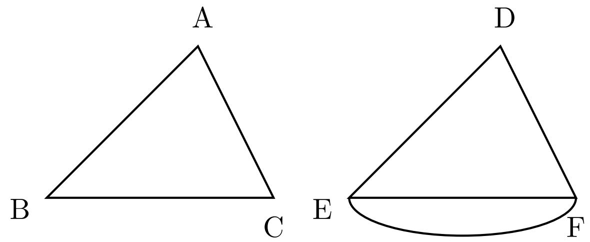
I.2 *Placer, en un point donné, une droite égale à une droite donnée.*

I.3 *De deux droites inégales données, retrancher de la plus grande, une droite égale à la plus petite.*

I.4 [Premier cas d'égalité des triangles.] *Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent.*

Soient deux triangles ABC, DEF ayant les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun, d'une part AB à DE, d'autre part AC à DF, ainsi que l'angle sous BAC égal à l'angle sous EDF.

Je dis que la base BC aussi est égale à la base EF, et le triangle ABC sera égal au triangle DEF, et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE.



En effet, le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, d'une part le point A étant posé sur le point D, d'autre part la droite AB sur DE, le point B aussi s'ajustera sur le point E parce que AB est égale à DE. Alors, AB étant ajustée sur DE, la droite AC aussi s'ajustera sur DF parce que l'angle sous BAC est égal à celui sous EDF. De sorte que le point C aussi s'ajustera sur le point F parce que, de plus, AC est égale à DF. Mais B a aussi été ajusté sur E. De sorte que la base BC s'ajustera sur la base EF {. En effet, si, d'une part B s'ajustant sur E, d'autre part C sur F, la base BC ne s'ajustait pas sur EF, deux droites contiendraient une aire, ce qui est impossible (N. C. 9). Donc la base BC s'ajustera sur EF} et lui sera égale (N. C. 7). De sorte que tout le triangle ABC s'ajustera aussi sur tout le triangle DEF et lui sera égal (N. C. 7), et les angles restants s'ajusteront sur les angles restants et leur seront égaux (N. C. 7), d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE.

Donc si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent. Ce qu'il fallait démontrer.

I.5 [Pont aux ânes.] *Les angles à la base des triangles isocèles sont égaux entre eux, et si les droites égales sont prolongées au-delà, les angles sous la base seront égaux entre eux.*

I.6 *Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés qui sous-tendent les angles égaux seront aussi égaux entre eux.*

I.7 *Sur la même ligne droite, ne seront pas construites, égales chacune à chacune aux deux mêmes droites, deux autres droites, en un point quelconque, différent mais du même côté, et ayant les mêmes limites que les premières.*

I.8 [Deuxième cas d'égalité des triangles.] *Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, s'ils ont, de plus, la base égale à la base, ils auront aussi un angle égal, à savoir celui qui est contenu par les droites égales.*

I.9 [Construction de la bissectrice.] *Couper un angle rectiligne donné en deux parties égales.*

I.10 [Construction du milieu.] *Couper en deux parties égales une droite limitée donnée.*

I.11 *Mener une ligne droite à angles droits avec une droite donnée, à partir d'un point donné sur celle-ci.*

I.12 *Mener une ligne droite perpendiculaire à une droite indéfinie donnée à partir d'un point donné qui n'est pas sur celle-ci.*

I.13 *Si une droite élevée sur une droite produit des angles, elle produira deux angles soit droits, soit égaux à deux droits.*

I.14 *Si, relativement à une certaine droite, et en un point situé sur elle, deux droites non placées du même côté, font des angles adjacents égaux à deux droits, les droites seront en alignement l'une avec l'autre.*

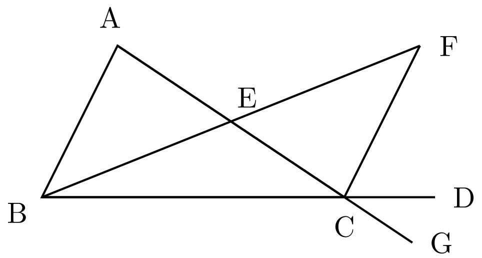
I.15 *Si deux droites se coupent l'une l'autre, elles font des angles au sommet égaux entre eux.*

I.16 *Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.*

Soit le triangle ABC, et que l'un de ses côtés, BC, soit prolongé au-delà jusqu'au point D.

Je dis que l'angle extérieur, celui sous ACD, est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés, ceux sous CBA, BAC.

Que AC soit coupée en deux parties égales au point E (Prop. 10), et que la droite BE soit jointe (Dem. 1) et prolongée en ligne droite jusqu'en F (Dem. 2) ; que soit placée EF égale à BE (Prop. 3) et que FC soit jointe (Dem. 1) ; que AC soit conduite jusqu'à G (Dem. 2).



Or puisque d'une part AE est égale à EC, d'autre part BE à EF, alors les deux AE, EB sont égales aux deux CE, EF, chacune à chacune ; et l'angle sous AEB est égal à l'angle sous FEC, car ils sont au sommet (Prop. 15). Donc la base AB est égale à la base FC et le triangle ABE est égal au triangle FEC, et les angles restants sont égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que sous-tendent les côtés égaux (Prop. 4). Donc celui sous BAE est égal à celui sous ECF ; or celui sous ECD est plus grand que celui sous ECF (N. C. 8) ; donc celui sous ACD est plus grand que celui sous BAE. Alors semblablement, BC étant coupée en deux, il sera démontré que celui sous BCG, c'est-à-dire celui sous ACD, est aussi plus grand que celui sous ABC.

Donc dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés. Ce qu'il fallait démontrer.

I.17 *Dans tout triangle, deux angles, pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus petits que deux droits.*

I.18 *Dans tout triangle, le côté le plus grand sous-tend l'angle le plus grand.*

I.19 *Dans tout triangle, le plus grand angle est sous-tendu par le plus grand côté.*

I.20 [Inégalité triangulaire.] *Dans tout triangle, deux côtés, pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus grands que le côté restant.*

I.21 *Si, sur un des côtés d'un triangle, à partir de ses extrémités, deux droites sont construites à l'intérieur, d'une part les droites construites seront plus petites que les deux côtés restants du triangle, d'autre part, elles contiendront un angle plus grand.*

I.22 *Construire un triangle avec trois droites égales à trois {droites} données. Il faut alors que deux de ces droites, prises ensemble de quelque façon que ce soit, soient plus grandes que la droite restante {parce que dans tout triangle, deux côtés, pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus grands que le côté restant}.*

I.23 *Sur une droite donnée, et en un point sur elle, construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.*

I.24 *Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si l'angle [de l'un] – celui qui est contenu par les droites égales – est plus grand que l'angle [de l'autre], sa base sera aussi plus grande que la base [de l'autre].*

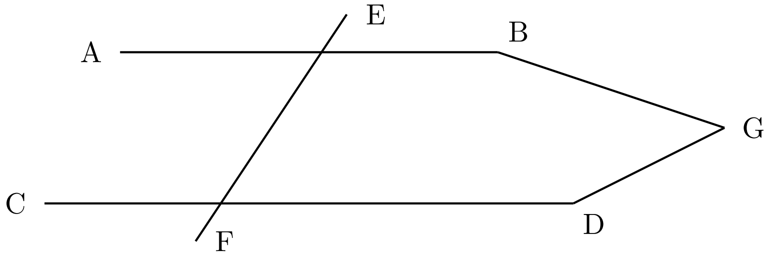
I.25 *Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si la base [de l'un] est plus grande que la base [de l'autre], l'angle [de l'un] sera aussi plus grand que l'angle [de l'autre], celui qui est contenu par les droites égales.*

I.26 [Troisième cas d'égalité des triangles.] *Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, soit celui des angles égaux, soit celui sous-tendant l'un des angles égaux, ils auront aussi les côtés restants égaux aux côtés restants, {chacun à chacun}, et l'angle restant égal à l'angle restant.*

I.27 *Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles alternes égaux entre eux, ces deux droites seront parallèles l'une à l'autre.*

En effet que la droite EF, tombant sur les deux droites AB, CD, fasse des angles alternes, ceux sous AEF et EFD, égaux entre eux. Je dis que AB est parallèle à CD.

Sinon, en effet, AB et CD, prolongées se rencontreront, soit du côté où sont B, D, soit du côté où sont A, C. Qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent du côté où sont B, D en G.



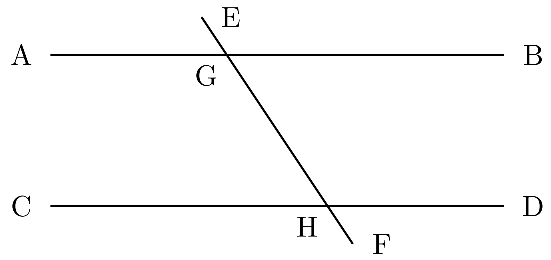
Alors, dans le triangle GEF, l'angle extérieur sous AEF est égal à l'angle sous EFG, intérieur et opposé. Ce qui est impossible (Prop. 16). Donc les droites AB, CD, prolongées, ne se rencontreront pas du côté où sont B, D. Alors, semblablement, il sera démontré qu'elles ne se rencontrent pas non plus du côté où sont A, C. Mais les droites qui ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre sont parallèles (Df. 23). Donc AB est parallèle à CD.

Donc, si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles alternes égaux entre eux, ces droites seront parallèles l'une à l'autre. Ce qu'il fallait démontrer.

I.28 *Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé du même côté, ou les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits, les droites seront parallèles l'une à l'autre.*

I.29 *Une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits.*

En effet, que la droite EF tombe sur les droites parallèles AB, CD. Je dis qu'elle fait des angles alternes égaux : ceux sous AGH, GHD, et l'angle extérieur, celui sous EGB égal à celui sous GHD, intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté, ceux sous BGH, GHD, égaux à deux droits.



En effet, si celui sous AGH est inégal à celui sous GHD, l'un d'entre eux est plus grand. Que celui sous AGH soit le plus grand. Que celui sous BGH soit ajouté de part et d'autre. Ceux sous AGH, BGH sont donc plus grands que ceux sous GHD, BGH, (N. C. 4). Mais ceux sous AGH, BGH sont égaux à deux droits (Prop. 13), Donc ceux sous BGH, GHD sont plus petits que deux droits. Les droites sur des angles plus petits que deux droits, prolongées indéfiniment, se rencontrent (Dem. 5).

Donc les droites AB, CD, prolongées indéfiniment, se rencontreront. Or elles ne se rencontrent pas, puisqu'elles ont été supposées parallèles. Donc l'angle sous AGH n'est pas inégal à l'angle sous GHD. Donc il est égal. Mais celui sous AGH est égal à celui sous EGB (Prop. 15) et donc celui sous EGB est égal aussi à celui sous GHD (N. C. 1).

Que celui sous BGH soit ajouté de part et d'autre. Ceux sous EGB, BGH sont donc égaux à ceux sous BGH, GHD (N. C. 2). Mais ceux sous EGB, BGH sont égaux à deux droits (Prop. 13). Et donc ceux sous BGH, GHD sont égaux à deux droits (N. C. 1).

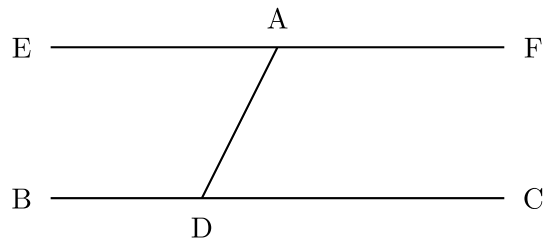
Donc, une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits. Ce qu'il fallait démontrer.

I.30 *Les parallèles à une même droite sont aussi parallèles l'une à l'autre.*

I.31 *Par un point donné, mener une droite parallèle à une droite donnée.*

Soit, d'une part, le point donné A, d'autre part, la droite donnée BC. Il faut alors, par le point A, mener une droite parallèle à la droite BC.

Que soit pris, au hasard, un point D sur BC et que AD soit jointe (Dem. 1). Et, sur la droite DA, et au point A qui est sur elle, que soit construit, égal à l'angle sous ADC, celui sous DAE (Prop. 23). Et que la droite AF soit le prolongement en ligne droite de EA.

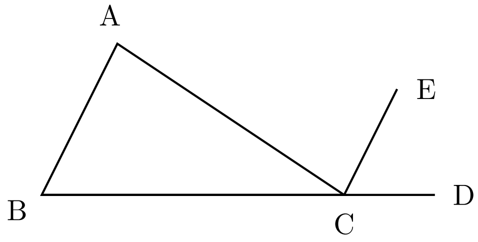


Et puisque la droite AD, tombant sur les deux droites BC, EF a fait les angles alternes, ceux sous EAD, ADC, égaux entre eux, EAF est donc parallèle à BC (Prop. 27).

Donc, par le point donné A, la droite EAF a été menée, parallèle à la droite donnée BC. Ce qu'il fallait faire.

I.32 [Somme des angles d'un triangle.] *Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.*

Soit le triangle ABC, et qu'un de ses côtés, BC, soit prolongé au-delà jusqu'en D. Je dis que l'angle extérieur, celui sous ACD, est égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous CAB, ABC, et que les trois angles intérieurs du triangle, ceux sous ABC, BCA, CAB sont égaux à deux droits.



En effet, que par le point C, soit menée CE parallèle à la droite AB (Prop. 31).

Puisque AB est parallèle à CE et que AC tombe sur elles, les angles alternes, ceux sous BAC, ACE sont égaux entre eux. Ensuite, puisque AB est parallèle à CE et que la droite BD tombe sur elles, l'angle extérieur, celui sous ECD, est égale à celui sous ABC, intérieur et opposé (Prop. 29). Et il a été aussi démontré que celui sous ACE est égal à celui sous BAC. L'angle tout entier sous ACD est donc égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous BAC, ABC (N. C. 2).

Que soit ajouté de part et d'autre celui sous ACB. Ceux sous ACD, ACB sont donc égaux aux trois sous ABC, BCA, CAB. Mais ceux sous ACD, ACB sont égaux à deux droits (Prop. 13) ; donc ceux sous ABC, BCA, CAB sont aussi égaux à deux droits (N. C. 1).

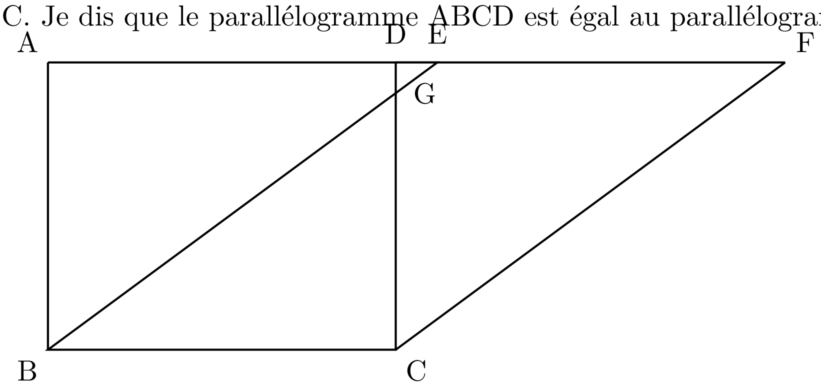
Donc, dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits. Ce qu'il fallait démontrer.

I.33 *Les droites, qui joignent, du même côté, des droites égales et parallèles, sont elles aussi égales et parallèles.*

I.34 *Les côtés et les angles opposés des aires parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les coupe en deux parties égales.*

I.35 *Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

Soient ABCD, EBCF des parallélogrammes sur la même base BC, et dans les mêmes parallèles AF, BC. Je dis que le parallélogramme ABCD est égal au parallélogramme EBCF.



En effet, puisque ABCD est un parallélogramme, AD est égale à BC (Prop. 34). Alors pour la même raison EF est aussi égale à BC. De sorte que AD est aussi égale à EF (N. C. 1). Et DE est commune donc AE toute entière est égale à DF toute entière.

Or AB est aussi égale à DC alors les deux EA, AB sont égales aux deux FD, DC, chacune à chacune. Et l'angle sous FDC est égal à l'angle sous EAB, l'extérieur à l'intérieur (Prop. 29).

Donc la base EB est égale à la base FC et le triangle EAB sera égal au triangle DFC (Prop. 4). Que DGE soit retranché de part et d'autre : le trapèze restant ABGD est donc égal au trapèze restant EGCF (N. C. 3). Que le triangle GBC soit ajouté de part et d'autre : le parallélogramme ABCD tout entier est donc égal au parallélogramme EBCF tout entier (N. C. 2).

Donc les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux. Ce qu'il fallait démontrer.

I.36 *Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

I.37 *Les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

I.38 *Les triangles qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles, sont égaux entre eux.*

I.39 *Les triangles égaux qui sont sur la même base et du même côté, sont aussi dans les mêmes parallèles.*

I.40 *Les triangles égaux, qui sont sur des bases égales et du même côté, sont aussi dans les mêmes parallèles.*

I.41 *Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle et est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est le double du triangle.*

I.42 *Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à un triangle donné.*

I.43 *Dans tout parallélogramme les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux.*

I.44 *Sur une droite donnée et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.*

I.45 *Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.*

I.46 [Construction du carré.] *Décrire un carré sur une droite donnée.*

I.47 [Théorème de Pythagore.] *Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.*

I.48 [Réciproque du théorème de Pythagore.] *Si, dans un triangle, le carré sur l'un des côtés est égal aux carrés sur les deux côtés restants du triangle, l'angle contenu par les deux côtés restants du triangle est droit.*

7.5 Structure des propositions

Vous aurez remarqué qu'il y a deux types très différents de propositions : les trois premières sont des « problèmes » qui énoncent que certaines constructions sont possibles en les faisant et la quatrième est un « théorème » qui propose un énoncé abstrait. Toutes les propositions des *Éléments* sont suivies d'une démonstration.

Le but de la formulation abstraite des propositions est de fournir des énoncés généraux qui valent sans l'appui d'une figure.

Proclus de Lycie, présenté dans la section 8, décrit comme suit la forme des *Éléments*.

> Tout problème et tout théorème, s'il est complet et formé de la totalité de ses parties, doit renfermer les éléments suivants : proposition, exposition, détermination, construction, démonstration et conclusion. Parmi ces éléments, la proposition indique quel est le donné et quel est l'objet de la recherche : car une proposition complète est composée de ces deux éléments. L'exposition isole le donné en lui-même et le dispose pour qu'il puisse permettre la recherche. La détermination met à part l'objet de la recherche et précise clairement sa nature. La construction ajoute ce qui manque dans le donné pour aller à la chasse de l'objet de la recherche. La démonstration tire logiquement de ce qui a été admis l'assertion proposée. La conclusion revient à la proposition, en confirmant ce qui a été démontré. Tel est donc le nombre des différentes parties des problèmes et des théorèmes dans leur totalité ; mais celles qui sont indispensables, et que l'on trouve toujours, sont la proposition, la démonstration et la conclusion. Car il est indispensable de commencer par savoir quel est l'objet de la recherche, puis de le démontrer grâce aux intermédiaires utiles, enfin d'introduire ce qui a été démontré. De ces trois parties indispensables, il est impossible qu'il en manque aucune. Quant aux parties restantes, tantôt elles y sont, tantôt elles sont omises quand elles n'offrent aucune utilité. [Gui06, p.279]

7.6 Le postulat des parallèles

La demande 5 est appelée traditionnellement le « postulat des parallèles ». La définition 23 du parallélisme pose un problème pratique : on ne peut pas prolonger indéfiniment deux droites pour vérifier si elles sont parallèles ou non. La demande 5 permet de le vérifier en traçant une droite qui rencontre les deux droites, en additionnant les angles que cette droite fait avec chacune d'elles, et en vérifiant si on obtient deux droits.

Il n'empêche que cette demande ressemble fort à une proposition. Il est donc certain que les mathématiciens dont les travaux ont été rassemblés dans les *Éléments* d'Euclide ont cherché à la démontrer. Ils n'y sont pas arrivés ; c'est seulement au 19e siècle que ce mystère a été résolu. Cet échec structure le premier livre des *Éléments* : les 28 premières propositions rassemblent l'ensemble des connaissances géométriques qui ne reposent pas sur la demande 5 et la proposition 29, qui est sa contraposée, est la première à l'utiliser.

8 L'histoire des mathématiques selon Proclus de Lycie

L'histoire des mathématiques antiques est comme une enquête policière : elle essaie d'arranger les rares indices qui nous restent en une histoire cohérente. Si vous faites une contre-enquête, vous vous rendrez compte que très peu de choses sont sûres dans cette histoire !

La seule histoire des mathématiques qui nous soit parvenue de l'Antiquité est le récit suivant, qui apparaît dans le 2e prologue des *Commentaires sur le premier livre des* Éléments *d'Euclide* de Proclus de Lycie (412-487). Proclus est dit « le Diadoque », ce qui veut dire « successeur » en grec : c'est sans doute parce qu'il est un successeur de Platon à l'Académie d'Athènes, un des derniers avant que l'empereur Justinien n'ait interdit d'enseigner aux payens en 529. Ses *Commentaires* sont une source essentielle pour comprendre la manière antique de concevoir les mathématiques.

Ce récit a été écrit huit siècles après les textes d'Hérodote et d'Aristote, mais Proclus est parmi les derniers à avoir eu accès à l'ensemble de la culture antique. Je ne donnerai pas de commentaire, mais je vous invite à consulter des ouvrages de référence sur papier ou en ligne pour connaître davantage les mathématiciens et les résultats évoqués par Proclus – et aussi pour expérimenter combien on sait peu sur certains mathématiciens et résultats évoqués par Proclus.

> Or, de même que chez les Phéniciens, du fait du commerce maritime et des contrats, débuta la connaissance précise des nombres, de même aussi chez les Égyptiens a été découverte la Géométrie pour la raison susdite.
>
> Premièrement, Thalès, étant allé en Égypte, transporta en Grèce cette étude et, s'il trouva lui-même de nombreux résultats, il mit ses successeurs sur la voie de beaucoup d'autres, usant d'approches tantôt plus universelles, tantôt plus empiriques. Après lui, Mamercos (?), frère du poète Stésichore, est mentionné pour s'être appliqué avec zèle à la Géométrie, et Hippias d'Élis a rapporté qu'il y avait acquis de la réputation.
>
> Après eux, Pythagore changea la conception de la géométrie et lui donna la forme d'une culture libérale : reprenant du début l'examen de ses principes et explorant ses théorèmes de façon immatérielle et intellectuelle, c'est lui qui découvrit ainsi la difficulté des irrationnelles[3] et la constitution des figures cosmiques. Après lui, Anaxagore de Clazomènes s'appliqua à de nombreuses questions qui relèvent de la Géométrie, et de même Œnopide de Chio, un peu plus jeune qu'Anaxagore, l'un et l'autre mentionnés par Platon dans *Les Rivaux* comme s'étant acquis de la réputation dans les mathématiques. Après eux, Hippocrate de Chio, l'inventeur de la quadrature de la lunule, et Théodore de Cyrène s'illustrèrent dans la Géométrie. Hippocrate fut en effet le premier, de ceux que la tradition mentionne, qui ait aussi composé des *Éléments*.
>
> Platon, qui vint après eux, fit prendre un très grand essor à la mathématique tout entière et à la Géométrie spécialement, par le zèle qu'il y consacra, lui qui – c'est assez évident – a renforcé ses ouvrages d'arguments mathématiques et éveille partout à leur endroit l'admiration de ceux qui se consacrent à la Philosophie. À cette époque, il y eut aussi Léodamas de Thasos, Archytas de Tarente, et Théétète d'Athènes, par qui l'ensemble des théorèmes fut augmenté et progressa vers un arrangement plus scientifique ; puis, plus jeune que Léodamas, Néoclide et son disciple Léon, qui procurèrent beaucoup de résultats s'ajoutant à ceux de leurs prédécesseurs, en sorte que Léon put lui aussi rassembler des *Éléments*, en accordant plus de soin au nombre et à l'utilité des résultats établis, et trouver des « diorismes », ou distinctions entre les cas où le problème cherché est possible et les cas où il est impossible.
>
> Mais c'est Eudoxe de Cnide, un peu plus jeune que Léon et devenu familier du cercle de Platon, qui le premier augmenta le nombre des théorèmes dits « généraux », aux trois proportions en adjoignit trois autres, et accrut les résultats touchant la « section » qui avaient pris source chez Platon, utilisant pour cela les analyses. Amyclas d'Héraclée, l'un des familiers de Platon, Ménechme, élève d'Eudoxe, mais qui avait fréquenté l'enseignement de Platon, et son frère Dinostrate, rendirent

3. Ou « proportions » : les leçons des manuscrits divergent ici.

encore plus achevée la Géométrie entière. Theudios de Magnésie eut la réputation d'un esprit distingué en mathématiques, autant que dans le reste de la philosophie : en effet il mit en bel ordre les *Éléments* et rendit plus généraux bon nombre de résultats partiels. À noter aussi qu'Athénée de Cyzique, qui vécut dans la même période, s'illustra dans les autres branches des mathématiques, mais surtout en Géométrie. Ceux dont il est ici question séjournaient donc ensemble à l'Académie, menant leurs recherches en commun.

Hermotime de Colophon développa plus avant les résultats antérieurement procurés par Eudoxe et Théétète, découvrit beaucoup d'« éléments » et composa l'un des *Lieux*. Philippe de Medma, disciple de Platon qui l'orienta vers les mathématiques, conduisait ses recherches d'après les indications de Platon et se proposait toutes les questions qu'il pensait devoir contribuer à la philosophie de Platon. Ceux qui ont écrit l'histoire prolongent donc jusqu'à cette époque le perfectionnement de cette science.

Euclide n'est pas de beaucoup plus jeune que ceux-là : en rassemblant les *Éléments*, il mit en ordre bon nombre de résultats d'Eudoxe et perfectionna beaucoup de ceux de Théétète, et de plus il éleva au niveau de démonstrations irréfutables ceux dont ses prédécesseurs n'avaient rendu compte que de façon assez relâchée. Cet homme vécut sous le premier Ptolémée : car Archimède qui suivit de près le premier [Ptolémée] mentionne Euclide, et, notons-le, on raconte qu'un jour Ptolémée lui demanda s'il y avait pour la Géométrie un chemin plus court que l'*Ordre des Éléments* : et lui de répondre qu'il n'y a pas, vers la Géométrie, de voie directe réservée aux rois. Il est donc plus jeune que les disciples de Platon, mais plus vieux qu'Ératosthène et Archimède. Ceux-ci sont en effet contemporains, comme le dit quelque part Ératosthène. (65.3-68.20, [Euc90, pages 89-92].)

9 La philosophie des mathématiques de Proclus

9.1 La fin du 1er prologue des *Commentaires*

Proclus de Lycie termine son 1er prologue des *Commentaires sur le premier livre des* Éléments *d'Euclide* sur la recherche de l'étymologie du mot « mathématiques ». Laissons-lui la parole pour un texte ardu et riche.

Quant à ce nom même de la mathématique et des sciences mathématiques, d'où devrions-nous dire qu'il a été assigné par les Anciens à ces sciences, et quelle pourrait en être la raison pertinente ? À mon sens, une telle appellation de la science des raisonnements de la pensée discursive n'est pas accidentelle, comme c'est le cas de la plupart des noms. Mais on dit que les pythagoriciens ont observé, d'une part, que *tout ce qu'on appelle apprentissage est une réminiscence* (*Phédon* 73b5s.), qui n'est pas placée de l'extérieur dans les âmes, comme les représentations à partir des sensibles s'impriment dans l'imagination, et qui n'est pas non plus épisodique, comme la connaissance par l'opinion, mais qui est, d'une part, éveillée par les apparences, d'autre part, projetée de l'intérieur par la pensée discursive même se retournant vers elle-même ; d'autre part, les pythagoriciens ont aussi observé que les réminiscences, même s'il est possible de les montrer à partir de nombreux cas, se montrent cependant de manière toute particulière, comme le dit aussi Platon, à partir des mathématiques. En effet, *si on met quelqu'un en face de figures géométriques*, dit Platon, *c'est alors que s'affirme de la manière la plus claire* que l'apprentissage est une réminiscence (*Phédon* 73b1-2). D'où aussi Socrate dans le *Ménon* (81d2ss.) montre, à partir d'un argument de ce type, qu'apprendre n'est rien d'autre que l'âme qui se ressouvient de ses propres raisons. La cause en est que ce qui se ressouvient est la partie dianoétique de l'âme. Celle-ci est constituée en son essence par les raisons mathématiques, et elle a préassumé en elle-même leurs sciences, même si elle ne les a pas toujours en acte. La pensée discursive possède donc toutes les sciences mathématiques de manière essentielle et cachée, et manifeste chacune d'elles chaque fois qu'elle est *soustraite* (ἀφαιρεθῇ) aux obstacles qui découlent de la sensation. Les sensations rattachent l'âme à ce qui est divisible, les objets de l'imagination la remplissent de forces mouvantes, et les désirs l'entraînent dans la vie passionnelle. Or, tout ce qui est divisible est un obstacle à notre retour vers nous-mêmes, tout ce qui a une forme trouble la connaissance sans forme, et tout ce qui est passionnel est un empêchement à l'activité impassible. Par conséquent, chaque fois que nous *débarrassons* (ἀφέλωμεν) la pensée discursive de ces obstacles, nous pouvons alors connaître par elle les raisons qui sont en elle, être savants en acte et mettre au jour la connaissance essentielle. Mais, prisonniers et tenant clos *l'œil de l'âme* (*Rép. 533d2*), nous n'atteindrons jamais la perfection qui nous revient. Eh bien, c'est cela l'apprentissage (μάθησις), la réminiscence des raisons éternelles dans l'âme, et la science mathématique (μαθηματική) tient de lui son nom, en tant qu'elle est la connaissance qui contribue tout particulièrement à nos réminiscences de ces raisons. Par conséquent, la fonction propre de

> cette science est telle qu'elle se montre par son nom : elle met en mouvement la connaissance innée, éveille l'intellection, purifie la pensée discursive, révèle l'existence des formes que nous possédons par essence, débarrasse de l'oubli et de l'ignorance qui nous viennent du monde de la génération, libère des chaînes de la déraison, selon le dieu qui est le véritable gardien de cette science, qui porte au grand jour les dons intellectifs, emplit tout de raisons divines, meut les âmes vers l'intellect et les éveille comme d'une profonde torpeur, par la recherche, les convertit vers elles-mêmes, par la maïeutique, les perfectionne, par la découverte de l'intellect pur, les tourne vers la vie bienheureuse. Aussi, c'est naturellement à lui que nous dédions cet écrit, en achevant cette étude de la science mathématique. (44.25-47.8, [DAn10, pages 91, 94, 105].)

La *dianoétique* est la pensée discursive : ce mot s'emploie ici comme un adjectif. Le dieu auquel Proclus dédie son écrit est Hermès.

9.2 Le début de la *Critique de la raison pure* de Kant

On peut comparer cette description, ainsi que le texte d'Aristote cité dans la section 1, avec les toutes premières lignes de la *Critique de la raison pure* d'Immanuel Kant.

> Que toute notre connaissance commence avec l'expérience, il n'y a là absolument aucun doute ; car par quoi le pouvoir de connaître devrait-il être éveillé et mis en exercice, si cela ne se produisait pas par l'intermédiaire d'objets qui affectent nos sens et qui, pour une part, produisent d'eux-mêmes des représentations, tandis que, pour une autre part, ils mettent en mouvement l'activité de notre entendement pour comparer ces représentations, les relier ou les séparer, et élaborer ainsi la matière brute des impressions sensibles en une connaissance des objets, qui s'appelle expérience ? En ce sens, *d'un point de vue chronologique*, nulle connaissance ne précède en nous l'expérience, et c'est avec celle-ci que toute connaissance commence.
>
> Cela dit, bien que toute notre connaissance s'amorce *avec* l'expérience, il n'en résulte pas pour autant qu'elle dérive dans sa totalité *de* l'expérience. Car il pourrait bien se produire que même notre connaissance d'expérience soit un composé de ce que nous recevons par des impressions et de ce que notre propre pouvoir de connaître (simplement provoqué par des impressions sensibles) produit de lui-même – ajout que nous ne distinguons pas de cette matière première avant qu'un long exercice nous y ait rendus attentifs et ait donné la capacité de l'isoler. [Kan81, B1-B2]

Références

[58] *Parmenide. Testimonianze e frammenti.* Éd. Mario UNTERSTEINER. Firenze : La nuova Italia, 1958. Disponible à la BU Lettres (cf. p. 6).

[62] *Zenone. Testimonianze e frammenti.* Éd. Mario UNTERSTEINER. Firenze : La nuova Italia, 1962 (cf. p. 9, 10).

[88] *Les Présocratiques.* Éd. Jean-Paul DUMONT, Daniel DELATTRE et Jean-Louis POIRIER. Paris : Gallimard, 1988. Disponible à la BU Lettres (cf. p. 4–10).

[Ari31] ARISTOTE. *Physique.* T. second, V–VIII. Paris : Belles Lettres, 1931. Texte établi et traduit par Henri Carteron, disponible à la BU Lettres (cf. p. 10).

[Ari53] ARISTOTE. *La métaphysique. Tome I.* Paris : Vrin, 1953. Nouvelle édition entièrement refondue, avec commentaire par Jules Tricot, disponible à la BU Lettres (cf. p. 2, 12–15).

[Ars87] Gilbert ARSAC. « L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique ». In : *Rech. Didact. Math.* 8.3 (1987), p. 267–312 (cf. p. 15).

[Bru12] Léon BRUNSCHVICG. *Les étapes de la philosophie mathématique.* Paris : Alcan, 1912. ix+592 p. Disponible à la BU Lettres (cf. p. 11).

[Cal77] Guido CALOGERO. *Studi sull'eleatismo.* Firenze : La nuova Italia, 1977. Nouvelle édition d'un ouvrage paru en 1932 (cf. p. 4).

[Cas25] Ernst CASSIRER. « Die Philosophie der Griechen von den Anfängen bis Platon ». In : *Lehrbuch der Philosophie.* dir. Max DESSOIR. Berlin : Ullstein, 1925, p. 7–139 (cf. p. 5, 12).

[Cav82] Maurice Caveing. *Zénon d'Élée, prolégomènes aux doctrines du continu : étude historique et critique des fragments et témoignages.* Paris : J. Vrin, 1982. Disponible à la BU Lettres (cf. p. 9).

[DAn10] Nicolas D'Andrès. « Sur le nom de *mathématique*. Apprendre par un autre et découvrir par soi-même chez Jamblique (*De communi mathematica scientia*, chap. 11) et Proclus (*In Euclidem*, Prologue I, chap. 15) ». In : *Études sur le commentaire de Proclus au premier livre des Éléments d'Euclide.* dir. Alain Lernould. Villeneuve d'Ascq : Septentrion, 2010, p. 89–109. Disponible à la bibliothèque de mathématiques (cf. p. 31).

[Euc01] Euclide d'Alexandrie. *Les Éléments. Vol. 4.* Livres XI–XIII : géométrie des solides. Traduction du texte de Heiberg et commentaires par Bernard Vitrac. Paris : Presses universitaires de France, 2001. Disponible à la bibliothèque de mathématiques (cf. p. 17).

[Euc90] Euclide d'Alexandrie. *Les Éléments. Vol. 1.* Bibliothèque d'histoire des sciences. Livres I–IV : géométrie plane. Traduction du texte de Heiberg et commentaires par Bernard Vitrac. Paris : Presses universitaires de France, 1990. 533 p. Disponible à la bibliothèque de mathématiques (cf. p. 17, 19, 30).

[Euc94] Euclide d'Alexandrie. *Les Éléments. Vol. 2.* Livres V–VI : proportions et similitude. Livres VII–IX : arithmétique. Traduction du texte de Heiberg et commentaires par Bernard Vitrac. Paris : Presses universitaires de France, 1994. 573 p. Disponible à la bibliothèque de mathématiques (cf. p. 17).

[Euc98] Euclide d'Alexandrie. *Les Éléments. Vol. 3.* Livre X : grandeurs commensurables et incommensurables. Classification des lignes irrationnelles. Traduction du texte de Heiberg et commentaires par Bernard Vitrac. Paris : Presses universitaires de France, 1998. viii+433 p. Disponible à la BU Sciences (cf. p. 16).

[Frä55a] Hermann Fränkel. « Parmenidesstudien ». In : *Wege und Formen frühgriechischen Denkens.* München : C. H. Beck, 1955, p. 157–197. Version légèrement corrigée d'un article paru dans Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Philos.-hist. Kl., 2:153–192, 1930, disponible à la BU Lettres (cf. p. 4, 6).

[Frä55b] Hermann Fränkel. « Zenon von Elea im Kampf gegen die Idee der Vielheit ». In : *Wege und Formen frühgriechischen Denkens.* München : C. H. Beck, 1955, p. 198–236. Traduction et révision d'un article paru dans Amer. J. Philol. 63:1–25, 193–206, 1942, disponible à la BU Lettres (cf. p. 9, 10, 34).

[Fri45] Kurt von Fritz. « The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum ». In : *Ann. of Math. (2)* 46 (1945), p. 242–264. url : http://dx.doi.org/10.2307/1969021 (cf. p. 15).

[Gui06] Jean-Yves Guillaumin. « Les six « ordres » de la démonstration géométrique dans le paragraphe final de la *Demonstratio artis geometricae* (IX^{e} siècle) ». In : *Bulletin du Cange* 64 (2006), p. 277–294 (cf. p. 28).

[Hér64] Hérodote. « L'enquête ». In : *Historiens grecs.* dir. Andrée Barguet. Paris : Gallimard, 1964. Disponible à la BU Lettres (cf. p. 2).

[Huf93] Carl A. Huffman. *Philolaus of Croton. Pythagorean and Presocratic.* Cambridge : Cambridge university press, 1993. xx+444 p. Disponible à la bibliothèque de mathématiques (cf. p. 10, 12).

[Kan81] Immanuel Kant. *Kritik der reinen Vernunft.* Johann Friedrich Hartknoch, 1781. Traduction d'Alain Renaut : *Critique de la raison pure*, Aubier, Paris, 1997, disponible à la BU Lettres (cf. p. 31).

[Phi44] Paula Philippson. *Thessalische Mythologie.* Zürich : Rhein-Verlag, 1944 (cf. p. 6).

[Sza69] Árpád Szabó. *Anfänge der griechischen Mathematik.* Oldenbourg, München-Wien, 1969, p. 494. Traduction de Michel Federspiel : *Les débuts des mathématiques grecques*, Vrin, Paris, 1977, disponible à la bibliothèque de mathématiques (cf. p. 3).

[Sza94] Árpád Szabó. *Die Entfaltung der griechischen Mathematik*. Mannheim : Bibliographisches Institut, 1994. Traduction de Michel Federspiel : *L'aube des mathématiques grecques*, Vrin, Paris, 2000, disponible à la BU Sciences (cf. p. 3).

[Vit96] Bernard Vitrac. « Mythes (et réalités ?) dans l'histoire des mathématiques grecques anciennes ». In : *L'Europe mathématique*. dir. Catherine Goldstein, Jeremy Gray et Jim Ritter. Paris : Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, 1996. Disponible à la BU Sciences (cf. p. 3).

[Zaf50] Jean Zafiropulo. *L'école éléate : Parménide, Zénon, Mélissos*. Paris : Belles lettres, 1950. Disponible à la BU Lettres (cf. p. 9).

Exercices

1

Exercice 1.1. Où est Halicarnasse ? Recherchez quel est le but de l'ouvrage d'Hérodote.

Exercice 1.2. De quelle époque datent la 12e et la 19e dynastie ? Que se passait-il hors d'Égypte à cette époque ?

Exercice 1.3. Expliquez précisément le principe d'un cadran solaire et du gnômon, et dites quelles informations on peut tirer de leur usage. Ceci est l'objet de la gnomonique ! Comment la trajectoire du soleil varie-t-elle au fil de l'année ? Décrivez les différents types de cadrans solaires et recherchez des illustrations.

Exercice 1.4. Comment imaginez-vous la mesure d'un terrain ? Ceci est l'objet de l'arpentage !

Exercice 1.5. Où est Stagire ? Que sait-on d'Aristote ?

Exercice 1.6. Quel est le sens actuel du mot « métaphysique » ? Y a-t-il un rapport avec le contenu du texte d'Aristote ? Comment comprenez-vous l'expression « un art dégagé des sensations communes » ? Pourquoi pensez-vous qu'Aristote considère que les inventeurs des sciences qui ne tendent pas à l'utilité sont plus sages que les autres ? Quel but peut avoir une science qui ne s'applique ni au plaisir, ni aux nécessités ?

Exercice 1.7. Recherchez pourquoi les Grecs ont parfois attribué l'origine des mathématiques à Hermès, Palamède ou Prométhée.

2

Exercice 2.1. Selon vous, pourquoi Thémis et Dikè ont-ils poussé Parménide sur la voie de la vérité ?

Exercice 2.2. Comment décririez-vous la différence entre vérité et vraisemblance ? Qu'est-ce que les opinions des mortels ?

Exercice 2.3. Qu'est-ce que le « il est » du poème de Parménide ?

Exercice 2.4. Étudiez, l'un après l'autre, les arguments du poème et demandez-vous s'ils sont vrais.

Exercice 2.5. Faites la liste des propriétés du « il est » en les classant selon qu'elles ont trait à l'espace, qu'elles ont trait au temps ou qu'elles ont trait à la fois à l'espace et au temps. Comment comprenez vous l'affirmation « que l'être ne saurait se dispenser de fin » ?

Exercice 2.6. Recherchez ce que sont les oppositions continu/discret, à bord/sans bord en mathématiques.

3

Exercice 3.1. Qu'est-ce que la dialectique ?

Exercice 3.2. Quel rapport voyez-vous entre les fragments de Zénon et le poème de Parménide ?

Exercice 3.3. Le cours propose deux interprétations du fragment B III. Voici comment Hermann Fränkel [Frä55b] évoque la première interprétation.

> Selon Zeller [*La philosophie des Grecs considérée dans son développement historique*, volume 2, page 75] et d'autres Zénon veut dire : deux choses ne pourraient être deux que si l'une est séparée de l'autre, et s'il faut qu'elles soient séparées, quelque troisième chose doit se trouver entre elles. Autant que je voie, il n'y a pas de support pour une telle explication et elle ne paraît pas probable non plus. Nulle part les éléates nient que deux choses, s'il y avait pluralité, ne pourraient être en contact. Et si Zénon parle de pluralité, il inclut toujours la divisibilité ; mais par divisibilité il n'entend pas seulement la séparabilité physique, mais aussi la possibilité d'une distinction mentale entre parties ou domaines à l'intérieur de l'objet d'un seul tenant. Il n'y a donc littéralement pas d'espace pour l'insertion d'un diaphragme physique qui tiendrait séparés deux domaines limitrophes ; et il n'existe a fortiori pas de raison logique de postuler qu'une troisième chose s'interpose quand il faut en différencier deux. *Res rem finire videtur [l'objet borne l'objet]* (Lucrèce [De la nature] I 998).
>
> Pour expliquer la deuxième partie du fragment, il ne reste donc que l'autre alternative, c'est-à-dire d'opérer avec des choses (ou des parties) de grandeur indéfinie. Si nous attribuons à quelque unité pluralité, c.-à-d. divisibilité, une certaine partie de celle-ci est ici et une autre là. Mais même si l'ici et le là sont très proches l'un de l'autre, nous sommes libres de poser le quelque chose ici et le quelque chose là si petits qu'on peut encore coincer un troisième entre les deux. Cette opération peut être répétée un nombre quelconque de fois sans qu'une limite soit jamais atteinte. Car la prémisse de la pluralité et de la divisibilité (mentale) ne permet pas l'hypothèse d'une ultime unité indivisible, et une logique stricte n'autorise pas une transition progressive du très petit vers le sans extension. Car c'est le point essentiel de beaucoup d'arguments de Zénon, que l'absence de grandeur doit être strictement différenciée de toute grandeur, aussi petite soit-elle.

Quelle interprétation choisissez-vous et pourquoi ?

Exercice 3.4. Le cours propose deux interprétations du fragment B I. Laquelle choisissez-vous et pourquoi ?

Exercice 3.5. Voici l'interprétation surprenante de Hermann Fränkel [Frä55b] du fragment B I.

> Comme l'épaisseur est nommée, l'écart réfère ici à l'extension en profondeur de l'objet, et les parties en contraste seront les faces opposées ou surfaces du corps dans la direction du regard : devant et derrière. L'épaisseur suppose, dit Zénon, un certain écart entre l'avant et l'arrière. Cette explication est confirmée par la parallèle dans la deuxième phrase. Zénon ne parle certes ici que de μέγεθος [grandeur] seule, sans ajouter καὶ πάχος [et profondeur] pour spécifier la dimension ; mais à la place du ἀπέχει "est à l'écart de" neutre, il utilise cette fois-ci προέχει "s'élance, est situé plus à l'avant" – une expression qui réfère spécialement à l'extension et à l'écart en profondeur.
>
> De ce parallélisme résulte de plus que αὐτοῦ [même] a la même fonction dans la deuxième version que dans la première et la troisième. Il ne se rattache pas à προέξει ("quelque chose sera plus à l'avant que ceci"), mais à τι et est partitif-possessif : "quelque chose de lui (c.-à-d. du προέχον [se situant plus à l'avant]) se situera plus à l'avant (qu'une autre partie du προέχον)". La face avant de l'objet a donc elle-même de nouveau une face avant ou surface, qui se situe plus à l'avant que la face arrière de la face avant de l'objet. Selon la prémisse que tout ce qui existe a trois dimensions, la surface d'un corps, si elle existe, doit être comprise comme une couche ou peau, et a elle-même à nouveau une surface ou peau. Bien sûr que c'est ridicule ; mais nous ne devons pas oublier que c'était justement l'intention de Zénon de ridiculiser la théorie de la pluralité.

Commentez.

Exercice 3.6. Essayez de formuler les paradoxes sous forme mathématique. Quelle difficulté cela pose-t-il ?

4

Exercice 4.1. Ajoutez trois exemples d'illimités et de limitants à la table 1.

Exercice 4.2. Trouvez un exemple qui montre le caractère provisoire des choses limitantes et leur évolution avec le progrès scientifique.

Exercice 4.3. Placez la syllabe, la dioxie et le diapason sur la figure 1. Que veut dire « harmonie » dans la dernière phrase du fragment B VI ?

Exercice 4.4. Étude du texte d'Aristote.
- En quoi les colonnes des deux séries parallèles à la fin du premier extrait forment-elles un ensemble cohérent selon la pensée pythagoricienne ?
- Comparez le compte rendu d'Aristote aux fragments de Philolaos en soulignant les discordances. Les critiques d'Aristotes vous semblent-elles pertinentes ?
- Quelles différences y a-t-il entre les conceptions pythagoriciennes et platoniciennes du nombre ?
- L'analyse de Cassirer qui précède ce compte rendu vous paraît-elle pertinente ?

6

Exercice 6.1. Recherchez ce qu'on sait d'Hippase de Métaponte.

Exercice 6.2. Précisez quel rapport s'établit entre longueur et nombre à travers la notion de commensurabilité et ce que veut dire « être mesurable par la même mesure. »

Exercice 6.3. Traduisez la proposition X.2 dans un langage mathématique que vous maîtrisez.

Exercice 6.4. Recherchez quel rapport il y a entre nombre d'or et coupure en extrême et moyenne raison.

Exercice 6.5. Donnez une démonstration de la deuxième égalité géométrique de la sous-section 6.2 en imitant le style d'Euclide.

Exercice 6.6. Y a-t-il une récurrence dans la proposition X.2 d'Euclide ? Motivez votre réponse. Quels moyens existent selon vous pour vérifier l'hypothèse de cette proposition ? En particulier, qu'est-ce qui a permis de l'établir pour la diagonale et le côté du pentagone régulier ?

7

Exercice 7.1 (Congruence et égalité)**.**
- Quel rapport voyez-vous entre la demande I.4 et la notion commune I.7 ?
- Étudiez l'usage de la notion commune I.7 dans la démonstration de la proposition I.4.
- Étudiez dans quel sens l'égalité est entendue dans la proposition I.35.

Exercice 7.2. Faites le découpage des propositions I.16 et I.32 selon la description de Proclus donnée dans la sous-section 7.5.

Exercice 7.3. Est-il fait appel au postulat des parallèles dans la démonstration de la proposition 31 ?

Exercice 7.4. Proposez un schéma qui retrace la structure déductive de la proposition I.32 en la reliant par des flèches aux énoncés du premier livre des *Éléments* sur lesquels elle repose, puis en réitérant ceci pour chacun de ces énoncés. Vous pouvez consulter `http://www.archive.org/details/lesoeuvresdeucli01eucl` pour compléter votre schéma.

8

Exercice 8.1. Consultez des ouvrages de référence sur papier ou en ligne pour connaître davantage les mathématiciens et les résultats évoqués par Proclus dans son histoire des mathématiques.

9

Exercice 9.1. Comment comprenez vous l'assertion de Platon reformulée par Proclus que « si on met quelqu'un en face de figures géométriques, c'est alors que s'affirme de la manière la plus claire que l'apprentissage est une réminiscence » ?

Exercice 9.2. Quel rapport voyez-vous entre la fin du 1er prologue des *Commentaires* de Proclus, la philosophie de Parménide et le texte d'Aristote cité dans la section 1 ?