La mathématisation du continu par les Éléates et les Pythagoriciens

Stefan Neuwirth

Les traces d'une mathématisation du réel dans le monument de la science grecque que sont les *Éléments* d'Euclide sont circonscrites aux premières définitions : « un *point* est ce dont il n'y a aucune partie », « une *ligne* est une longueur sans largeur », « les *limites d'une ligne* sont des points », « une *ligne droite* est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle », etc [9, pages 151-154]. La perfection de la géométrie d'Euclide est allée de pair avec le développement d'une philosophie qui exclut le réel de la construction des mathématiques, comme l'illustre cet extrait du premier prologue des *Commentaires sur le premier livre des* Éléments *d'Euclide* de Proclus de Lycie, qui traite de l'étymologie du mot « mathématiques » (dont le sens premier est « apprentissage ») :

> Mais on dit que les Pythagoriciens ont observé, d'une part, que *tout ce qu'on appelle apprentissage est une réminiscence* (Platon, *Phédon* 73b5s.), qui n'est pas placée de l'extérieur dans les âmes, comme les représentations à partir des sensibles s'impriment dans l'imagination, et qui n'est pas non plus épisodique, comme la connaissance par l'opinion, mais qui est, d'une part, éveillée par les apparences, d'autre part, projetée de l'intérieur par la pensée discursive même se retournant vers elle-même. (44.25-47.8, [7, pages 91, 94, 105])

Plusieurs historiens ont voulu retracer les circonstances de l'élaboration des *Éléments*. Parmi ceux-ci, Árpád Szabó [14, 15] se démarque en considérant la structure axiomatique des *Éléments* comme une réaction à la philosophie de Parménide d'Élée.

Ce travail propose de relire les fragments du poème de Parménide, des paradoxes de Zénon d'Élée et du traité du Pythagoricien Philolaos de Crotone comme des entreprises de penser le réel. Parménide et Zénon enseignent qu'on ne peut penser que le continu ; Philolaos soutient qu'on ne peut connaître que par le discret.

Les ouvrages consultés relèvent davantage de la philologie que de la philosophie : plutôt que de chercher à reconstruire un système de pensée, j'ai voulu comprendre ce qu'il y a d'intemporel dans les questions posées par ces auteurs et saisir la matière de leurs réponses dans l'épaisseur de leurs mots. Cela montrera combien leurs réponses aussi sont toujours actuelles. Cette présentation permettra, je l'espère, une lecture fraîche et directe de textes fondateurs de la philosophie, et de faire revivre le feu qui a vu naître l'axiomatique léguée par les Grecs.

1 Parménide d'Élée

Parménide est né à la fin du VI^e siècle avant notre ère et son poème est considéré comme le début de la métaphysique. Il raconte son initiation : après un long voyage, il rencontre la déesse.

> La déesse, avec bienveillance, me reçut.
> Elle prit ma main droite en sa main et me dit :
> « Jeune homme, toi qui viens ici, accompagné
> De cochers immortels, portés par des cavales,
> Salut ! Car ce n'est point une Moire ennemie,
> Qui t'a poussé sur cette voie (hors des sentiers
> Qu'on voit communément les hommes emprunter),
> Mais Thémis et Dikè. Apprends donc toutes choses,
> Et aussi bien le cœur exempt de tremblement
> Propre à la vérité bellement circulaire,
> Que les opinions des mortels, dans lesquelles
> Il n'est rien qui soit vrai ni digne de crédit ;
> Mais cependant aussi j'aurai soin de t'apprendre
> Comment il conviendrait que soient, quant à leur être,
> En toute vraisemblance, lesdites opinions,
> Qui toutes vont passant toujours. » (B I 24-32 [8, pages 255-256])

Les Moires sont les divinités du destin. Thémis et Dikè sont respectivement les déesses de la justice divine et humaine, mais il faut les voir ici comme représentations de la « nécessité par nature », c'est-à-dire que Parménide a accédé à un état et à des forces qui lui permettent d'emprunter la voie de la connaissance (voir [10, partie III]).

La vérité se dit ἀλήθεια (alētheia) en grec et signifie « dévoilement » au sens propre ; l'opinion se dit δόξα (doxa), mot qui a donné le suffixe « -doxe » en français. La déesse oppose donc l'une à l'autre : l'une est « exempte de tremblement », les autres « vont passant toujours ». L'opinion se base sur les sensations et l'apparence ; pour accéder à la vérité, à ce qui est (dans un sens absolu), il faut chercher à le penser. La déesse propose de les enseigner toutes les deux, mais les quatre derniers vers sont surprenants : les opinions peuvent être vraisemblables et l'homme peut les organiser de manière à les rendre probables ; la déesse lui enseignera aussi la manière dont les opinions peuvent prendre cette forme pertinente. Cela reste une nécessité pour l'homme qui, même si on lui a dévoilé la vérité, continuera à user de ses cinq sens et voudra donner de la cohérence à ses sensations.

La déesse présente ainsi la vérité dévoilée.

> Mais il ne reste plus à présent qu'une voie
> Dont on puisse parler : c'est celle du « il est ». (B VIII 1-2 [8, page 261])

Guido Calogero propose d'accéder à la leçon de Parménide par une analyse logique des assertions : « [la pensée] ne peut s'effectuer sans prendre corps dans une affirmation, dont le verbe être est le constituant essentiel, parce qu'il est la forme commune et universelle de toute qualification ou prédicat possible, qui ne peut être pensé sans celle-ci, alors que celle-ci peut réciproquement être pensée pour elle-même et sans aucun ajout » [5, pages 8-9]. Je suis pour ma part la voie de

Parménide en concentrant ma pensée sur le fait même d'être en faisant abstraction des étants.

Je cite de longs passages du poème pour leur donner une cohérence interne. La description du « il est », c'est-à-dire de l'être en soi (et non des étants) paraîtra fantastique.

Sur cette voie il est de fort nombreux repères,
Indiquant qu'échappant à la génération,
Il est en même temps exempt de destruction :
Car il est justement formé tout d'une pièce,
Exempt de tremblement et dépourvu de fin.
Et jamais il ne fut, et jamais ne sera,
Puisque au présent il est, tout entier à la fois,
Un et un continu. Car comment pourrait-on
Origine quelconque assigner au « il est » ?
Comment s'accroîtrait-il et d'où s'accroîtrait-il ?
Je t'interdis de dire ou même de penser
Que le « il est » pourrait provenir du non-être,
Car on ne peut pas dire ou penser qu'il n'est pas.
Quelle nécessité l'aurait poussé à être
Ou plus tard ou plus tôt, si c'était le néant
Qu'il avait pour principe ? Aussi faut-il admettre
Qu'il est absolument, ou qu'il n'est pas du tout.
Jamais non plus la force attachée au discours
Ne pourra concéder que du néant procède
Un être susceptible à lui de s'ajouter ;
Aussi Dikè lui a, l'enserrant dans ses liens,
De naître ou de périr ôté toute licence :
En fait elle le tient. (B VIII 2-15 [8, page 261])

On accède au « il est » par une méditation et celle-ci a lieu dans une étendue qui permet au « il est » d'être pensé comme « un et un continu ». Mais dans ce passage, l'accent est mis sur son rapport au temps et sur l'impossibilité de penser le changement. Nous nous concentrerons sur le passage suivant qui étudie son rapport à l'espace.

Et il n'est pas non plus
Divisible en effet, puisqu'il est en entier,
Sans avoir çà ou là quelconque chose en plus
Qui pourrait s'opposer à sa cohésion,
Ou quelque chose en moins. Il est tout rempli d'être.
Aussi est-il tout continu. En effet, l'être
Embrasse au plus près l'être. (B VIII 22-25 [8, page 262])

Reprenons les termes qui décrivent le « il est » dans son extension. Il est « tout rempli d'être », « tout entier à la fois », « tout continu », « formé tout d'une pièce », rien ne « pourrait s'opposer à sa cohésion ». Il n'est « pas non plus divisible ». Selon Ernst Cassirer, « en vertu de cette conclusion, le concept mathématique de l'espace « vide », tel qu'il a été pensé par les Pythagoriciens comme « écartement », comme διάστημα entre les corps, est dévalué ontologiquement et aboli » [6, page 42].

Mais puisque existe aussi une limite extrême,
Il est de toutes parts borné et achevé,
Et gonflé à l'instar d'une balle bien ronde,
Du centre vers les bords en parfait équilibre.
Car aussi bien en plus et aussi bien en moins,
Aucune variation ici ou là n'existe.
Car il n'est nul non-être à même d'empêcher
Qu'il atteigne partout son parfait équilibre,
Ni être qui en lui soit en plus ou en moins,
Étant donné qu'il est tout entier inviolable.
En toutes directions il s'égale à lui-même,
Et de même façon il touche à ses limites. (B VIII 42-49 [8, pages 262-263])

Nous verrons dans la partie sur Philolaos combien les limites et le caractère borné sont des propriétés essentielles pour pouvoir accéder à la connaissance. Soulignons en tout cas que Parménide crée et utilise des concepts mathématiques pour décrire l'être.

Paula Philippson associe cette description à la mythologie grecque de l'océan : « [Okeanos], genèse de toute chose et de tout phénomène qu'il renferme, n'a dans son circuit fermé ni début ni fin. [. . .] Son flux égal et calme, qui le fait apparaître partout identique à lui-même dans toute son extension, le flux s'accomplissant en lui-même du Ὠκεανοῖο τελήεντος ποταμοῖο [Océan fleuve parfait] (Hésiode, *Théogonie* 959) entre limites (πείρατα) qu'Océan-même constitue comme sa forme circulaire et qui pourtant l'attachent lui-même à son lieu » [13, pages 175-176, citée par Mario Untersteiner [16]].

Auparavant, Parménide semble énoncer l'identité du penser et de l'être.

Or le penser est identique à ce en vue
De quoi une pensée singulière se forme.
On chercherait en vain le penser sans son être,
En qui il est un être à l'état proféré.
Car rien d'autre jamais et n'est et ne sera
À l'exception de l'être, en vertu du décret
Dicté par le Destin de toujours demeurer
Immobile en son tout. C'est pourquoi ne sera
Qu'entité nominale ⟨et pur jeu de langage⟩
Tout ce que les mortels, croyant que c'était vrai,
Ont d'un nom désigné : tel naître ou bien périr,
Être et puis n'être pas, changer de position,
Et changer d'apparence au gré de la couleur. (B VIII 34-41 [8, pages 262-263])

Pour Hermann Fränkel, ce passage exprime plutôt que « le penser aussi, libéré de ses scories, n'est rien d'autre qu'être conscient » et que « connaître est identique à la connaissance du « il est » » ; « au lieu de la confrontation entre sujet et objet subsiste une conscience uniforme de l'être de lui-même » [10, page 195].

Mais ici je mets fin au discours assuré
Ainsi qu'à la pensée visant la vérité.
Désormais apprends donc l'opinion des mortels
En ouvrant ton oreille à l'ordre harmonieux

Du discours composé pour ton enchantement.
Ils ont, par convention, en effet assigné
À deux formes des noms ; mais des deux cependant
Un n'en est pas digne — et c'est bien en cela
Qu'ils se sont fourvoyés. Car ils ont estimé
Contraires leurs aspects, et leur ont assigné
Des signes qui fondaient leur distinction mutuelle.
Des deux, l'une est le feu éthéré de la flamme,
C'est le feu caressant et c'est le feu subtil,
Identique à lui-même en toutes directions,
Mais qui à l'autre forme identique n'est pas ;
L'autre par son essence à l'exact opposé,
C'est la nuit sans clarté, dense et lourde d'aspect.
Voici, tel qu'il nous semble en sa totalité,
Le système du monde et son arrangement
Que je vais te décrire, afin que nul mortel
N'en sache plus que toi. (B VIII 50-61 [8, pages 262-263])

Comme promis, la déesse enseigne à présent l'opinion, le monde des sensations. L'opposition par Parménide de la vérité aux opinions continue à enflammer les philologues et les philosophes. On comprend qu'il condamne l'idée que l'être se décrive avec l'aide du non-être, ou que ce qui est soit un mélange d'être et de non-être. Or, aux vers 31-32 du premier fragment, il soutient que les opinions puissent être formées « en toute vraisemblance ». Les opinions ont donc leur place dans le discours de Parménide. Ce n'est pas un discours de vérité, mais ce discours est nécessaire pour rendre compte de la nature, des sensations, du temps. Mario Untersteiner note d'ailleurs que le jour/feu et la nuit sans clarté sont deux formes du temps ; il soutient que le discours de l'opinion qui suit le fragment VIII n'est pas l'objet de la condamnation de Parménide : être et opinion sont sur une même voie qui mène l'être à la vérité et l'opinion à la vraisemblance. La vérité est définitive ; la vraisemblance par contre est un chemin pour toujours inachevé.

Il me semble ainsi que les mathématiques sont du domaine des opinions et que le rapport des mathématiques à la vérité ou au monde restera un problème philosophique majeur.

La question du « il est » fait ainsi émerger la notion de lieu mathématique et les qualificatifs choisis évoquent les grandes questions de la topologie : les oppositions continu/discret, à bords/sans bord, limité/illimité, un/multiple. La pensée de ce qui est débouche sur une modélisation du réel.

2 Zénon d'Élée

Zénon d'Élée est un élève de Parménide. Il confronte la pensée de l'être avec l'opinion que suscitent les sensations, et en particulier avec l'existence d'êtres multiples et la nature discrète de la matière. Il le fait sous une forme originale qui a marqué la philosophie au point qu'Aristote le considère comme le père de la dialectique : il met les opinions à l'épreuve de la pensée et aboutit à des paradoxes.

Seuls quatre fragments des écrits de Zénon nous sont parvenus ; en particulier, le paradoxe le plus connu, « Achille et la tortue », correspond à un compte rendu d'Aristote et me paraît beaucoup moins élaboré et beaucoup plus empêtré dans la considération d'une situation concrète que ces fragments, de sorte que je ne suis pas convaincu qu'il remonte effectivement à Zénon. Le voici pour mémoire dans son intégralité !

> Le second argument est celui qu'on appelle l'*Achille*. Il consiste à dire que le plus lent à la course ne peut pas être rattrapé par le plus rapide, étant donné que le poursuivant doit nécessairement atteindre le point d'où le poursuivi est parti, de telle sorte que le plus lent doit sans cesse avoir une certaine avance. (Aristote, *Physique* VI, IX, 239b14 [8, page 288])

Ces fragments sont pour nous des fenêtres qui nous permettent d'accéder à l'univers de pensée des Éléates. Je veux les lire de manière matérielle, penser qu'ils peuvent parler pour eux-mêmes et ne pas tenter de construire, ni de reconstruire, un système de pensée à partir d'eux. C'est un peu la première étape de la stratégie de Zénon : ébranler nos convictions.

Je présente ces fragments dans l'ordre dans lequel Simplicius de Cilicie (490-560) en a rendu compte, un millénaire après qu'ils aient été composés par Zénon. C'est la source de problèmes philologiques extraordinaires ; en particulier la notion d'authenticité, son besoin, sont très différents d'hier à aujourd'hui.

La traduction que je propose est issue de la comparaison des traductions existantes [8, 17, 18, 11].

Je voudrais aussi vous avertir que ces fragments s'adressent au fondement d'une théorie de la matière et ne séparent pas la forme du contenu. En référer à un modèle pour lui répliquer, comme à la théorie des séries infinies ou des nombres réels, c'est se boucher les oreilles plutôt que de l'écouter.

Fragment B II

> Si [un étant qui n'a ni grandeur ni épaisseur ni masse] était ajouté à un autre étant, il ne le rendrait en rien plus grand. Car si un étant sans grandeur est ajouté à un autre, il n'est pas possible qui celui-ci gagne en grandeur. Et déjà il s'ensuit que l'ajout égale rien. Puis, si la soustraction de quelque chose n'a pas pour effet de rendre l'autre chose plus petite, et que son ajout n'a pas pour effet de la rendre plus grande, il est clair que l'ajouté comme le retranché égalent rien.

Le fragment B II cherche à penser un étant sans grandeur ni épaisseur ni masse. C'est un étant hypothétique qui aurait les propriétés du point géométrique. Or la grandeur, l'épaisseur, la masse sont des propriétés communes aux objets que nous percevons. Zénon demande quel serait le rapport d'un étant sans grandeur avec un étant doué de grandeur et se convainc qu'il n'y en a pas. Ajouté ou enlevé, il ne pourrait changer la grandeur de l'autre étant : il ne peut pas expliquer sa constitution. Il n'est donc rien.

La théorie mathématique actuelle qui cherche à répondre à ces questions est la théorie de la mesure. Pour elle aussi, un ensemble a une grandeur seulement si ses constituants en ont une. On peut chercher à constituer un objet à partir de très petits objets, comme des tranches, mais penser ces tranches comme des plans telle que le fait le calcul des indivisibles résulte d'un passage à la limite qui peut être réalisé dans le modèle, pas dans la réalité.

Fragment B III

> Si les étants sont multiples, il est nécessaire que les étants soient juste autant qu'ils sont réellement, c'est-à-dire ni plus ni moins. Mais si les étants sont juste autant qu'ils sont, ils devraient être limités.

> Si les étants sont multiples, les étants sont illimités : en effet, il y a toujours d'autres étants entre les étants, et à nouveau entre ceux-là d'autres encore. Et ainsi les étants sont illimités.

Il s'agit de penser la multiplicité. Qu'est-ce que cela veut dire d'avoir plusieurs choses devant nous ? Comment pouvons-nous arriver au jugement que les étants sont multiples ? Nous devons les imaginer devant nous comme les galets sur une plage et pouvoir les saisir dans leur multiplicité actuelle.

En fait, les stratégies d'évitement des paradoxes de Zénon consistent à refuser le terrain de l'actuel pour se placer sur le terrain du potentiel. Elles veulent constater que la finitude de notre entendement se retrouve dans la finitude du monde, c'est-à-dire que le monde n'est pas là mais en devenir. En particulier, la pensée peut l'atomiser sans que cette atomisation aboutisse jamais.

Zénon nous accorde la possibilité de connaître actuellement et cela précise la signification de la condition de perception de la multiplicité : il faut pouvoir embrasser les étants dans la pensée, de sorte qu'il n'en reste pas à ajouter et qu'on n'en ait pas compté de trop. Il font donc pouvoir les compter et le mot limité ici veut dire limité en nombre.

Le deuxième paragraphe approfondit la pensée du multiple. Il y a deux interprétations de ce passage.

– Il faut pouvoir penser les étants comme des entités séparées. Or penser des entités séparées nous amène à penser l'espace qui les sépare, leur frontière. Cet espace est un étant, qui est encore séparé des étants qu'il sépare. Penser le multiple amène donc à penser toujours davantage d'étants qu'on ne croyait : on en aura toujours oublié.
– À partir du moment où on pense que l'être est divisé en étants, cette divisibilité de l'être s'appliquera de manière homogène à chaque étant. Donc la pensée de la divisibilité désintègre immédiatement l'être en une infinité d'étants !

Fragment B I

> Si l'étant n'avait pas de grandeur, il ne saurait même pas être.
>
> Mais s'il est, il est nécessaire que chaque étant ait quelque grandeur et quelque épaisseur et que l'un se distingue de l'autre. Même raisonnement pour l'étant qui le côtoie. Celui-ci aura aussi une grandeur et un autre le côtoiera. Or le dire une fois revient à le dire sans cesse. Car aucun de ceux-ci ne sera l'ultime, ni l'un ne sera sans côtoyer un autre. Donc, si les étants sont multiples, il est nécessaire qu'ils soient à la fois petits et grands, petits au point de ne pas avoir de grandeur et grands au point d'être illimités.

Ce fragment est lui aussi sujet à deux interprétations contradictoires qui mènent à deux traductions différentes.

– Les étants se distinguent et on peut penser ce qui est à côté d'un étant. Mais alors les étants s'étendent à l'infini et la multiplicité d'étants est illimitée.
– On peut y voir une description matérielle de la deuxième interprétation du fragment B III. Dans ce cas, chaque étant est pensé comme composé de deux parties distinctes qui se côtoient et le « même raisonnement » est appliqué à une des deux parties. On aboutit à un nombre illimité de parties.

Mario Untersteiner [17, pages 186-187] replace les fragments de Zénon dans le contexte de la pensée de Parménide. Selon lui, les paradoxes s'appliquent à la δόξα (doxa, l'opinion) et non à l'ἀλήθεια (alētheia, la vérité dévoilée) : on ne peut expliquer le monde de l'opinion à l'aide de la multiplicité.

Les fragments décrivent donc deux mouvements d'analyse de l'étant : des parties données vers le tout et du tout vers ses parties. Ils démontrent que chacun de ces mouvements d'analyse est infini.

Hermann Fränkel [11, pages 223-225] propose une interprétation étonnante du fragment B I : selon lui, Zénon considère successivement la surface de l'étant, la surface de sa surface, etc., et montre ainsi que l'étant n'a pas de limite ultime.

La difficulté d'une mathématisation du continu se retrouve dans la *Physique* d'Aristote.

> Le continu est dans le genre du contigu ; je dis qu'il y a continuité, quand les limites par où deux choses se touchent ne sont qu'une seule et même chose, et, comme l'indique le nom, tiennent ensemble. (227a10-12 [1])
>
> Or, dès qu'on aura montré que tout instant est tel en soi et identique, il sera par là-même évident qu'il est aussi indivisible. Il est, dis-je, nécessaire qu'il soit identique, étant l'extrémité de l'un et de l'autre temps ; en effet, s'il y avait deux instants différents, l'un ne serait pas consécutif à l'autre, pour cette raison qu'un continu n'est pas composé d'éléments sans parties : et, s'ils sont mutuellement séparés, il y aura du temps dans l'intervalle ; car tout continu est tel qu'il y a quelque chose de synonyme entre les limites. (234a3-9 [1])

3 Philolaos de Crotone et les Pythagoriciens

Philolaos (−470-−385) est né près de vingt ans après la mort de Pythagore, peut-être à Crotone. C'est néanmoins à lui que sont dus les fragments les plus anciens qui témoignent de l'épistémologie pythagoricienne.

3.1 Illimités et limitants

Commençons par lire trois fragments de Philolaos. La traduction que je propose est issue de la comparaison des traductions existantes [8, 12].

Fragment B I

> Ce sont les illimités et les limitants qui ont, en s'harmonisant, constitué au sein du monde la nature, ainsi que la totalité du monde et tout ce qu'il contient.

Fragment B II

> Il est nécessaire que tous les êtres soient ou bien limitants, ou bien illimités, ou bien à la fois limitants et illimités. Mais il ne saurait y avoir rien que des illimités ou rien que des limitants. Aussi, puisqu'il est visible que le monde n'est pas fait rien que de limitants ni rien que d'illimités, il est bien clair que c'est de l'accord à la fois de limitants et d'illimités que le monde ainsi que tout ce qu'il contient ont été constitués. Cela est encore prouvé par l'observation des faits car les choses qui sont constituées de limitants, limitent ; d'autres, constituées à la fois de limitants et d'illimités, limitent et illimitent ; et d'autres encore, constituées d'illimités, seront à l'évidence illimitées.

Fragment B VI (première partie)

> Touchant la nature et l'harmonie, voici ce qu'il en est : l'être des choses, qui est éternel, et la nature elle même requièrent une connaissance divine et non humaine ; d'autant plus qu'aucune chose existante ne pourrait être connue de nous, s'il n'existait pas un être fondamental des choses dont se trouve composé le monde : les limitantes et les illimitées. Mais, puisque ces principes existent en tant que non semblables et non homogènes, il serait impossible qu'un monde se soit constitué à partir d'eux, s'il ne s'y était ajoutée une harmonie, quelle que soit la manière dont elle est née. Les semblables et apparentés ne requièrent aucune harmonie ; mais les dissemblables non apparentés et non également ordonnés doivent être nécessairement enchaînés par une harmonie telle qu'ils puissent, grâce à elle, se maintenir dans le monde.

Cherchons à présent à comprendre ce que désignent les deux mots essentiels de ces fragments.

– Les choses *illimitées* sont celles qui sont capables de nuances et de variabilité telles que l'on a difficulté à y poser des repères. Une chose illimitée n'est pas nécessairement infiniment grande, mais elle résiste au microscope : elle est faite d'une matière qui n'a pas d'atome. Elle n'est pas simplement composée d'infiniment petit et tout essai de la découper en morceaux peut circonscrire une région de la chose mais ne supprime pas l'infinie variabilité.
– Les choses limitantes sont aussi dans la nature. En même temps, elles surgissent grâce à un effort de l'intelligence et elles ont un caractère provisoire : elles contiennent une part d'arbitraire qu'une meilleure connaissance permet de réduire. Ce sont elles qui fournissent une prise sur les illimités.

La table 1 propose des exemples de rapports entre choses illimitées et choses limitantes. On se rend compte que ce sont les limitants qui permettent d'appréhender les illimités, c'est-à-dire de les percevoir et de les comprendre. Le premier exemple est dû à Léon Brunschvicg [4].

illimité	limitant	harmonie	illimité et limitant	nombre
ciel	étoile	constellation	lune	nombre d'étoiles
son	rapport de fréquences	gamme	intervalle de fréquences	rapport de fréquences
discours	lettre	mot ; syntaxe	assertion orale	règle de poésie
mer	phare	carte maritime	lac	coordonnées maritimes
terre	lieu	carte terrestre	village	coordonnées terrestres
espace	point	figure	figure pleine	rapport de longueurs
temps	instant	horloge	jour	calendrier

Table 1 – Illimités et limitants

3.2 La gamme de Philolaos

Il semble que la musique ait été une impulsion essentielle dans l'élaboration de la philosophie pythagoricienne. Lisons le fragment suivant, qui est la plus ancienne théorie de la musique qui nous soit parvenue de l'Antiquité.

Fragment B VI (deuxième partie)

La grandeur de l'harmonie comprend la syllabe [« la prise », c'est-à-dire la quarte] et la dioxie [« à travers les aiguës », c'est-à-dire la quinte]. La dioxie est plus grande que la syllabe du rapport 9 : 8 [c'est-à-dire d'un ton]. En effet, une syllabe sépare l'hypate [c'est-à-dire la corde du haut, le mi] de la mèse [c'est-à-dire de la corde du milieu, du la] ; une dioxie la mèse de la nète [c'est-à-dire de la corde du bas, du mi] ; une syllabe la nète de la trite [c'est-à-dire de la corde tierce, du si] ; et une dioxie la trite de l'hypate. Entre la trite et la mèse il y a le rapport 9 : 8. La syllabe a le rapport 4 : 3, la dioxie 3 : 2 et le diapason [« à travers toutes », c'est-à-dire l'octave] 2 : 1. Ainsi l'harmonie comprend cinq rapports 9 : 8 et deux dièses [« laissés passer », c'est-à-dire demi-tons], la dioxie trois rapports 9 : 8 et un dièse, et la syllabe deux rapports 9 : 8 et un dièse.

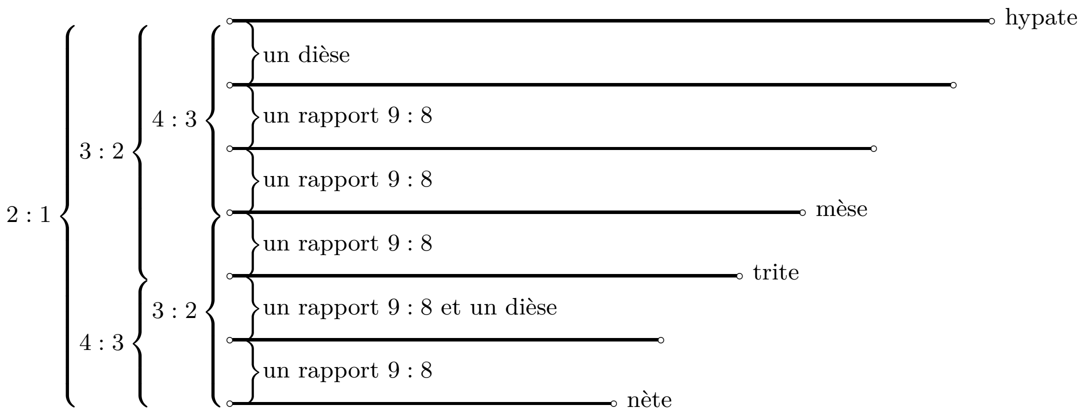

FIGURE 1 – L'heptacorde de Philolaos

Il s'agit de la description de la gamme produite par un heptacorde qui comprend une octave entière, c'est-à-dire que l'accord de l'hypate et de la nète est le plus harmonieux qui soit, celui produit par le pincement d'une corde suivi du pincement de la moitié de cette corde en en tenant le milieu.

Cette description suit la manière dont les musiciens accordent leur instrument :
- la mèse avec la nète pour obtenir une quinte,
- la trite avec l'hypate pour obtenir une quinte,
- puis les autres cordes pour obtenir des tons ;
- néanmoins certains accords contiendront des dièses.

3.3 Les nombres

Les fragments qui suivent sont ceux dont la réception a été la plus forte dans la Grèce antique et jusqu'à aujourd'hui. Ils expriment que les nombres sont des limitants que l'on peut trouver dans toute chose et qu'ils sont l'instrument même de la connaissance.

Fragment B IV

Et de fait, tout être connaissable a un nombre : sans celui-ci, on ne saurait rien concevoir ni rien connaître.

Aristote a encore résumé cette pensée en une formule qui a fait mouche : « Les pythagoriciens prétendent que les choses mêmes sont nombres » [2, 987*b*28].

Le fragment suivant est un exemple primitif de la théorie des nombres entreprise depuis Pythagore : connaître les nombres permet de connaître la forme des étants.

Fragment B v

> De fait, le nombre a deux formes propres, l'impair et le pair, plus une troisième produite par le mélange des deux, le pair-impair. Chacune des deux formes revêt des aspects multiples, qu'exprime chaque objet pris isolément.

Carl Huffman [12, pages 189-190] avance l'explication peut-être un peu simpliste de la forme « pair-impair » comme forme des rapports de nombres lorsqu'ils se réduisent au rapport d'un nombre pair et d'un nombre impair comme le sont tous ceux de la figure 1. Je vois dans ce fragment le germe d'une dérive vers la numérologie.

Voici comment Ernst Cassirer décrit l'œuvre des Pythagoriciens.

> Si les Pythagoriciens qualifient le nombre de οὐσία [substance], s'ils unifient systématiquement le concept de nombre et d'être, l'exploit essentiel de cette pensée est qu'elle est la première à découvrir véritablement l'être spécifique du nombre pur. Car l'être physique, sensible, corporel, n'est pas identifié avec celui du nombre ; autant l'un *réfère* à l'autre de manière déterminée, autant ils sont séparés et *distingués*. [6, page 29]

4 Conclusion

Le nombre réduit et la forme sèche des fragments présocratiques discutés ici n'empêchent pas de saisir le continu et l'illimité comme défis majeurs pour les Éléates et les Pythagoriciens. Les paradoxes de Zénon ont décrit très tôt les obstacles d'une description vraisemblable du rapport entre le continu et ses constituants. De même, le nombre comme instrument de connaissance s'est tôt heurté à la découverte de l'incommensurabilité en géométrie.

La forme axiomatique de la géométrie d'Euclide peut être comprise dans ce sens comme une manière d'organiser les opinions sur le monde sensible de manière vraisemblable sans jamais s'exprimer sur la nature du continu, c'est-à-dire sur le rapport entre l'espace et le point, et en émancipant la géométrie du nombre.

Les conséquences d'une approche historique et philosophique de la méthode axiomatique sur la didactique des mathématiques sont discutés par Gilbert Arsac [3].

Références

[1] Aristote : *Physique*, volume second, V–VIII. Belles Lettres, Paris, 1931. Texte établi et traduit par Henri Carteron.

[2] Aristote : *La métaphysique. Tome I.* Vrin, Paris, 1953. Nouvelle édition entièrement refondue, avec commentaire par Jules Tricot.

[3] Gilbert Arsac : L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Rech. Didact. Math.*, 8(3):267–312, 1987.

[4] Léon Brunschvicg : *Les étapes de la philosophie mathématique.* Alcan, Paris, 1912.

[5] Guido Calogero : *Studi sull'eleatismo.* La nuova Italia, Firenze, 1977. Nouvelle édition d'un ouvrage paru en 1932.

[6] Ernst Cassirer : Die Philosophie der Griechen von den Anfängen bis Platon. *In* Max Dessoir, éditeur : *Lehrbuch der Philosophie*, pages 7–139. Ullstein, Berlin, 1925.

[7] Nicolas D'Andrès : Sur le nom de *mathématique.* Apprendre par un autre et découvrir par soi-même chez Jamblique (*De communi mathematica scientia*, chap. 11) et Proclus (*In Euclidem*, Prologue I, chap. 15). *In* Alain Lernould, éditeur : *Études sur le commentaire de Proclus au premier livre des Éléments d'Euclide*, pages 89–109. Septentrion, Villeneuve d'Ascq, 2010.

[8] Jean-Paul Dumont, Daniel Delattre et Jean-Louis Poirier, éditeurs. *Les Présocratiques.* Gallimard, Paris, 1988.

[9] Euclide d'Alexandrie : *Les Éléments. Vol. 1.* Bibliothèque d'histoire des sciences. Presses Universitaires de France, Paris, 1990. Livres I–IV : géométrie plane. Traduction du texte d'Heiberg et commentaire de Bernard Vitrac.

[10] Hermann Fränkel : Parmenidesstudien. *In Wege und Formen frühgriechischen Denkens*, pages 157–197. C. H. Beck, München, 1955. Version légèrement corrigée d'un article paru dans Nachr. Ges. Wiss. Göttingen : Philos.-hist. Kl., pages 153–192, 193.

[11] Hermann Fränkel : Zenon von Elea im Kampf gegen die Idee der Vielheit. *In Wege und Formen frühgriechischen Denkens*, pages 198–236. C. H. Beck, München, 1955. Traduction et révision d'un article paru dans Amer. J. Philol. 63, pages 1–25 et 193–206, 1942.

[12] Carl A. Huffman : *Philolaus of Croton. Pythagorean and Presocratic.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[13] Paula Philippson : *Thessalische Mythologie.* Rhein-Verlag, Zürich, 1944.

[14] Árpád Szabó : *Anfänge der griechischen Mathematik.* Oldenbourg, München-Wien, 1969. Traduction de Michel Federspiel : *Les débuts des mathématiques grecques*, Vrin, Paris, 1977.

[15] Árpád Szabó : *Die Entfaltung der griechischen Mathematik.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1994. Traduction de Michel Federspiel : *L'aube des mathématiques grecques*, Vrin, Paris, 2000.

[16] Mario Untersteiner, éditeur. *Parmenide. Testimonianze e frammenti.* La nuova Italia, Firenze, 1958.

[17] Mario Untersteiner, éditeur. *Zenone. Testimonianze e frammenti.* La nuova Italia, Firenze, 1962.

[18] Jean Zafiropulo : *L'école éléate : Parménide, Zénon, Mélissos.* Belles lettres, Paris, 1950.