Résumé du mémoire d'habilitation

Stefan Neuwirth

1 Trois cas de figure pour l'inconditionnalité

Toutes nos recherches sont liées à la notion d'inconditionnalité, motivée par la question suivante :

Question 1.1. Lorsqu'un élément x d'un espace normé admet une représentation comme combinaison linéaire $\sum c_q \mathrm{e}_q$ d'éléments e_q, de quelle manière la norme de x dépend-elle du signe des coefficients c_q ?

Les réponses que nous obtiendrons seront en termes du *support* de x, c'est-à-dire de l'ensemble I d'indices q pour lesquels $c_q \neq 0$.

Selon la situation, un changement du signe des coefficients c_q

– fait varier la norme de x de manière bornée et on dira que $(\mathrm{e}_q)_{q\in I}$ est une *suite basique inconditionnelle* ;

– multiplie au plus la norme de x par un facteur D explicite et D sera la *constante d'inconditionnalité* de la suite $(\mathrm{e}_q)_{q\in I}$;

– ne change pas la norme de x et on parlera de suite basique $(\mathrm{e}_q)_{q\in I}$ *1-inconditionnelle* ;

Lorsque nous chercherons à déterminer une constante d'inconditionnalié exacte, nous devrons préciser de quelle manière nous nous permettons de changer le signe des coefficients :

– de manière *réelle* en multipliant certains coefficients par -1, ou

– de manière *complexe* en les faisant tourner d'un angle t_q.

Voici trois cas de figure dans lesquels cette question se pose.

(a) Si x est une fonction sur un groupe abélien compact et les e_q sont les caractères de ce groupe, cette représentation est la série de Fourier de x et un changement du signe des coefficients de Fourier est une *convolution* ou *multiplication de Fourier* unimodulaire.

(b) Si x est un opérateur et les e_q sont les matrices élémentaires, cette représentation est la matrice de x et un changement du signe des coefficients matriciels est une *multiplication de Schur* unimodulaire.

(c) Si x est un élément de l'algèbre d'un groupe discret G et les e_q sont les fonctions indicatrices des éléments de G, alors un changement du signe des coefficients est une *multiplication de Herz-Schur* unimodulaire.

2 Définition des suites basiques inconditionnelles

Voici une définition formelle qui reprend la discussion ci-dessus.

Définition 2.1. Soit X un espace vectoriel quasi-normé muni d'une suite distinguée (e_q) dans X. Soit $(\mathrm{e}_q)_{q\in I}$ une sous-suite. Soit $\mathbb{S} = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (vs. $\mathbb{S} = \{-1, 1\}$.)

(a) I est *inconditionnelle* dans X s'il y a une constante D telle que

$$\Big\|\sum_{q\in I} \epsilon_q a_q \mathrm{e}_q\Big\| \leqslant D \Big\|\sum_{q\in I} a_q \mathrm{e}_q\Big\| \tag{1}$$

pour tout choix de signes $\epsilon_q \in \mathbb{S}$ et toute suite de coefficients complexes a_q de support fini. Sa *constante d'inconditionnalité complexe (vs. réelle)* est le minimum de telles constantes D.

(*b*) I est *1-inconditionnelle* complexe (vs. réelle) dans X si sa constante d'inconditionnalité complexe (vs. réelle) vaut 1. Cela veut dire que l'inégalité (1) devient l'égalité

$$\Big\|\sum_{q\in I}\epsilon_q a_q \mathrm{e}_q\Big\| = \Big\|\sum_{q\in I} a_q \mathrm{e}_q\Big\|.$$

3 Matrices et multiplicateurs de Schur pour les classes de Schatten-von-Neumann

Cette thématique de recherche correspond au cas de figure (*b*) ci-dessus : (e_q) est la suite des matrices élémentaires.

Notons C l'ensemble des indices colonne et R l'ensemble des indices ligne de matrices, en général deux copies de $\mathbb{N}$, et soit I une partie de $R \times C$. La propriété d'inconditionnalité de I peut aussi se formuler ainsi : une suite I est inconditionnelle de constante D si et seulement si, pour toute matrice φ à coefficients complexes (vs. réels) et pour tout x dont les coefficients de matrice sont nuls hors de I (dont l'espace sera noté X_I) on a

$$\|\varphi * x\| \leqslant D \sup |\varphi_{rc}|\, \|x\|,$$

où $\varphi * x$ est le produit de *Schur* (ou de Hadamard) défini par

$$(\varphi * x)_{rc} = \varphi_{rc} x_{rc}.$$

L'opérateur de multiplication par φ est un *multiplicateur de Schur relatif.* On peut aussi décrire les multiplicateurs de Schur relatifs comme les opérateurs diagonaux sur la suite $(\mathrm{e}_q)_{q\in I}$.

Notre étude se concentrera sur les classes de Schatten-von-Neumann $X = \mathrm{S}^p$ dont la quasi-norme est donnée par $\|x\| = \left(\mathrm{tr}\,(x^*x)^{p/2}\right)^{1/p}$: il s'agit de la contrepartie non commutative des espaces ℓ^p. Lorsque $p \geqslant 1$, l'espace de Banach S^p admet une structure d'espace d'opérateurs canonique qui rend la définition suivante naturelle.

Définition 3.1. I est *complètement inconditionnelle* dans S^p s'il y a une constante D telle que (1) vaut pour tout choix de signes $\epsilon_q \in \mathbb{S}$ et toute suite de coefficients *opérateurs* $a_q \in \mathrm{S}^p$ à support fini. Sa constante d'inconditionnalité *complète* complexe (vs. réelle) est le minimum de telles constantes D.

De la même manière, on parle de la norme *complète* de multiplicateurs de Schur relatifs. On ne sait pas si on définit vraiment ainsi une classe nouvelle ; ce serait répondre à la conjecture de Gilles Pisier qu'il existe des multiplicateurs de Schur bornés sur S^p ($p \neq 1, 2, \infty$) qui ne sont pas complètement bornés.

Une suite inconditionnelle de matrices élémentaires dans S^∞ est en fait un ensemble V-Sidon, classe que Varopoulos a introduite dans l'étude des algèbres tensorielles $\mathrm{c}_0(C) \hat{\otimes} \mathrm{c}_0(R)$ sur des espaces discrets (voir le théorème 5.1 de [14] qui rassemble les résultats connus : I doit être réunion finie d'ensembles qui soit contiennent au plus un élément par ligne, soit contiennent au plus un élément par colonne.) Notre étude généralise ainsi les résultats de Varopoulos à toutes les classes de Schatten-von-Neumann.

4 Suites de matrices élémentaires et graphes bipartis

Les suites inconditionnelles de matrices élémentaires forment la contrepartie matricielle des ensembles $\Lambda(p)$ de Walter Rudin étudiés en analyse de Fourier (le cas de figure (*a*) de la section 1.) Alors que l'étude des ensembles $\Lambda(p)$ voit surgir naturellement leurs propriétés arithmétiques (de théorie additive des nombres,) l'inconditionnalité de I se traduit avantageusement en termes de théorie des graphes.

Nous allons donc considérer I comme un graphe biparti dont les deux classes (« couleurs ») de sommets sont C et R, dont les éléments seront appelés respectivement « sommets colonne » et « sommets ligne. » Ses arêtes (non dirigées) relient seulement des sommets ligne $r \in R$ avec des sommets colonne $c \in C$, et cela exactement lorsque $(r, c) \in I$. La matrice $(\chi_I(r, c))_{(r,c)\in R\times C}$ fonction caractéristique de I est la matrice d'incidence de ce graphe biparti.

Voici deux exemples importants.

Exemple 4.1. Soit s un entier. Considérons l'ensemble

$$I = \left\{ (r, c) \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/s\mathbb{Z} : r - c \in \{0, 1\} \right\}.$$

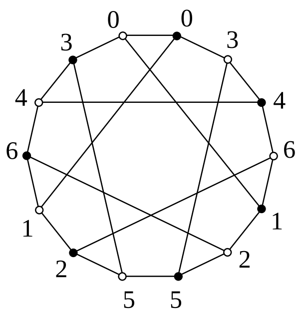
Le graphe biparti associé est le cycle (ligne 0, colonne 0, ligne 1, colonne 1, ..., ligne $s - 1$, colonne $s - 1$) de longueur $2s$. La matrice d'incidence de ce graphe est

$$\begin{array}{c} \\ {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 1} \\ \vdots \\ {\scriptstyle s-2} \\ {\scriptstyle s-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle \cdots} & {\scriptstyle s-2} & {\scriptstyle s-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exemple 4.2. Considérons l'ensemble

$$I = \left\{ (r, c) \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} : r + c \in \{0, 1, 3\} \right\}.$$

Le graphe biparti associé est le graphe de *Heawood*.



La matrice d'incidence de ce graphe est

$$\begin{array}{c|ccccccc} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 2} \\ {\scriptstyle 3} \\ {\scriptstyle 4} \\ {\scriptstyle 5} \\ {\scriptstyle 6} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5 Matrices lacunaires et inconditionnalité

Dans l'article *Lacunary matrices*, nous montrons que ces sous-suites doivent satisfaire la condition de densité suivante, qui est l'analogue de la condition de maille de Walter Rudin [18, Theorem 3.5] pour les ensembles $\Lambda(p)$.

Théorème 5.1. *Si I est inconditionnelle de constante D dans S^p, alors la taille $\#I'$ de tout sous-graphe I' induit par m sommets colonne et n sommets ligne, c'est-à-dire le cardinal de* *toute partie $I' = I \cap R' \times C'$ avec $\#C' = m$ et $\#R' = n$, satisfait*

$$\begin{aligned}\#I' &\leqslant D^2\big(m^{1/p}n^{1/2} + m^{1/2}n^{1/p}\big)^2 \\ &\leqslant 4D^2 \min(m,n)^{2/p}\max(m,n).\end{aligned} \tag{2}$$

Les exposants de cette inégalité sont optimaux dans les trois cas suivants :

(a) *si m ou n est fixé (trivial ;)*

(b) *si $p = 4$ (voir le graphe aléatoire ci-dessous ;)*

(c) *si p est un entier pair et $m = n$ (voir [8, Theorem 4.8].)*

Si $m \neq n$, nous construisons des graphes aléatoires qui testent l'inégalité (2) sans en montrer toujours l'optimalité.

Théorème 5.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier pair $p \geqslant 4$, il existe un graphe I de taille*

$$\#I \sim \begin{cases}\max(m,n)^{1-\varepsilon}\min(m,n)^{1/2} & \textit{si } p = 4\\ \max(m,n)^{1/2-\varepsilon}\min(m,n)^{1/2+2/p} & \textit{si } p \geqslant 6.\end{cases}$$

et de constante d'inconditionnalité indépendante de m et n lorsque $mn \to \infty$.

Si p est un entier pair, nous donnons aussi une condition suffisante en termes de sentiers sur un graphe biparti : un *sentier* de longueur s dans I est une suite $(v_0, v_1, \ldots, v_s)$ de sommets alternativement dans R et C telle que les arêtes reliant v_0 à v_1, v_1 à v_2, etc. correspondent à des élements deux à deux distincts de I (alors qu'un *chemin* est requis d'avoir même tous ses sommets distincts et que les sommets d'une *promenade* sont admis à se répéter.) Le théorème suivant est aussi l'analogue d'un théorème de Walter Rudin.

Théorème 5.3. *Soit p un entier pair. Si le nombre de sentiers dans I de longueur $p/2$ entre deux sommets donnés admet une borne uniforme, alors I est inconditionnelle dans S^p.*

Le calcul suivant montre le lien étroit entre la norme S^p avec $p = 2s$ un entier pair et les promenades fermées de longueur p dans ce graphe.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\Big|\sum_{q\in I} a_q \mathrm{e}_q\Big|^p &= \operatorname{tr}\Big(\sum_{(r,c),(r',c')\in I} (a_{rc}\mathrm{e}_{rc})^*(a_{r'c'}\mathrm{e}_{r'c'})\Big)^s \\ &= \operatorname{tr} \sum_{\substack{(r_1,c_1),(r_1',c_1'),\ldots,\\(r_s,c_s),(r_s',c_s')\in I}} \prod_{i=1}^s (\overline{a_{r_ic_i}}\mathrm{e}_{c_ir_i})(a_{r_i'c_i'}\mathrm{e}_{r_i'c_i'}) \\ &= \sum_{\substack{(r_1,c_1),(r_1,c_2),\ldots,\\(r_s,c_s),(r_s,c_{s+1})\in I}} \prod_{i=1}^s \overline{a_{r_ic_i}}a_{r_ic_{i+1}} \quad (\text{où } c_{s+1} = c_1.)\end{aligned}$$

Cette dernière somme est indexée par les promenades fermées $(c_1, r_1, c_2, \ldots, c_s, r_s)$ de longueur p dans le graphe associé à I !

La conjonction des théorèmes 5.1 et 5.3 donne une nouvelle preuve du théorème de Paul Erdős selon lequel un graphe sur v sommets sans circuit de longueur paire p est de taille bornée par $v^{1+2/p}$, à une constante près (un *circuit* est un sentier fermé.) La généralisation de ce théorème des circuits aux *cycles* (chemins fermés) par Bondy et Simonovits [3] échappe à notre méthode. L'existence de graphes qui montreraient l'optimalité de cette estimation est une question ouverte posée par Erdős en 1963.

6 Matrices lacunaires et 1-inconditionnalité

L'article *Cycles and 1-unconditional matrices* aboutit à une caractérisation des suites basiques 1-inconditionnelles dans S^p.

Un des ingrédients est l'étude des multiplicateurs de Schur unimodulaires sur un cycle. Nous obtenons en particulier la proposition suivante.

Proposition 6.1. *Si p n'est pas un entier pair, alors ϵ est un multiplicateur de Schur unimodulaire isométrique sur un cycle I pour S^p si et seulement si ϵ peut être interpolée par une matrice de rang 1 : $\epsilon_{rc} = \zeta_c \eta_r$ pour $(r,c) \in I$, où $\zeta \in \mathbb{T}^C$ et $\eta \in \mathbb{T}^R$.*

Esquisse de démonstration. La condition est bien suffisante : on a alors

$$\epsilon * x = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \eta_r & \\ & & \ddots \end{pmatrix} (x_{rc}) \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \zeta_c & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Étudions la nécessité. On peut supposer que le cycle I soit donné comme dans l'exemple 4.1. Soit $\epsilon \in \mathbb{T}^I$ une matrice de nombres unimodulaires partiellement spécifiée. Il est possible de multiplier les lignes et les colonnes de ϵ par des nombres complexes de module 1 de sorte que ϵ devienne la matrice circulante

$$\tilde{\epsilon} = \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 1} \\ \vdots \\ {\scriptstyle s-2} \\ {\scriptstyle s-1} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle \cdots} & {\scriptstyle s-2} & {\scriptstyle s-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ddots & 0 & \vartheta \\ \vartheta & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vartheta & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3}$$

avec ϑ racine $s$ième de $\overline{\epsilon_{00}}\epsilon_{10} \ldots \overline{\epsilon_{s-1,s-1}}\epsilon_{0,s-1}$. Un argument de transfert montre que la norme du multiplicateur de Schur par $\tilde{\epsilon}$ sur I borne le multiplicateur de Fourier relatif $\mu\colon a + bz \mapsto a + \vartheta bz$ dans le groupe G des racines $s$ièmes de l'unité, où on norme $a + bz$ par la norme L^p : $\|a + bz\| = \left(s^{-1} \sum_{z^s=1} |a + bz|^p\right)^{1/p}$: voir la proposition 13.2 (a). Si μ est une isométrie, le théorème d'équimesurabilité de Plotkin-Rudin montre que z et ϑz ont même distribution et donc $\vartheta^s = 1$. □

On peut calculer la norme exacte du multiplicateur de Schur relatif $\tilde{\epsilon}$ sur S^1_I et sur S^∞_I : elle égale la norme de μ sur $\mathrm{L}^1_\Lambda(G)$ et sur $\mathrm{L}^\infty_\Lambda(G)$ avec $\Lambda = \{1, z\}$ et cette norme est

$$\frac{\max_{z^s=-1} |\vartheta + z|}{|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/s}|}$$

(proposition 7.1(d) de [14]).

Cette proposition est une des étapes dans la démonstration du théorème suivant.

Théorème 6.2. *Soit p un nombre réel strictement positif qui ne soit pas un entier pair. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- *I est complètement 1-inconditionnelle complexe dans S^p.*
- *I est 1-inconditionnelle réelle dans S^p.*
- *I est une réunion disjointe d'arbres, c'est-à-dire que I ne contient aucun cycle.*
- *Toute suite de signes complexes $\epsilon \in \mathbb{T}^I$ peut être interpolée par une matrice de rang 1.*
- *I est un* ensemble de Varopoulos *de* V-interpolation de constante 1 : *toute suite $\varphi \in \ell^\infty_I$ peut être interpolée par un tenseur $u \in \ell^\infty_C \hat{\otimes} \ell^\infty_R$ avec $\|u\| = \|\varphi\|$.*
- *I est un ensemble d'interpolation isométrique pour les multiplicateurs de Schur : toute suite $\varphi \in \ell^\infty_I$ est la restriction d'un multiplicateur de Schur sur S^∞ de norme $\|\varphi\|$.*

Dans le cas où p est un entier pair, la combinatoire devient plus compliquée : cela se reflète dans la proposition suivante.

Proposition 6.3. *Si p est un entier pair, alors ϵ est un multiplicateur de Schur unimodulaire isométrique sur un cycle I de longueur $2s$ pour S^p si et seulement si $p/2 \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$ ou si ϵ peut être interpolée par une matrice de rang 1.*

Cette proposition est une des étapes dans la démonstration de la caractérisation suivante.

Théorème 6.4. *Soit p un entier pair. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- *I est complètement 1-inconditionnelle complexe dans S^p.*
- *I est 1-inconditionnelle réelle dans S^p.*
- *I ne contient aucun cycle de longueur paire inférieure ou égale à p.*

Illustrons ce théorème sur l'exemple 4.2. Le graphe de Heawood ne contient aucun cycle de longueur 4 : donc la norme S^4 de sa matrice d'incidence ne varie pas si on change le signe de ses coefficients.

La propriété de ne pas contenir de cycle de longueur paire donnée a été très étudiée en théorie des graphes. Quelle conséquence a-t-elle pour la taille du graphe ? La section suivante en propose un résumé, à comparer aux résultats du théorème 5.1.

7 Graphes bipartis sans cycle de longueur donnée

Proposition 7.1. *Soient $2 \leqslant n \leqslant m$, $I \subseteq R \times C$ avec $\# C = n$ et $\# R = m$, et $e = \# I$.*

(a) *Si I est 1-inconditionnelle dans S^4 — I ne contient pas de cycle de longueur 4 — alors*

$$n \geqslant 1 + \left(\frac{e}{m} - 1\right) + \left(\frac{e}{m} - 1\right)\left(\frac{e}{n} - 1\right),$$

c'est-à-dire $e^2 - me - mn(n-1) \leqslant 0$. On a égalité si et seulement si I est le graphe d'incidence d'un système de Steiner $\mathrm{S}(2, e/m; n)$ sur n points et m blocs (voir [2, Def. I.3.1] pour la définition des systèmes de Steiner.)

(b) *Si I est 1-inconditionnelle dans S^6 — I ne contient pas de cycle de longueur 4 ni 6 — alors*

$$n \geqslant 1 + \left(\frac{e}{m} - 1\right) + \left(\frac{e}{m} - 1\right)\left(\frac{e}{n} - 1\right) + \left(\frac{e}{m} - 1\right)^2\left(\frac{e}{n} - 1\right),$$

c'est-à-dire $e^3 - (m+n)e^2 + 2mne - m^2n^2 \leqslant 0$. On a égalité si et seulement si I est le graphe d'incidence du quadrangle *(le cycle de longueur 8) ou d'un quadrangle généralisé avec n points et m lignes (voir [20, Def. 1.3.1] pour la définition des polygones généralisés ; l'exemple 4.2 décrit le plus petit quadrangle généralisé.)*

(c) *Si I est 1-inconditionnelle dans S^p avec $p = 2k$ un entier pair — I ne contient pas de cycle de longueur inférieure ou égale à p — alors*

$$n \geqslant \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{e}{m} - 1\right)^{\lceil \frac{i}{2} \rceil}\left(\frac{e}{n} - 1\right)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}. \tag{4}$$

*On a égalité si et seulement si I est le graphe d'incidence du $(k+1)$*gone *(le cycle de longueur $2k+2$) ou d'un $(k+1)$gone généralisé avec n points et m lignes.*

Les résultats (a) et (b) ci-dessus ont été obtenus dans la note *The size of bipartite graphs with girth eight* [13], alors que le cas général résulte de travaux de Noga Alon, Shlomo Hoory et Nathan Linial (voir [9]).

L'inégalité (4) montre que si I est 1-inconditionnelle dans S^{2k}, alors $\# I \leqslant n^{1+1/k} + (s-1)n/s$. Si $k \notin \{2, 3, 5, 7\}$, il n'existe pas de $(k+1)$gones généralisés de taille arbitrairement grande et l'existence de graphes arbitrairement grands sans cycle de longueur $2k$ de taille minorée par $n^{1+1/k}$ à une constante près est une question importante en théorie des graphes extrémaux.

La recherche pratique de graphes extrémaux nous a amenés à écrire un algorithme implémenté en langage `C` qui énumère tous les graphes bipartis d'un nombre de sommets donnés et teste l'existence de cycles. La proposition suivante, démontrée indépendamment par Adolf Mader et Otto Mutzbauer [11], réduit le nombre de matrices d'incidence de graphes bipartis à tester.

Proposition 7.2. *Toute matrice à coefficients 0 ou 1 peut être simultanément ordonnée selon les ordres lexicographiques des lignes et des colonnes (c'est-à-dire l'ordre des lignes et des colonnes lues comme des nombres binaires) par une permutation des lignes et des colonnes.*

En effet, une permutation des lignes et des colonnes de la matrice d'incidence d'un graphe biparti consiste juste à réindexer les sommets de ce graphe.

8 Matrices lacunaires et ensembles lacunaires d'un groupe abélien discret

Voici la traduction naturelle entre inconditionnalités de Fourier et matricielle (les cas (a) et (b) de la section 1.)

Proposition 8.1. *Soit $I \subseteq R \times C$. Soit $p \in [1, \infty]$: les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- *I est complètement inconditionnelle dans S^p.*
- *La suite de produits de Walsh de longueur deux $\{\epsilon_c \epsilon'_r : (r, c) \in I\}$ est complètement inconditionnelle dans $\mathrm{L}^p(\{-1, 1\}^C \times \{-1, 1\}^R)$.*
- *La suite de produits de deux fonctions de Steinhaus $\{z_c z'_r : (r, c) \in I\}$ est complètement inconditionnelle dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^C \times \mathbb{T}^R)$.*

Soit $p \in (0, \infty]$: les propriétés suivantes sont équivalentes.

- *I est 1-inconditionnelle dans S^p.*
- *La suite $\{\epsilon_c \epsilon'_r : (r, c) \in I\}$ est 1-inconditionnelle dans $\mathrm{L}^p(\{-1, 1\}^C \times \{-1, 1\}^R)$.*
- *La suite $\{z_c z'_r : (r, c) \in I\}$ est 1-inconditionnelle dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^C \times \mathbb{T}^R)$.*

La proposition 11.1 de [14] décrit dans quelle mesure cette proposition reste vraie pour d'autres groupes discrets.

9 Sous-espaces S^p_I 1-complémentés

En route pour ces résultats, nous obtenons aussi la caractérisation suivante.

Proposition 9.1. *Le sous-espace S^p_I de S^p formé des opérateurs à support dans I est 1-complémenté si et seulement si I est la réunion disjointe de graphes bipartis complets $R_j \times C_j$: sa matrice d'incidence est, à une permutation des colonnes et des lignes près, bloc-diagonale :*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} (1) & (0) & (0) & \cdots \\ (0) & (1) & (0) & \ddots \\ (0) & (0) & (1) & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}.$$

10 Matrices de rang 1 partiellement spécifiées

Si φ est une matrice de rang 1, $\varphi = x \otimes y$, alors l'opérateur de multiplication de Schur par φ est de norme $\sup |x_r| \sup |y_c|$. Or les exemples de calcul exact de normes de tels opérateurs sont très rares et nous avons voulu savoir comment cette norme change lorsque φ agit sur un sous-espace S^p_I.

Théorème 10.1. *Soit $I \subset R \times C$ et considérons $(x_r)_{r \in R}$ et $(y_c)_{c \in C}$. Alors le multiplicateur de Schur relatif S^p_I donné par $(x_r y_c)_{(r,c) \in I}$ est de norme $\sup_{(r,c) \in I} |x_r y_c|$.*

11 Propriété d'approximation métriquement inconditionnelle dans S^p_I

Même si I n'est pas 1-inconditionnelle dans l'espace S^p, l'espace S^p_I pourrait néanmoins admettre une autre base 1-inconditionnelle. Pour approcher de telles questions, Peter G. Casazza et Nigel J. Kalton ont introduit la propriété (c) ci-dessous.

Définition 11.1. Soit X un espace de Banach séparable et $\mathbb{S} = \mathbb{T}$ (vs. $\mathbb{S} = \{-1, 1\}$.)

(a) Une suite (T_k) d'opérateurs sur X est une *suite approximante* si chaque T_k est de rang fini et $T_k x \to x$ pour chaque $x \in X$.

(b) ([17].) Posons $\Delta T_k = T_k - T_{k-1}$. L'espace X a la *propriété d'approximation inconditionnelle* s'il existe une suite approximante (T_k) telle que pour une certaine constante D

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \Delta T_k \right\| \leqslant D \quad \text{pour tout } n \text{ et tous } \epsilon_k \in \mathbb{S}.$$

La *constante d'inconditionnalité complexe (vs. réelle)* de (T_k) est la plus petite des constantes D.

(c) ([4, § 3], [7, § 8].) L'espace X a la *propriété d'approximation métriquement inconditionnelle complexe (vs. réelle)* si, pour tout $\delta > 0$, X admet une suite approximante de constante d'inconditionnalité complexe (vs. réelle) $1 + \delta$.

Voici notre description des sous-espaces S^p_I métriquement inconditionnels :

Théorème 11.2. *On a deux cas.*

- *Si $p \in [1, \infty] \setminus \{2, 4, 6, \ldots\}$ et S^p_I a la propriété d'approximation métriquement inconditionnelle réelle, alors la distance d'un sommet colonne à un sommet colonne est* asymptotiquement *infinie dans I : leur distance devient arbitrairement grande en effaçant un nombre fini d'arêtes de I.*
- *Si $p \in \{2, 4, 6, \ldots\}$, l'espace S^p_I a la propriété d'approximation métriquement inconditionnelle complexe, ou réelle, si et seulement si deux sommets à distance $2j + 1 \leqslant p/2$ sont à distance asymptotiquement supérieure ou égale à $p - 2j + 1$.*

12 Inégalités matricielles

L'article *Matrix inequalities with applications to the theory of iterated kernels* montre l'inégalité matricielle suivante.

Théorème 12.1. *Soit A une matrice de taille $n \times m$ à coefficients positifs et notons* somme(A) *la somme de tous ses coefficients. On a*

$$\operatorname{somme}\Big(\overbrace{AA^*A\ldots A^{(*)}}^{k \text{ termes}}\Big) \geqslant \frac{\operatorname{somme}(A)^k}{n^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} m^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}$$

où $A^{(*)}$ est A^* ou A selon la parité de k.

Cette inégalité est la version discrète d'un théorème sur les itérés d'un noyau (voir la remarque 1.4 de [1].) Si on applique cette inégalité à la matrice d'incidence d'un graphe biparti I, on obtient une minoration optimale du nombre de promenades de longueur k en termes de la taille de I. Dans le cas $k = 3$, une généralisation de cette inégalité (le théorème 4.4 de [13]) donne une minoration optimale du nombre de chemins (voir le corollaire 4.6 de [13].)

13 Transfert entre multiplicateurs de Schur et de Fourier

Le théorème suivant est bien connu.

Proposition 13.1. *Soit* Γ *un groupe discret et* $R, C \subseteq \Gamma$. *À* $\Lambda \subset \Gamma$ *associons* $I = \{\,(r, c) \in R \times C : rc \in \Lambda\,\}$. *À* $\varrho \in \mathbb{C}^\Lambda$ *associons* $\varphi \in \mathbb{C}^I$ *défini par* $\varphi(r, c) = \varrho(rc)$ *pour tout* $(r, c) \in I$.

– *Soit* $p > 0$. *La norme complète du multiplicateur de Schur relatif* φ *sur* S^p_I *est bornée par la norme complète du multiplicateur de Fourier relatif* ϱ *sur* $\mathrm{L}^p_\Lambda(\tau)$.

– *La norme du multiplicateur de Schur relatif* φ *sur* S^∞_I *est bornée par la norme du multiplicateur de Fourier relatif* ϱ *sur* $\mathrm{L}^\infty_\Lambda(\tau)$.

Une forme de réciproque peut être déduite du théorème limite de Szegő matriciel (voir le théorème 2.6 de [16].)

Proposition 13.2. *Soit* Γ *un groupe discret* moyennable *et soit* $I \subseteq \Gamma \times \Gamma$ *un ensemble* toeplitzien *au sens que* $I = \{(r, c) \in \Gamma \times \Gamma : rc^{-1} \in \Lambda\}$ *pour une partie* Λ *de* Γ. *Soit* $\varphi \in \mathbb{C}^I$ *une matrice* toeplitzienne *au le sens qu'il existe* $\varrho \in \mathbb{C}^\Lambda$ *tel que* $\varphi(r, c) = \varrho(rc^{-1})$ *pour tout* $(r, c) \in I$.

(*a*) *Soit* $p > 0$. *La norme du multiplicateur de Fourier relatif* ϱ *sur* $\mathrm{L}^p_\Lambda(\tau)$ *est le supremum de la norme du multiplicateur de Schur relatif* φ *sur des sous-espaces de matrices de Toeplitz tronquées dans* S^p_I.

(*b*) *De plus, la norme complète du multiplicateur de Fourier relatif* ϱ *sur* $\mathrm{L}^p_\Lambda(\tau)$ *et la norme complète du multiplicateur de Schur relatif* φ *sur* S^p_I *sont égales.*

(*c*) *La norme du multiplicateur de Fourier relatif* ϱ *sur* $\mathrm{L}^\infty_\Lambda(\tau)$ *et la norme du multiplicateur de Schur relatif* φ *sur* S^∞_I *sont égales.*

14 Ensembles lacunaires somme de deux ensembles infinis

Il est bien connu que les ensembles de Sidon ne peuvent contenir la somme de deux ensembles infinis ; Daniel Li a obtenu la même conclusion pour les ensembles Λ tels que C_Λ admet une suite approximante métriquement inconditionnelle. Nous rassemblons ces deux résultats dans le théorème suivant.

Théorème 14.1. *Soit* Γ *un groupe abélien discret de caractères sur un groupe abélien compact* G. *Soit* $\Lambda \subset \Gamma$. *Si* Γ *contient la somme* $R + C$ *de deux ensembles infinis* R *et* C, *alors l'espace* $\mathrm{C}_\Lambda(G)$ *n'admet pas de suite approximante inconditionnelle.*

Esquisse de preuve. On utilise l'hypothèse pour montrer qu'il existe des parties infinies R' et C' sur lesquelles une *somme à blocs sautés* $\sum(T_{k_{j+1}} - T_{k_j})$ agit comme la projection sur la « partie triangulaire supérieure » de $R' + C'$. Or ce multiplicateur de Fourier relatif se transfère en le multiplicateur de Schur qu'est la projection de *Riesz* sur les matrices triangulaires supérieures, qui est notoirement non bornée. □

Nous obtenons ainsi une preuve élémentaire que l'algèbre du disque $\mathrm{C}_\mathbb{N}(\mathbb{T})$ n'a pas la propriété d'approximation inconditionnelle, ni l'espace engendré par les fonctions de Walsh de longueur deux (les produits $\{r_i r_j\}$ de deux fonctions de Rademacher) dans $\mathrm{C}(\{-1, 1\}^\infty)$, ni l'espace engendré par les produits $\{s_i s_j\}$ de deux fonctions de Steinhaus dans $\mathrm{C}(\mathbb{T}^\infty)$.

Nous montrons aussi qu'un ensemble « complètement $\Lambda(p)$ » ne peut contenir la somme de deux ensembles infinis (proposition 4.8 de [16].)

La preuve ci-dessus montre aussi que la constante d'inconditionnalité réelle pour les espaces $\mathrm{L}^p_\Lambda(G)$ est minorée par la norme complète de la projection de Riesz sur S^p. Cela nous a motivés pour calculer cette norme et, à défaut, la norme complète de la transformation de Hilbert matricielle.

Théorème 14.2. *La norme complète de la projection de Riesz et de la transformation de Hilbert matricielle sur* S^p *coïncident avec leur norme.*

– *Si p est un entier pair, la norme de la transformation de Hilbert matricielle est* $\cot(\pi/2p)$.

– *La norme de la projection de Riesz sur* S^4 *est* $\sqrt{2}$.

15 Problèmes extrémaux pour les polynômes trigonométriques

Cette thématique de recherche correspond au cas de figure (a) de la question 1.1, avec $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ comme groupe abélien et le module maximum comme norme.

Soit $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ un ensemble de n entiers. Pour n nombres réels positifs $r_1, r_2, \ldots, r_n$ et n nombres réels $t_1, t_2, \ldots, t_n$, considérons le polynôme trigonométrique

$$f(x) = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1+\lambda_1 x)} + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_2+\lambda_2 x)} + \cdots + r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_n+\lambda_n x)}. \tag{5}$$

La question de l'inconditionnalité dans l'espace C des fonctions continues est alors celle de la dépendance du module maximum du polynôme trigonométrique f par rapport aux arguments (phases) $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Voici quatre problèmes qui éclairent divers aspects de l'inconditionnalité.

Problème extrémal 15.1 (problème de Mandelʹshtam complexe — voir [6, page 2 et le supplément])**.** Trouver le minimum du module maximum du polynôme trigonometrique f pour des modules de coefficients de Fourier $r_1, r_2, \ldots, r_n$ donnés :

$$\min_{t_1,t_2,\ldots,t_n} \max_x |r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1+\lambda_1 x)} + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_2+\lambda_2 x)} + \cdots + r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_n+\lambda_n x)}|.$$

Problème extrémal 15.2. Trouver le minimum du module maximum du polynôme trigonometrique f pour un spectre Λ, des arguments $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et la somme des modules $r_1+r_2+\cdots+r_n$ des coefficients de Fourier donnés :

$$\min_{r_1,r_2,\ldots,r_n} \max_x \frac{|r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1+\lambda_1 x)} + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_2+\lambda_2 x)} + \cdots + r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_n+\lambda_n x)}|}{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}.$$

Problème 15.3. Trouver le maximum de la variation du module maximum du polynôme trigonometrique f pour un spectre Λ et une variation des arguments $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$ donnée. En d'autres termes, trouver la norme du multiplicateur de Fourier relatif unimodulaire par les signes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta t_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta t_2}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta t_n}$:

$$\min_{\substack{r_1,r_2,\ldots,r_n \\ t_1,t_2,\ldots,t_n}} \frac{\max_x |r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1+\lambda_1 x)} + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_2+\lambda_2 x)} + \cdots + r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_n+\lambda_n x)}|}{\max_x |r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1+\Delta t_1+\lambda_1 x)} + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_2+\Delta t_2+\lambda_2 x)} + \cdots + r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_n+\Delta t_n+\lambda_n x)}|}.$$

Problème extrémal 15.4 (constante de Sidon)**.** Trouver le minimum du module maximum du polynôme trigonometrique f pour un spectre Λ et la somme des modules $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ des coefficients de Fourier donnés :

$$\min_{\substack{r_1,r_2,\ldots,r_n \\ t_1,t_2,\ldots,t_n}} \max_x \frac{|r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1+\lambda_1 x)} + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_2+\lambda_2 x)} + \cdots + r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_n+\lambda_n x)})|}{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}.$$

L'inverse de ce minimum est la constante d'inconditionnalité de Λ dans l'espace des fonctions continues : c'est la *constante de Sidon* de Λ.

Littlewood [10] et Salem [19] se sont intéressés à ces problèmes. Ils sont aussi apparus dans la théorie du circuit électrique, comme le raconte N. G. Chebotarëv : « L. I. Mandelʹshtam m'a communiqué un problème sur le choix des phases de courants électriques de fréquences différentes de sorte que la capacité du courant résultant de faire sauter les fusibles soit minimal » [5, p. 396]. Ce problème est une de ses motivations pour proposer une formule pour la valeur des dérivées directionnelles d'une fonction maximum en fonction des dérivées des fonctions dont on prend le maximum, qui a été un peu oubliée malgré son caractère naturel.

Formule de N. G. Chebotarëv ([6, Theorem VI.3.2, (3.6)])**.** *Soit I un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit K un espace compact. Soit $F(t,x)$ une fonction réelle sur $I \times K$ qui soit continue, ainsi que $\dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x)$. Soit*

$$F^*(t) = \max_{x \in K} F(t,x).$$

Alors $F^*(t)$ admet le développement limité suivant en tout $t \in I$:

$$F^*(t+h) = F^*(t) + \max_{F(t,x)=F^*(t)} \left\langle h, \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) \right\rangle + o(h). \tag{6}$$

Chebotarëv utilise en particulier cette formule pour résoudre le problème d'approximation polynomiale de Chebyshev et le problème du minimum d'une forme quadratique sur les entiers de Korkin et Zolotarev.

16 Problèmes extrémaux pour les trinômes trigonométriques

Ces problèmes sont déjà intéressants dans le cas $n = 3$. Dans l'article *The Sidon constant of sets with three elements*, nous avons résolu les problèmes extrémaux 15.1 et 15.4 pour ce cas. Nous allons supposer, en toute généralité, que Λ est un ensemble de trois entiers $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ tels que $\lambda_2 - \lambda_1$ et $\lambda_3 - \lambda_2$ sont premiers entre eux.

Il s'avère que les arguments t_1, t_2, t_3 d'un trinôme trigonométrique

$$f(x) = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1+\lambda_1 x)} + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_2+\lambda_2 x)} + r_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_3+\lambda_3 x)} \tag{7}$$

donnent lieu à un paramètre unique, que nous appellerons l'*argument du trinôme f* : la détermination principale $\tau \in]-\pi, \pi]$ de

$$(\lambda_3 - \lambda_2)t_1 + (\lambda_1 - \lambda_3)t_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)t_3 \bmod 2\pi\mathbb{Z}. \tag{8}$$

Nous avons ainsi établi que les arguments minimaux du problème extrémal 15.1 correspondent à des multiples de π :

Théorème 16.1. *Soit Λ un ensemble de trois entiers. Soient r_1, r_2 et r_3 trois réels strictement positifs. Les arguments t_1, t_2, t_3 résolvent le problème extrémal 15.1 si et seulement si l'argument τ du trinôme égale π. En particulier, t_1, t_2 et t_3 peuvent être choisis parmi 0 et π.*

Ce théorème permet de déterminer les coefficients de Fourier minimaux pour le problème extrémal 15.4 :

Proposition 16.2. *Le polynôme suivant résout le problème extrémal 15.4 :*

$$f(x) = \epsilon_1(\lambda_3 - \lambda_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_1 x} + \epsilon_2(\lambda_3 - \lambda_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_2 x} + \epsilon_3(\lambda_2 - \lambda_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_3 x}$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{-1, 1\}$ sont trois signes réels tels que

- *$\epsilon_1\epsilon_2 = -1$ si $\lambda_2 - \lambda_1$ est pair ;*
- *$\epsilon_1\epsilon_3 = -1$ si $\lambda_3 - \lambda_1$ est pair ;*
- *$\epsilon_2\epsilon_3 = -1$ si $\lambda_3 - \lambda_2$ est pair.*

La constante de Sidon de Λ égale donc $\cos(\pi/2(\lambda_3 - \lambda_1))^{-1}$ et les constantes d'inconditionnalité complexes et réelles de Λ dans l'espace des fonctions continues coïncident donc pour les ensembles Λ à trois éléments.

Nous avions entamé cette direction de recherche pour vérifier que les constantes d'inconditionnalité complexes et réelles d'un ensemble Λ étaient bien différentes ; les ensembles à trois éléments ne fourniront pas de contre-exemple et la question demeure ouverte.

En fait, les problèmes extrémaux 15.2 et 15.4 admettent une solution élémentaire : on ramène le trinôme trigonométrique à la forme « normale »

$$r_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau/(k+l)} + r_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx} \tag{9}$$

avec k et l positifs et premiers entre eux et $\tau \in \left]-\pi, \pi\right]$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\max_x \left|r_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau/(k+l)} + r_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}\right|}{r_1 + r_2 + r_3} &\geqslant \frac{\left|r_1 + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau/(k+l)} + r_3\right|}{r_1 + r_2 + r_3} \\ &= \sqrt{1 - \frac{4(r_1 + r_3)r_2}{(r_1 + r_2 + r_3)^2} \sin^2 \frac{\tau}{2(k+l)}} \\ &\geqslant \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\tau}{2(k+l)}} = \cos \frac{\tau}{2(k+l)},\end{aligned}$$

et si $r_1 : r_2 : r_3 = l : k + l : k$, le trinôme trigonométrique (9) atteint son module maximum en 0 et satisfait $r_1 + r_3 = r_2$.

17 Points extrémaux et points exposés de la boule unité de l'espace C_Λ

Si on cherche à résoudre les problèmes extrémaux 15.1, 15.2 et 15.4 par une application de la formule de Chebotarëv (6), il est utile d'obtenir des informations sur les points x tels que « $F(t, x) = F^*(t)$, » c'est-à-dire les points maximum de $F(t, \cdot) = |f|$. Par exemple, on peut déduire de cette formule qu'il y en a plus d'un car sinon (t, x) serait un point critique de F ; or un petit calcul (lemme 3.1 de [12]) montre que ce n'est pas possible.

Voici un argument d'analyse fonctionnelle qui démontre la même chose. Comme les problèmes ci-dessus sont linéaires, on peut limiter la recherche de polynômes trigonométriques extrémaux aux points exposés de la boule unité K de l'espace C_Λ (rappelons qu'un point P de K est exposé par un hyperplan H si H ne coupe K qu'en P.) Pourquoi un point exposé P de K atteint-il son module maximum en au moins deux points ? parce que la forme linéaire qui définit l'hyperplan H s'étend en une mesure μ qui atteint sa norme sur P et on sait que P doit être de module maximum sur le support de μ ; la mesure μ n'est pas une masse de Dirac puisqu'elle atteint sa norme uniquement en P, de sorte que le support de μ a au moins deux points.

Dans l'article *The maximum modulus of a trigonometric trinomial*, nous obtenons une description très complète des points de module maximum d'un trinôme trigonométrique (voir le théorème 7.1 de [15]) dont voici le point saillant.

Théorème 17.1. *Soit Λ un ensemble de trois entiers $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ tels que $\lambda_2 - \lambda_1$ et $\lambda_3 - \lambda_2$ soient premiers entre eux. Soient r_1, r_2, r_3 trois réels strictement positifs. Le trinôme trigonométrique*

$$f(x) = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1 + \lambda_1 x)} + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_2 + \lambda_2 x)} + r_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_3 + \lambda_3 x)}$$

atteint son module maximum en un point unique modulo 2π, de multiplicité 2, sauf si son argument τ égale π : Si f atteint son module maximum en deux points modulo 2π, c'est parce que son graphe admet un axe de symétrie.

Esquisse de démonstration. On ramène le trinôme trigonométrique f à la forme normale (9) avec de plus $\tau \in [0, \pi]$ et on montre alors que f doit atteindre son module maximum sur le petit intervalle $[-\tau/k(k+l), \tau/l(k+l)]$ en trouvant, pour tout y hors de cet intervalle, un point x qui y soit pour lequel $|f(x)| \geqslant |f(y)|$. De plus, on peut rendre cette inégalité stricte sauf si $\tau = \pi$. Il reste alors à étudier les variations de $|f|$ sur $[-\tau/k(k+l), \tau/l(k+l)]$. $\square$

La formule de Chebotarëv donne alors une nouvelle solution pour le problème extrémal 15.1.

Proposition 17.2. *Le module maximum de $r_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau/(k+l)} + r_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}$ est une fonction strictement décroissante de τ sur $[0, \pi]$.*

Démonstration. Restons dans le contexte de l'esquisse de démonstration ci-dessus et soit $\tau \in \left]0, \pi\right[$. Soit x^* l'unique point de module maximum pour f : on a vu que $x^* \in [-\tau/k(k+l), \tau/l(k+l)]$. Mais alors

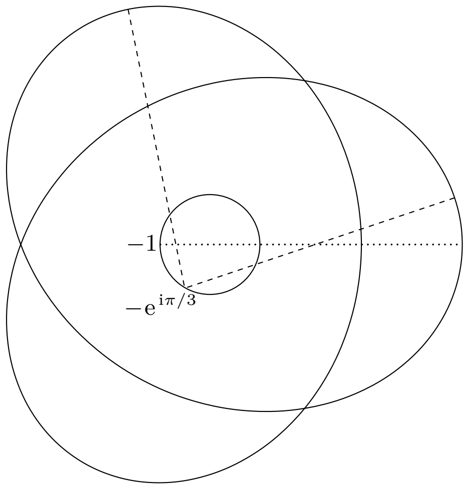
$$|f(x)|^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2r_1 r_3 \cos\bigl((k+l)x\bigr) + 2r_2\bigl(r_1 \cos(\tau/(k+l) + kx) + r_3 \cos(\tau/(k+l) - lx)\bigr)$$

et

$$\frac{k+l}{2r_2}\frac{\partial|f|^2}{\partial\tau}(x^*) = -r_1\sin(\tau/(k+l)+kx^*) - r_3\sin(\tau/(k+l)-lx^*) < 0$$

car $\tau/(k+l)+kx^* \in [0,\tau/l]$ et $\tau/(k+l)-lx^* \in [0,\tau/k]$ ne s'annulent pas simultanémanent. □

Illustrons notre propos : le module maximum de $f(x) = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est la distance maximum de points de l'hypotrochoïde d'équation $z = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ à un point donné $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ du plan complexe. Nous avons donc montré que si deux points de H sont simultanément à distance maximum de $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, alors $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est sur un axe de symétrie de H, c'est-à-dire $t \equiv \pi/3 \bmod 2\pi/3$.



Notre étude aboutit au théorème suivant, dont on peut espérer une généralisation à des ensembles Λ plus grands.

Théorème 17.3. *Soit Λ un ensemble à trois éléments. Soit K la boule unité de l'espace C_Λ et soit $P \in K$.*

- *Le point P est un point exposé de K si et seulement si P est un monôme trigonométrique $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \Lambda$ ou un trinôme trigonométrique qui atteint son module maximum, 1, en deux points modulo $2\pi/d$. Toute forme linéaire sur C_Λ atteint sa norme en un point exposé de K.*
- *Le point P est un point extrémal de K si et seulement si P est un monôme trigonométrique $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \Lambda$ ou un trinôme trigonométrique tel que $1-|P|^2$ a quatre zéros modulo 2π, comptés avec leur multiplicité.*

18 La variation du module maximum en fonction de l'argument

Nous utilisons aussi la formule de Chebotarëv pour montrer que le module maximum d'un trinôme trigonométrique est une fonction décroissante de la valeur absolue $|\tau|$ de son argument (voir (8)) et pour borner cette décroissance. Nous obtenons les inégalités suivantes.

Théorème 18.1. *Soit f un trinôme trigonométrique comme en (7) et varions ses arguments de $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$. Notons $\tilde f$ le trinôme qui en résulte, $\tilde\tau$ l'argument du trinôme $\tilde f$, et $\Delta\tau$ la variation de l'argument :*

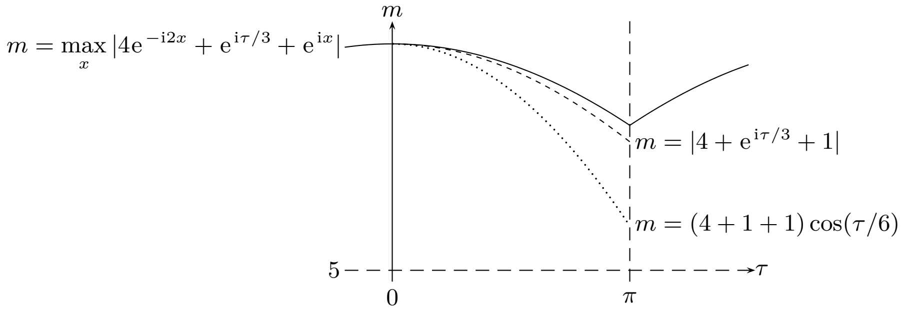
$$\Delta\tau \equiv (\lambda_3-\lambda_2)\Delta t_1 + (\lambda_1-\lambda_3)\Delta t_2 + (\lambda_2-\lambda_1)\Delta t_3 \mod 2\pi\mathbb{Z}.$$

Si $|\tilde\tau| > |\tau|$, *alors*

$$\begin{aligned}
\max_x|\tilde f(x)| < \max_x|f(x)| \\
&\leqslant \frac{|r_1 + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau/|\lambda_3-\lambda_1|} + r_3|}{|r_1 + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde\tau/|\lambda_3-\lambda_1|} + r_3|}\max_x|\tilde f(x)| \qquad (10)\\
&\leqslant \frac{\cos(\tau/2(\lambda_3-\lambda_1))}{\cos(\tilde\tau/2(\lambda_3-\lambda_1))}\max_x|\tilde f(x)| \qquad (11)\\
&\leqslant \frac{\cos((\pi-|\Delta\tau|)/2(\lambda_3-\lambda_1))}{\cos(\pi/2(\lambda_3-\lambda_1))}\max_x|\tilde f(x)|; \qquad (12)
\end{aligned}$$

l'inégalité (10) *est une égalité si et seulement si* $r_1 : r_3 = \lambda_3 - \lambda_2 : \lambda_2 - \lambda_1$*, l'inégalité* (11) *si et seulement si* $r_1 : r_2 : r_3 = \lambda_3 - \lambda_2 : \lambda_3 - \lambda_1 : \lambda_2 - \lambda_1$ *et l'inégalité* (12) *si et seulement si de plus* $\tau = \pi$*. La norme du multiplicateur de Fourier relatif unimodulaire par les signes* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta t_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta t_2}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta t_n}$ *est donc le facteur dans l'inégalité* (12)*.*

En particulier, le module maximum de f comme fonction de τ admet les deux minorants $|r_1 + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau/|\lambda_3-\lambda_1|} + r_3|$ et $(r_1 + r_2 + r_3)\cos(\tau/2(\lambda_3 - \lambda_1))$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Illustrons-le dans le cas particulier $f(x) = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau/3} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$:



19 Problèmes extrémaux pour les quadrinômes trigonométriques

Dans le cas $\Lambda = \{0, 1, 2, 3\}$, le problème extrémal 15.4 est un problème ouvert posé par Harold S. Shapiro en 1951. Par des moyens heuristiques, nous avons conjecturé que les polynômes extrémaux sont de la forme

$$\frac{\mathrm{i}2\sqrt2\cos u - 1 - 3\sin u}{15} + \frac{3+\sin u}{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \frac{3-\sin u}{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \frac{\mathrm{i}2\sqrt2\cos u - 1 + 3\sin u}{15}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}$$

où u parcourt $[0, 2\pi[$. Ces polynômes sont étudiés dans la note *On the Sidon constant of* $\{0, 1, 2, 3\}$. On en déduirait que la constante de Sidon de Λ vaut $5/3$, qui est sa constante d'inconditionnalité réelle (voir la proposition 5.4 de cette note.) Il s'agit de le démontrer et d'étudier plus généralement les polynômes trigonométriques à quatre termes dont le module atteint son maximum en trois points.

Références

[1] William Banks, Asma Harcharras, Stefan Neuwirth et Éric Ricard : Matrix inequalities with applications to the theory of iterated kernels. *Linear Algebra Appl.*, 362:275–286, 2003. (p. 8).

[2] T. Beth, D. Jungnickel et H. Lenz : *Design theory.* Cambridge University Press, seconde édition, 1999. (p. 6).

[3] J. A. Bondy et M. Simonovits : Cycles of even length in graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 16:97–105, 1974. (p. 4).

[4] P. G. Casazza et N. J. Kalton : Notes on approximation properties in separable Banach spaces. *In* P. F. X. Müller et W. Schachermayer, éditeurs : *Geometry of Banach spaces (Strobl, 1989)*, London Math. Soc. Lect. Notes 158, pages 49–63. Cambridge Univ. Press, 1991. (p. 8).

[5] Nikolaĭ Grigor′evich Chebotarëv : Kriterii minimaksa i ego prilozheniya. *In Sobranie sochineniĭ. Vol. 2*, pages 396–409. Izdatel′stvo Akademii Nauk SSSR, 1949. (p. 10).

[6] Vladimir F. Dem′yanov et Vassili N. Malozëmov : *Introduction to minimax*. Halsted Press, 1974. (p. 10).

[7] G. Godefroy, N. J. Kalton et P. D. Saphar : Unconditional ideals in Banach spaces. *Studia Math.*, 104:13–59, 1993. (p. 8).

[8] Asma Harcharras : Fourier analysis, Schur multipliers on S^p and non-commutative $\Lambda(p)$-sets. *Studia Math.*, 137(3):203–260, 1999. (p. 4).

[9] Shlomo Hoory : The size of bipartite graphs with a given girth. *J. Combin. Theory Ser. B*, 86(2):215–220, 2002. (p. 6).

[10] John Edensor Littlewood : A theorem on power series. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 23:94–103, 1925. (p. 10).

[11] Adolf Mader et Otto Mutzbauer : Double orderings of (0,1)-matrices. *Ars Combin.*, 61:81–95, 2001. (p. 6).

[12] Stefan Neuwirth : The Sidon constant of sets with three elements. `http://arxiv.org/abs/math/0102145`, 2001. (p. 12).

[13] Stefan Neuwirth : The size of bipartite graphs with girth eight. `http://arxiv.org/math/0102210`, 2001. (pp. 6 et 8).

[14] Stefan Neuwirth : Cycles and 1-unconditional matrices. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 93(3):761–790, 2006. (pp. 2, 5 et 7).

[15] Stefan Neuwirth : The maximum modulus of a trigonometric trinomial. *J. Anal. Math.*, 104:371–396, 2008. (p. 12).

[16] Stefan Neuwirth et Éric Ricard : Transfer of Fourier multipliers into Schur multipliers and sumsets in a discrete group. *Canad. J. Math.*, 63(5):1161–1187, 2011. (p. 9).

[17] A. Pełczyński et P. Wojtaszczyk : Banach spaces with finite dimensional expansions of identity and universal bases of finite dimensional subspaces. *Studia Math.*, 40:91–108, 1971. (p. 8).

[18] Walter Rudin : Trigonometric series with gaps. *J. Math. Mech.*, 9(2):203–228, 1960. (p. 3).

[19] Raphaël Salem : Sur les propriétés extrémales de certains polynomes trigonométriques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 196:1776–1778, 1933. (p. 10).

[20] H. van Maldeghem : *Generalized polygons*. Birkhäuser Verlag, 1998. (p. 6).