John von Neumann: Mathématiques pures et mathématiques appliquées

Stefan Neuwirth

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce mémoire est de décrire le cheminement du travail de John v. Neumann et d'en déceler les ruptures et les continuités. La *rupture*, c'est le théorème de Gödel, qui a définitivement interrompu en 1931 sa recherche d'un fondement des mathématiques. La *continuité*, c'est l'emploi de la méthode axiomatique dans ses découvertes fulgurantes dans le domaine des *mathématiques appliquées*.

Qu'est-ce qui le prédisposait à ces découvertes ? Quels étaient ses maîtres ? Un jour, il a confié à son collègue Raoul Bott n'avoir connu qu'un seul grand mathématicien, David Hilbert. Ce dernier a marqué plus que tout autre la recherche mathématique dans l'Allemagne de l'entre-deux-guerres. Il a formulé dans sa célèbre allocution au congrès international des mathématiciens de 1900 les deux problèmes qui détermineront les enjeux du travail de v. Neumann : dans sa liste des vingt-trois problèmes les plus urgents et les plus prometteurs, le *deuxième* concerne la non-contradiction des axiomes de l'arithmétique et le *sixième* propose le traitement mathématique des axiomes de la physique.

Dans un sens, v. Neumann a épousé les idées de Hilbert tout au long de sa vie. Il a dirigé ses plus gros efforts vers l'établissement d'une axiomatique optimale — exhaustive et efficace — qui servirait de base à l'ensemble des mathématiques et a tenté de résoudre le deuxième problème. Mais son enthousiasme et son engagement pour un « fondement formaliste des mathématiques » sont brutalement retombés avec la découverte de l'incomplétude de l'arithmétique, dont il a d'ailleurs été le premier à tirer les conséquences.

Son intérêt pour les mathématiques appliquées ne s'est, en revanche, jamais estompé : après avoir été initié aux problèmes de la physique mathématique lors de son séjour à Göttingen, il leur a consacré les plus originales de ses recherches dans les domaines appliqués les plus divers. Le formalisme mathématique de la mécanique quantique, la théorie des jeux et des modèles économiques, l'informatique théorique gardent à ce jour la profonde empreinte de ses travaux. Ces applications ont été pour lui, en retour, la source constante d'inspiration de mathématiques même très abstraites.

Une étude approfondie du style mathématique de v. Neumann dans ses premières recherches peuvent permettre de comprendre sa propre perception de l'objet des mathématiques. Nous chercherons à voir comment ce style et les méthodes à l'œuvre dans ses travaux en axiomatique et en théorie de la démonstration persistent dans ses recherches en mathématiques appliquées. De même, nous tenterons d'étudier la matière même du travail de v. NEUMANN : pour cela, il convient de le situer par rapport à ses contemporains et d'analyser les démonstrations qu'il donne.

1.1 Mathématiques pures et appliquées

Entre le début de sa carrière et l'établissement du théorème de GÖDEL, v. NEUMANN publia trente-six articles, dont quinze en mathématiques classiques — théories des nombres, de la mesure, des groupes de LIE et spectrale —, huit sur le fondement des mathématiques — axiomatique et théorie de la démonstration — et treize en mathématiques appliquées — théorie des jeux, mécanique quantique et théorie ergodique. Cette classification n'est pas étanche, puisque la théorie spectrale des opérateurs est directement inspirée des problèmes de mécanique quantique. De même, les problèmes de théorie de la mesure sont très liés à la théorie des ensembles et plus particulièrement à l'axiome du choix. En troisième lieu, l'objectif d'un fondement des mathématiques est de plus transposé aux sciences appliquées.

1.1.1 Mathématiques pures

Parmi les articles dont l'étude concerne uniquement les objets mathématiques eux-mêmes, nous négligerons les travaux en mathématiques classiques pour nous concentrer sur ceux qui s'attellent à un fondement des mathématiques. Ils ont joué un rôle déterminant dans la formation du jeune mathématicien : sa thèse est consacrée à une nouvelle axiomatisation de la théorie des ensembles et on garde trace de ses contacts précoces avec HERMANN WEYL et ADOLF FRAENKEL. Ils illustrent ses vues sur le statut des objets mathématiques et sur la notion de vérité.

Il a lui-même avoué dans son texte *Le mathématicien* [Neu47][1] combien les questions de fondement des mathématiques ont conditionné ses conceptions. Il y rappelle les épisodes passées de la polémique : les paradoxes de la théorie des ensembles, la critique intuitionniste, le programme de HILBERT, le théorème de GÖDEL et finalement une attitude pragmatique largement partagée (« si on était prêt à accepter les sciences, on pouvait tout autant accepter le système classique des mathématiques ») et assure qu'elle

> constitue la meilleure caution contre la tentation de croire en une rigueur immuable des mathématiques. Elle se déroula au cours de notre propre vie, et je sais moi-même avec quelle facilité humiliante mes propres opinions concernant la vérité mathématique absolue changèrent au cours de ces épisodes, et comment elles changèrent trois fois de suite.

[1] La bibliographie se trouve rassemblée à la fin du mémoire.

Mais nous chercherons moins à traquer les professions de foi épistémologiques dans ces travaux, parce qu'il semble qu'elles n'étaient pas le moteur déterminant de son travail. Son enthousiasme portait sur les techniques *mathématiques* à l'œuvre en axiomatique et en théorie de la démonstration. Ainsi, tant ses avis sur des questions mathématiquement précises sont pertinents — son article de 1925 [Neu25] contient déjà des réserves sur la catégoricité éventuelle de systèmes axiomatiques — tant ses idées philosophiques ont peu de conséquences sur la matière de son travail et aboutissent, comme le note Jean Cavaillès, à un cul de sac.

> Au moins pour le formalisme radical tel que le présentait v. Neumann, le résultat de Gödel est décisif : si la mathématique reçoit sa validité objective de sa représentation comme système ou collection de systèmes de signes dépourvus de tout autre sens que ceux que leur confèrent règles de structure et règles de déduction, avec l'impossibilité d'une preuve de non contradiction, l'édifice s'écroule ; c'est la notion de démonstration formelle qui donnait son unique signification au système et qui n'est plus précisable. [Cav37]

Nous accorderons donc une place plus particulière au contenu et au style *mathématiques* de trois articles datés des années vingt. Le premier, *Au sujet de l'introduction des nombres transfinis* [Neu23], formalise la notion d'ordinal au niveau même des ensembles. Le deuxième, *Une axiomatisation de la théorie des ensembles* [Neu25], expose un nouveau système axiomatique dont la pièce centrale est un axiome qui trace la frontière entre ensembles non contradictoires et « domaines » sujets à contradiction. Le troisième, *Au sujet de la théorie hilbertienne de la démonstration* [Neu27], cherche à fonder les mathématiques formelles sur des bases finitistes.

Nous décrivons finalement la réception du théorème de Gödel par v. Neumann. On sait qu'il accepta immédiatement cette remise à plat de plusieurs années de travail et qu'il joua un rôle dans sa diffusion rapide. En guise de conclusion, nous rendons compte des avis de Arend Heyting et de Jean Cavaillès sur l'œuvre de v. Neumann.

1.1.2 Mathématiques appliquées

Nous passons alors à l'étude de ses travaux en mathématiques appliquées. Nous commençons par une analyse du rôle de Hilbert dans le développement de la méthode axiomatique dans les sciences empiriques. Par ce biais, v. Neumann s'intéressa aux structures mathématiques de la mécanique quantique, qui à cette époque restait hypothéquée par un usage non justifié des fonctions δ de Dirac : il eut alors l'idée d'utiliser le formalisme des espaces de Hilbert et, comme l'écrit Léon Van Hove [Van58],

> Les structures mathématiques de la théorie ont été développées, et les aspects formels de ses lois d'interprétation entièrement nouvelles ont été analysés par un seul homme en deux ans (1927–1929). Inversement, on pourrait presque dire par réciprocité, la mécanique quantique a introduit v. Neumann dans un domaine de recherche mathématique, la théorie des opéra-

teurs, dans lequel il réalisa certains de ses plus beaux succès.

Nous étudions deux articles de v. Neumann en mathématiques appliquées, tout en gardant constamment en mémoire la prédilection qu'il a développée pour la méthode axiomatique et la mise en forme mathématique de problèmes. Face à la multiplicité des sujets auquels v. Neumann a touchés, nous nous bornons aux jeux et à l'économie. *Au sujet de la théorie des jeux de société* inaugure un nouveau sujet de recherche par la clarté de son exposition et la généralité de ses applications, quand bien même Émile Borel l'a précédé avec quelques développements mathématiques très intéressants. Nous analysons longuement la preuve de v. Neumann de la détermination des jeux, exprimée par le théorème du *minimax*.

L'article *Sur un équilibre économique et une géneralisation du théorème du point fixe de Brouwer* a engendré une révolution en macroéconomie. Nous en expliquons en détail la genèse, car elle montre la fertilité des thèses de Hilbert dans des domaines pourtant très éloignés des mathématiques. Nous traitons avec précision les rapports entre les deux articles.

Nous concluons avec quelques remarques sur le travail d'un des grands mathématiciens de ce siècle.

Chapitre 2

Biographie sommaire

2.1 Jeunesse

John v. Neumann est né en 1903 à Budapest. Élève d'un des collèges d'élite de cette ville, le « Lutheranisches Gymnasium », il y est remarqué très tôt pour ses facultés en mathématiques : des professeurs d'université comme Lipót Fejér et Gabor Szegö lui donnent des leçons particulières. Il publie son premier article, écrit avec Michael Fekete, en 1922 [FN22]. Malgré ses aptitudes, son père le convainc de suivre une formation de chimiste pour des raisons alimentaires : les débouchés sont bien plus nombreux dans ce métier-là. Il fait ses études à l'étranger, à l'instar de beaucoup d'étudiants hongrois : deux années à l'université de Berlin et quatre à l'Eidgenössische Technische Hochschule de Zürich. Il y rencontre Hermann Weyl, qu'il lui arrive même de remplacer pendant un semestre dans son cours sur l'axiomatique ! Parallèlement, il fait une thèse en mathématiques à l'université de Budapest sous la direction de Lipót Fejér, mais n'assiste pas aux cours et passe seulement les examens. Sa thèse, publiée en 1928 dans la *Mathematische Zeitschrift* [Neu28a], correspond à son intérêt déjà ancien pour les questions de fondement des mathématiques et porte probablement l'empreinte de ses contacts avec Erhard Schmidt à Berlin, un ami d'Ernst Zermelo. En cherchant à la publier, il entre en relation avec Adolf Fraenkel à Marburg.

2.2 Aux universités allemandes

Après avoir achevé son doctorat à Budapest et être devenu ingénieur à Zürich, il devient le plus jeune mathématicien à avoir jamais été nommé privatdozent. Il exerce cette charge de 1927 à 1929 à Berlin puis sera nommé à Hambourg en 1929. Toutefois, dès 1926, il trouve à l'institut mathématique de Göttingen l'environnnement mathématique et l'effervescence scientifique qui lui conviennent. Cet institut jouit, grâce aux efforts de Felix Klein, de David Hilbert et de Richard Courant, d'une très grande renommée internationale. Plus précisément, la présence du chef de file des « formalistes » a dû lui rendre ce passage indispensable. Il y assiste aux cours de WERNER HEISENBERG sur la mécanique quantique et passe de longues après-midis à discuter avec HILBERT. C'est la période la plus fertile de sa carrière.

2.3 À Princeton

En 1930, il fait un premier séjour à Princeton comme professeur invité à la chaire de physique mathématique. Le manque de charges de professeur en Allemagne et une perception aiguë des changements politiques en Europe le décident à y accepter une chaire permanente en 1931. En 1933, il est nommé à l'*Institute of Advanced Studies* (IAS) nouvellement créé, qui regroupera HERMANN WEYL, ALBERT EINSTEIN, KURT GÖDEL et bien d'autres. En 1939, il rencontre l'économiste autrichien OSKAR MORGENSTERN qui ravive son intérêt pour la théorie des jeux. Leur collaboration mène à l'ouvrage *Théorie du jeu et comportement économique* [NM44].

Avec l'arrivée de la deuxième guerre mondiale, il s'engage de plus en plus dans les programmes militaires comme celui de la bombe atomique à Los Alamos. Les questions de mécanique des fluides qu'ils soulèvent le poussent à s'intéresser au calcul mécanique de solutions d'équations aux dérivées partielles. Il dirige de 1945 à sa mort le *Electronic computer project* de l'IAS et publie des travaux fondamentaux en informatique théorique. Il participe à nombre de commissions gouvernementales qui jouent un rôle dans la politique de défense et de recherche de l'après-guerre : la plus célèbre est la Commission à l'Énergie Atomique créée par le général Eisenhower pour le conseiller dans l'utilisation — dissuasive — de la bombe, où il siège d'octobre 1954 jusqu'à sa mort en 1957.

Chapitre 3

Les travaux en fondement des mathématiques

3.1 *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*

3.1.1 Historique

Au sujet de l'introduction des nombres transfinis [Neu23] est le premier article que v. NEUMANN a publié sur la théorie des ensembles et en même temps le deuxième de sa carrière. Il propose la première définition moderne des ordinaux — on les a d'ailleurs longtemps nommés les « ordinaux de v. NEUMANN ». Mais lui-même apprend ultérieurement qu'ERNST ZERMELO a eu la même idée auparavant, sans toutefois avoir pu démontrer rigoureusement le théorème fondamental : *tout ensemble bien ordonné est isomorphe à un ordinal.*

L'idée même de v. NEUMANN rend compte de sa perception de la nature des objets mathématiques. Il s'agit de reconstruire *au sein même* des ensembles la notion d'ordinal. Dans la théorie « naïve », c'était une entité à part, définie comme l'abstraction d'une certaine propriété à partir de classes d'ensembles bien ordonnés. Citons la définition originelle de GEORG CANTOR :

> On associe à tout ensemble bien ordonné M un type d'ordre défini comme le concept général qui s'obtient à partir de M en faisant abstraction de la constitution de ses éléments m tout en conservant leur ordonnancement. [Can95]

Le but affirmé de v. NEUMANN est de « saisir le concept de nombre ordinal de CANTOR de manière univoque et concrète » : ainsi, les ensembles, objets d'un intérêt pourtant récent, deviennent la *matière concrète* du travail mathématique. En rejetant les formulations de CANTOR, qui font appel à l'entendement et à l'interprétation, en rabattant toutes les notions sur le domaine fondamental des ensembles, il atteint *l'univocité* qu'il recherche. En fait, en précisant ainsi la nature des ordinaux, il les rend tout d'abord accessibles aux questions mathématiques rigoureuses d'existence et d'unicité.

De plus, il arrive à fournir une construction suffisamment élémentaire qu'on puisse l'intégrer dans toute axiomatique « formaliste » des ensembles — tel est le mot qu'utilise v. NEUMANN lui-même, au lieu de l'adjectif plus neutre « formel ». De fait, toute l'introduction du texte est écrite comme un manifeste en faveur de la rigueur nouvelle de la méthode axiomatique. Ainsi, v. NEUMANN se rend bien compte que la formalisation des procédés de CANTOR provoque une mutation profonde de la nature des objets mathématiques. Il semble estimer qu'ils en deviennent plus concrets : la matière se précise... mais peut-être pas le sens.

Après avoir expliqué que son idée est de fonder le nombre ordinal par ce qui est habituellement un théorème : « tout nombre ordinal est le *type* de l'ensemble de tous ses nombres ordinaux précédents », il élimine la référence à un type et voudrait définir l'ordinal comme étant lui-même « l'ensemble de tous les nombres ordinaux qui le précèdent ».

3.1.2 Le style de l'article

Cet article est écrit dans un style fruste qui se retrouvera dans les autres textes de v. NEUMANN. Le contenu mathématique est par contre d'une précision recherchée qui s'est prémunie contre toute critique ultérieure. Les commentaires sont soigneusement séparés des démonstrations. Ils n'ont jamais de contenu proprement philosophique : ils balisent le contexte mathématique de chaque résultat et ne prétendent pas être plus qu'une aide provisoire d'interprétation. Il y a très peu de références à d'autres travaux. Ainsi, précision et concision se rejoignent et le développement des théories et démonstrations mathématiques est le seul juge des propos qui les introduisent. Il ne s'agit jamais de saisir le sens d'une théorie, qui lui est externe, mais d'étudier *l'efficacité* des méthodes développées.

Dans l'article considéré, l'argument est développé de manière parfaitement linéaire et sans à-coups. Les démonstrations ne reposent sur aucun résultat extérieur à l'article. Il écrit lui-même qu'il va « procéder de manière strictement formaliste, éviter partout les symboles comme "..." ».

Le travail essentiel de v. NEUMANN aura été le découpage judicieux et méticuleux du problème en une série de questions dont les réponses sont faciles. Soit E un ensemble bien ordonné par $\prec$. Une fonction f définie sur E vérifiant

$$f(x) = \{f(y);\, y \prec x\} \text{ pour tout élément } x \text{ de } E$$

est appelée un *comptage*. Il en démontre *l'unicité*, ce qui lui permet de définir une notion univoque de nombre ordinal associé à E en posant

$$NO(E) = \{f(x);\, x \in E\}.$$

Il démontre que le comptage d'un ensemble est caractérisé par celui de tous ses segments $S_x = \{y \in E;\, y \prec x\}$. C'est alors seulement qu'il est en mesure de démontrer *l'existence* d'un comptage pour tout ensemble bien ordonné. Dès lors, il reconstruit l'ensemble des propriétés élémentaires des ordinaux pour la définition qu'il leur a donnée.

3.2 *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*

3.2.1 Historique

L'idée même d'une axiomatique remonte aux *Éléments* d'Euclide, qui expose la géométrie comme un ensemble d'axiomes, de définitions et de démonstrations déductives. Cette tradition est restée vivante au cours des siècles, mais l'idée d'axiomatiser les autres parties des mathématiques et même les autres sciences s'est dégagée clairement avec le livre-événement de David Hilbert, *Fondements de la géométrie* [Hil99]. Une des innovations de Hilbert est particulièrement étonnante, comme le montre la réaction de Gottlob Frege [Fre76] : les objets fondamentaux dont traite la théorie ne sont plus définis — les axiomes décrivent uniquement les relations qu'il peut y avoir entre eux. La nécessité d'une démonstration de non-contradiction fera l'objet de la section suivante.

L'idée d'axiomatiser la théorie des ensembles était, comme que l'explique Adolf Fraenkel, tout à fait naturelle au début du 20ᵉ siècle pour deux raisons. Une axiomatique semblait nécessaire pour éviter les contradictions issues d'une définition intuitive de l'objet fondamental de la théorie : chaque axiome préciserait les formations d'ensembles tolérées. Puis, comme tous les autres domaines des mathématiques pouvaient se formuler en termes d'ensembles, une bonne axiomatique permettrait de fournir une base pour chaque théorie particulière.

Ernst Zermelo a publié en 1908 [Zer08] la première axiomatisation susceptible de contenir toute la théorie des ensembles. À côté des travaux de Schoenflies [Sch21], une étape importante est franchie en 1921 avec l'article de Fraenkel [Fra22] qui reprend et affine le travail de Zermelo. L'axiomatique en est à ce point lorsque commence le travail de v. Neumann. L'article *Une axiomatisation de la théorie des ensembles* [Neu25] de 1925 a été proposé par Fraenkel lui-même à la publication dans le *Journal für Mathematik*, comme il le raconte :

> En 1922–23, lorsque j'étais professeur à l'université de Marburg, je reçus du professeur Erhard Schmidt à Berlin (de la part de la rédaction du *Mathematische Zeitschrift*) un long manuscrit d'un auteur à moi inconnu, Johann von Neumann, portant le titre *Die Axiomatisierung der Mengenlehre* et qui était sa future thèse de doctorat, qui n'apparut dans le *Zeitschrift* qu'en 1928. J'avais été prié de donner mon avis, puisqu'il semblait incompréhensible. Je ne prétends pas que je compris tout, mais assez pour voir que c'était un travail hors pair et de reconnaître *ex ungue leonem*. Pendant que je répondis dans ce sens, j'invitai le jeune étudiant à me visiter (à Marburg) et je discutai avec lui, lui recommandant fermement de préparer les bases d'un texte aussi technique par un texte plus informel qui soulignerait le nouveau point de vue sur le problème et ses conséquences fondamentales. Il écrivit un tel essai sous le titre *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*. [Ula58]

3.2.2 Description de l'article

Le but déclaré du travail de v. Neumann est de donner « une présentation axiomatique logiquement irréprochable de la théorie des ensembles ». Il reprend les grands événements des dernières décennies : alors que

> la théorie naïve des ensembles mène sans aucun doute à des paradoxes, il semblait qu'une partie délimitée de ses théorèmes soient exacts et fiables, et comme en plus une formulation moderne des mathématiques nécessitait un fondement ensembliste, les tentatives de « réhabilitation » de la théorie des ensembles n'ont pas manqué.

Il distingue alors deux grandes directions : il ne suivra pas la première, qui correspond aux travaux de Gyula Kőnig, Hermann Weyl et L. E. J. Brouwer, mais la seconde, poursuivie par Ernst Zermelo, Adolf Fraenkel et Arthur Schoenflies — il s'agit de l'approche axiomatique. « Le mot *ensemble* apparaît dans les postulats sans aucune signification » et désigne « un objet dont on ne sait pas plus et dont on ne veut pas plus savoir que ce qui s'ensuit des postulats ». Il pressent pourtant les travaux de Arend Heyting en écrivant que si son travail veut être « logiquement irréprochable » ce n'est pas au sens de l'intuitionnisme de Weyl et Brouwer. Or « cela serait assez aisément possible, bien que je ne le fasse pas : la méthode axiomatique est en contradiction avec l'essence de l'intuitionnisme ».

Il écrit :

> Le but de notre axiomatique est évidemment de produire toutes les constructions d'ensembles désirées par un nombre fini d'opérations purement formelles (dont la possibilité est justement garantie par les postulats). Mais il faut éviter les constructions d'ensembles par réunion ou extraction d'éléments etc., ainsi que le concept obscur de « définité », qui apparaît encore chez Zermelo.

3.2.2.1 Les fonctions jouent le rôle des ensembles

Adolf Fraenkel eut le premier l'idée de faire jouer aux fonctions le rôle que jouent habituellement les ensembles : certaines simplifications en résulteraient [Fra22]. V. Neumann porta cette approche à maturité dans [Neu25]. Il explique que

> Ce nouveau concept comprend évidemment l'ancien (plus précisément : les deux concepts sont parfaitement équivalents, puisque la fonction peut être vue comme ensemble de paires et l'ensemble comme fonction avec deux valeurs). La raison de cette variation par rapport au procédé habituel est que toute axiomatisation de la théorie des ensembles utilise le concept de fonction (axiome de compréhension, de remplacement) et il est alors formellement plus aisé de fonder le concept d'ensemble sur celui de fonction qu'inversement.

3.2.2.2 Fonctions et arguments

V. Neumann introduit des objets de première et de deuxième espèce, respectivement les arguments et les fonctions, ainsi que l'opération $[f\,x]$ d'application de la fonction f à l'argument x. Quoique v. NEUMANN ne le fasse pas dans cet article, il pourrait supposer que tout argument est une fonction : ce sera un des axiomes du système qu'il étudie dans [Neu29]. Par contre, l'inverse mènerait aux contradictions habituelles de la théorie des ensembles. Ainsi, on se rend compte que l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes n'est pas contradictoire en soi : seule l'application de l'opération $\in$ sur cet ensemble est problématique. Le point le plus original de cet article sera donc un axiome très puissant qui détermine de manière restrictive les fonctions qui sont aussi des arguments.

3.2.2.3 L'axiome de restriction

L'axiomatique de ZERMELO soulève quelques problèmes importants : tout d'abord, bien qu'elle permette d'éviter tous les paradoxes connus, la frontière qu'elle trace entre les ensembles dont l'existence est posée par les axiomes et les autres, sujets à contradictions, semble arbitraire : en effet, comme le dit ADOLF FRAENKEL,

> ce domaine de non-existence contient des concepts — particulièrement des ensembles très compréhensibles comme l'ensemble de tous les ensembles, l'ensemble de tous les ordinaux, etc...— qui peuvent conduire à des contradictions, non pas parce qu'ils sont perçus comme des ensembles (classes), mais en opérant sur eux, en particulier en les considérant comme éléments d'ensembles.

V. NEUMANN lui-même écrit que

> Une certaine part d'arbitraire est attachée aux choix des axiomes. Une certaine justification en est sûrement que si l'on prend le mot « ensemble », axiomatiquement dénué de sens, au sens cantorien, ces axiomes se transforment en propositions évidentes de la théorie naïve des ensembles. Mais ce qu'on soustrait à la théorie naïve des ensembles — et c'est justement cela qui est essentiel pour le contournement des axiomes — est obligatoirement arbitraire.

La parade que trouve v. NEUMANN provient justement de la distinction qu'il établit entre fonctions et arguments et qui correspond à la distinction plus usuelle entre classes et ensembles. Il introduit un axiome de restriction :

> Nous choisissons arbitrairement un « argument » A et déclarons pour l'essentiel que seules les fonctions a qui ne prennent pas trop souvent, c'est-à-dire pour trop d'arguments x, de « valeur » $[a\,x]$ différente de A, sont aussi des arguments. [...]
>
> Nous précisons alors ce « trop souvent » de la manière suivante : la « fonction » a ne sera pas un « argument » si et seulement si la totalité des arguments x pour lesquels $[a\,x] \neq A$ peut être appliquée sur la totalité des arguments tout court.

Bien sûr, les concepts comme « totalité » ou encore « fonction » sont ici utilisés de manière naïve. Mais « cela n'est fait que pour montrer le système ; lors de la formulation exacte, rien de tel ne se passera. »

GÖDEL a dit à ce sujet :

> Le grand intérêt de cet axiome vient du fait que c'est un principe du maximum, en quelque sorte similaire à l'axiome de complétude de HILBERT en géométrie. En effet, il dit à peu près que tout ensemble qui n'implique pas, dans un certain sens bien défini, de contradiction, existe. Le fait que c'est un principe du maximum explique aussi le fait qu'il entraîne l'axiome du choix. Je crois que les problèmes fondamentaux de la théorie abstraite des ensembles ne seront résolus qu'avec l'aide d'axiomes plus forts de *ce* genre, qui dans un certain sens s'opposent ou sont complémentaires à l'interprétation constructiviste des mathématiques. [Ula58]

3.2.2.4 La catégoricité

V. NEUMANN a été particulièrement lucide en ce qui concerne la catégoricité. Après avoir donné une nouvelle preuve du théorème de LÖWENHEIM et SKOLEM, et en avoir donné une explication plausible, il conclut de manière pessimiste :

> Après tout cela, il semble qu'aucune axiomatisation catégorique de la théorie des ensembles n'existe. [...] Et comme il n'y a pas de système axiomatique qui ne présuppose la théorie des ensembles, il n'y aura pas de systèmes axiomatiques infinis catégoriques. Ce fait me semble être un argument pour l'intuitionnisme.

3.3 *Zur Hilbertschen Beweistheorie*

3.3.1 Historique

Au sujet de la théorie hilbertienne de la démonstration [Neu27] a été écrit à la suite de l'article *Fondement du « tertium non datur » par la théorie hilbertienne de la non-contradiction* de WILHELM ACKERMANN [Ack24]. Tous deux cherchent à donner une preuve de non-contradiction de l'arithmétique grâce à la *théorie de la démonstration* de DAVID HILBERT. Celui-ci avait déjà exprimé en 1904 [Hil04] l'idée d'analyser les démonstrations comme des transformations d'expressions selon des règles mécaniques. Dès lors, les démonstrations devenaient elles-mêmes des objets d'investigation mathématique.

En 1922, pour contrer les attaques de HERMANN WEYL [Wey21], il proposait de « remplacer les raisonnements intuitifs habituels des mathématiques par des formules et des règles, autrement dit les traduire dans des formalismes » et définissait précisément l'objet de ce qu'il appela « une théorie de la démonstration » : « traiter des opérations que l'on peut effectuer sur les démonstrations elles-mêmes » et, par des raisonnements intuitifs, c'est-à-dire finitistes, « établir le caractère non-contradictoire des axiomes ».

Le but est de montrer que les éléments « idéaux » introduits par les axiomes, comme l'infini, pouvaient être éliminés des démonstrations [Hil26]. Comme les systèmes axiomatiques n'avaient plus de justification empirique, la non-contradiction était la sanction de l'existence des objets mathématiques dont ils traitaient.

3.3.2 Description de l'article

V. Neumann commence par des considérations générales : « tout l'appareil propositionnel et démonstratif de la mathématique classique doit être formalisé de la manière la plus rigoureuse. Le formalisme ne doit surtout pas être trop restrictif. » Il définit la non-contradiction par la démonstration de l'existence de formules non démontrables. Il retrace la différence établie par Hilbert entre démonstrations « formalistes » et « matérielles ».

3.3.2.1 Syntaxe

Il définit avec toute la précision qui s'impose le langage de sa théorie : d'abord des classes de signes simples — variables, constantes, opérations et abstractions. Ceux-ci sont dénués de sens « par principe » et ont seulement une analogie avec les symboles correspondants des mathématiques usuelles. Ils permettent de former l'ensemble des expressions mathématiques.

Les formules sont définies par récurrence à partir des signes simples. Chacune d'elles garde la trace de sa construction, de sorte que l'on peut décider de toute combinaison de signes si c'est une formule ou non — il existe essentiellement, à quelques permutations près, une seule manière de la construire. Contrairement à Hilbert et à Ackermann, v. Neumann ne distingue pas fonction et fonctionnelle : il s'agit à nouveau de tout rabattre sur un domaine fondamental — celui des signes — en évitant tout appel à quelque interprétation.

Les éléments de chaque étape de construction sont les « formules partielles », parfaitement définies. Si une formule ne contient pas de variable libre, c'est-à-dire non liée à une abstraction, on l'appelle formule normale. La définition est tellement générale qu'elle produit bon nombre de formules dénuées d'interprétation : mais c'est « un lest parfaitement bénin ».

Selon Arend Heyting [Hey34], v. Neumann décrit les signes et leur emploi de manière beaucoup plus précise qu'Ackermann. Pourtant, quand il définit les « Abänderungen », il commet des erreurs qui engendrent toute une polémique : v. Neumann se voit obligé de répondre aux critiques de St. Leśniewski [Leś29], ce qui conduit Adolf Lindenbaum [Lin31] à intervenir.

La notion de formule normale démontrable est elle aussi définie par récurrence :

1. Si a est un axiome, c'est une formule démontrable,
2. Si a et $a \Rightarrow b$ sont des formules démontrables, b est une formule démontrable,

mais les étapes de la construction ne laissent en général aucune trace ! La définition « permet seulement d'établir les formules normales démontrables, mais non obligatoirement de décider si une formule normale est démontrable ». v. Neumann précise que les mathématiciens procèdent ainsi, mais en étant guidées par certains points de vue heuristiques.

La question de la non-contradiction — il n'existe pas de formule a telle que a et $\sim a$ soient simultanément démontrables — est alors posée dans un cadre strictement intuitionniste : v. NEUMANN remarque que celle-ci n'entraîne pas que parmi a et $\sim a$, une des deux soit démontrable.

3.3.2.2 Les groupes de schémas d'axiomes

V. NEUMANN définit six groupes de schémas d'axiomes : les schémas de la logique, de l'égalité, des entiers naturels, des quantificateurs, de la fonction et des définitions. Chacun d'entre eux donne lieu à une infinité d'axiomes en substituant des formules aux symboles de formules et des variables aux symboles de variables.

Les schémas des entiers naturels sont très faibles : le schéma de récurrence est omis, car « il ne peut être formulé sans quantificateurs. Il a donc un caractère essentiellement non fini ». V. NEUMANN le construit plus loin à partir des autres schémas, sans pouvoir éviter qu'il échappe au domaine dont il établit la non-contradiction.

V. NEUMANN explique alors :

> L'édifice des mathématiques est menacé et exposé aux critiques des sceptiques en deux endroits : les concepts "tout" et d'"ensemble".

Les schémas des quantificateurs définissent le premier ; la *fonction* est le pendant du second. Le schéma crucial est donc celui de la fonction et correspond à l'axiome de séparation : il pose que *toute formule avec au plus une variable libre définit une fonction*.

Les schémas de définition ont pour seul but de permettre d'en faire. V. NEUMANN écrit : « les schémas d'axiomes précédents suffiraient en fait au fondement complet des mathématiques. Mais il leur manque ce moyen très confortable et habituel des mathématiques ».

V. NEUMANN développe alors une preuve de non-contradiction du système formé par les schémas de la logique, de l'égalité, des entiers naturels, des quantificateurs et des définitions. Mais seul le schéma de la fonction permet de passer à l'arithmétique du premier ordre, dont la non-contradiction n'est établie qu'en 1936 par GERHARD GENTZEN [Gen36] avec des moyens non finitistes.

3.3.2.3 Les valuations

Le principe de la démonstration a été appliqué en premier par GYULA KŐNIG [Kőn14] sur un système d'axiomes très restreint. Si on réussit à définir une valuation de toutes les formules normales en « vraies » et « fausses », qu'elles soient sensées ou même syntaxiquement mal construites, c'est-à-dire à définir deux classes $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ telles que

> 1. $\sim a$ est dans $\mathcal{V}$ si et seulement si a est dans $\mathcal{F}$,
> 2. $a \Rightarrow b$ est dans $\mathcal{V}$ si et seulement si a est dans $\mathcal{F}$ ou b est dans $\mathcal{V}$,
> 3. Si a est un axiome, a est dans $\mathcal{V}$,

alors la définition par récurrence des formules démontrables montre que a et $\sim a$ ne peuvent pas l'être simultanément.

Dans une première étape, v. NEUMANN établit une valuation du système engendré par les schémas de la logique, de l'égalité et des entiers naturels, ce qui est plutôt aisé. La deuxième étape consiste à faire de même pour le système augmenté des schémas des quantificateurs. Mais devant la difficulté de la tâche, il met en œuvre une idée qu'il attribue à HILBERT : en fait, une valuation de la totalité infinie des formules du système n'est pas nécessaire. Il suffit d'établir, pour chaque système fini d'axiomes S, une valuation partielle en classes $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ telle que

1. $\sim a$ est dans $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ si et seulement si a est dans $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$,
2. $a \Rightarrow b$ est dans $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ si et seulement si a est dans $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ ou b est dans $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$,
3. Si a est un axiome du système S, a est dans $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$.

En effet, si a et $\sim a$ se révèlent simultanément démontrables, on peut considérer le système fini S des axiomes dont ils dérivent. La valuation partielle mène alors à une contradiction.

V. NEUMANN définit finalement un procédé de réduction $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ des formules normales avec quantificateurs qui vérifie : toute formule normale est dans $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ ou dans $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ selon que sa réduite est dans $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{F}$. Ce procédé est construit sur une dizaine de pages, par récurrence sur la complexité des formules et le nombre de constantes. Il démontre en fait que l'itération finie de quantificateurs sur des formules matériellement vraies ou fausses ne rend pas le système contradictoire.

V. NEUMANN espère que cette méthode se généralise au système complété du schème de la fonction :

> Je crois cependant pouvoir exprimer la conjecture que la preuve [générale] de non-contradiction devra être réalisée par l'énoncé d'une valuation partielle, c'est-à-dire, respectivement d'un système de règles de réduction correspondant $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$.

Le théorème de GÖDEL sonnera le glas d'un tel espoir.

3.4 Conclusion

3.4.1 La réception du théorème de GÖDEL

V. NEUMANN a participé au « deuxième congrès sur la théorie de la connaissance des sciences exactes » à Königsberg du 5 au 7 septembre 1930. Il y a fait un exposé résumé dans [Neu31] et a assisté à la discussion sur le fondement des mathématiques à la fin du congrès. Lors de cette discussion [H^{+}31], GÖDEL annonce son théorème d'incomplétude.

> **Gödel :** [...] Cette conception [formaliste] présuppose que, lorsqu'on adjoint au système S des propositions matérielles le système T des propositions et axiomes transfinis et qu'on démontre une proposition de S en passant par le biais de propositions du système T, cette proposition est aussi matériellement vraie, c'est-à-dire que l'adjonction des axiomes transfinis ne rend démontrable aucune proposition matériellement fausse. On remplace communément cette exigence par celle de non-contradiction. Je voudrais attirer l'attention sur le fait qu'on ne peut pas considérer sans problème ces deux exigences comme équivalentes.

Or cette affirmation de GÖDEL correspond exactement à son théorème d'incomplétude ! Il explicite son propos.

> Car si dans un système formel A non contradictoire (par exemple celui des mathématiques classiques) une proposition matérielle p est démontrable avec l'aide des axiomes transfinis, il découle seulement de la non-contradiction de A que *non-p* n'est pas démontrable formellement *à l'intérieur* du système A. Il reste néanmoins imaginable que l'on puisse reconnaître *non-p* par une quelconque réflexion matérielle (intuitionniste) qui ne se laisse *pas* représenter formellement dans A. Dans ce cas, malgré la non-contradiction de A, une proposition dont on pourrait reconnaître la fausseté par des considérations finies serait démontrable dans A. [...] Car on ne peut prétendre avec sûreté d'aucun système formel que toutes les réflexions matérielles soient représentables en lui.

Or c'est là la réponse à une préoccupation que v. NEUMANN exprime un peu plutôt dans la même discussion, en réponse au membre du cercle de Vienne RUDOLF CARNAP. Celui-ci, dans ses remarques introductives, distingue bien non-contradiction et complétude, mais veut démontrer la première dès que la seconde est enfin atteinte. Alors

> Le problème de l'analyse logique de signification serait grandement facilité. Car, à mon avis, toute démonstration de non-contradiction contient ouvertement ou secrètement l'énonciation d'un modèle formel. (HILBERT lui-même a donné dans un cas précis un avis dans cette direction). Mais dans la construction d'un tel modèle, comme je crois, la signification logique des signes formalistes deviendrait visible.

V. NEUMANN lui répond alors que « si la démonstration hilbertienne de la non-contradiction est accomplie, il n'est pas sûr que cela donne une possibilité d'interprétation ». Il s'explique en se référant aux tentatives récentes de démonstration par valuation partielle, une technique qui lui paraît essentielle :

> On essaie donc de donner une possibilité d'interprétation pour des sous-ensembles du système. Le balancement éternel entre ces interprétations provisoires démontre que l'on aura des difficultés à arriver à une intreprétation définitive. On peut ainsi arriver à une démonstration de non-contradiction sans trouver d'interprétation pour les mathématiques. Je ne crois donc pas que la démonstration de la non-contradiction suffise.

Ainsi, v. NEUMANN sera le seul à réagir aux affirmations de GÖDEL selon lesquelles « il n'est pas établi que toutes les manières de déduire permises par l'intuitionnisme se laissent répéter de manière formaliste. » GÖDEL énonce alors son théorème. Juste après cette discussion, v. NEUMANN et GÖDEL ont eu un entretien particulier : en effet, le premier a sur-le-champ saisi la portée du résultat du second. Il a de plus immédiatement compris et accepté la démonstration du théorème et lui a même demandé si la proposition indécidable qu'il propose ne peut pas être simplifiée et relever de l'arithmétique. GÖDEL exprime son scepticisme, mais réussit, à sa propre surprise, à construire de telles propositions peu après. V. NEUMANN réussit alors indépendamment à dériver le deuxième théorème de GÖDEL, mais celui-ci l'avait déjà trouvé et inclus dans son article *Sur les propositions formellement indécidables de la Principia Mathematica et de systèmes apparentés* [Göd31], qui allait être publié.

3.4.2 L'avis de Jean Cavaillès et de Arend Heyting

Arend Heyting [Hey34] localise la différence entre les points de vue de v. Neumann et de Hilbert dans leur position vis-à-vis de l'exigence suivante de L. E. J. Brouwer [Bro28] :

> La reconnaissance que la justification (matérielle) des mathématiques formalistes par la démonstration de non-contradiction contient un cercle vicieux parce que cette justification repose sur la validité (matérielle) de l'assertion que de la non-contradiction d'un énoncé découle la validité de cet énoncé, c'est-à-dire sur la validité (matérielle) du tiers exclu.

Selon Heyting, « les formalistes radicaux comme v. Neumann » partagent cette opinion : ainsi, « une entente entre intuitionnisme et formalisme est parfaitement possible, en supposant qu'on prend le point de vue extrême formel-historique, comme l'a par exemple formulé v. Neumann ». Mais elle est en désaccord avec les conceptions de Hilbert et de la plupart de ses élèves : ceux-ci voient dans la démonstration de non-contradiction une sorte de justification matérielle du système axiomatique.

Jean Cavaillès [Cav37] prend entièrement à son compte l'opinion de Heyting et écrit :

> À la fois avec ce qu'est [la mathématique classique] sous cette forme et avec l'exigence de son progrès indéfini, il importe de préciser le rapport [avec le système formel] : d'où la divergence entre ce que Heyting appelle le *formalisme radical* de v. Neumann et la théorie propre de Hilbert. Pour le premier, les possibilités d'un système formel étant illimitées (par la libre adjonction de symboles et de règles), la mathématique historique ne sera qu'un principe de choix entre elles : son devenir reste inexpliqué, la *théorie de la démonstration* n'a pour but que de montrer après coup la solidité de ses résultats par une traduction dans des formalismes non contradictoires. L'insuccès de l'opération est preuve d'erreur, son succès ne justifie pas l'essentiel, il n'y a que mise en correspondance de deux processus extrinsèques. Hilbert, au contraire, voit dans les formules « des images de pensées » : en édifiant son formalisme, il ne fait que pousser à bout les méthodes et les raisonnements qui engendrent effectivement les théories, s'il n'y a pas coïncidence avec la mathématique historique (qui n'emploie pas les signes logiques, etc.), c'est que celle-ci comporte inadvertance ou raccourcis relevant d'un contingent pur : en droit, il n'y a d'autre mathématique que la formelle et son corrélat métamathématique, elles ne sont « que le protocole des règles d'après lesquelles notre entendement procède effectivement ».

Pourtant, v. Neumann fut un parfait héritier des idées de Hilbert auxquelles Cavaillès accorde le plus grand crédit, en l'espèce « la théorie de la généralisation ou de la méthode axiomatique » et « la théorie du signe, la première justifiant la fécondité propre, la deuxième la portée objective du système ».

Les idées philosophiques de v. Neumann étaient aussi radicales que ses développements mathématiques étaient précis : là ou les premières faillissent, les deuxièmes restent des modèles de toute la richesse conceptuelle de la méthode axiomatique. Il réalisa pleinement l'idée de Hilbert que *les formalismes sont des images de pensées* : les formes devenaient la matière même de son travail.

3.4.3 Contacts ultérieurs avec la logique

La manière qu'a v. Neumann de prendre les problèmes à la hussarde explique peut-être pourquoi il a abandonné le problème du fondement des mathématiques après l'établissement du théorème de Gödel. Comme le but qu'il s'était fixé ne pouvait plus être atteint, il se détourna définitivement du sujet — à part pour enseigner à Princeton la démonstration de ce théorème.

On peut néanmoins considérer ses recherches en informatique théorique comme un retour sur ses préoccupations premières. Ainsi, un texte comme *L'ordinateur et le cerveau* [Neu58] compare langage naturel et langage mathématique et cherche à établir la structure de l'entendement et à mesurer ses capacités au delà des limites imposées par le théorème de Gödel à tout système formel.

Chapitre 4

Les travaux en mathématiques appliquées

4.1 La méthode axiomatique

Il est impossible de comprendre l'intérêt que porte v. Neumann dès 1927 aux mathématiques appliquées tant à la physique qu'aux jeux et à l'économie sans le replacer dans le contexte de l'institut de mathématiques de l'université de Göttingen et des pensées de son plus grand représentant David Hilbert. Sa vie et l'atmosphère de recherche qui régnait à Göttingen ont été décrites par Constance Reid [Rei70].

4.1.1 Le sixième problème de Hilbert

Après avoir développé la théorie des invariants, la théorie des corps de nombres algébriques, après avoir étudié le fondement de la géométrie à l'aide de sa méthode axiomatique, créée à cet effet, David Hilbert s'adresse en ces termes à la sixième section (enseignement et méthodes) du congrès international des mathématiciens de 1900 [Hil00] :

> Les recherches sur le fondement de la géométrie nous conduisent à envisager ce problème : traiter sur ce modèle les branches de la physique où les mathématiques jouent déjà aujourd'hui un rôle prédominant ; ce sont en premier lieu le calcul des probabilités et la mécanique.

Il se réfère alors aux systèmes de principes de la mécanique que Mach, Hertz et Boltzmann ont établi et s'interroge sur la possibilité de leur équivalence. Il continue :

> Pour que le modèle de la géométrie soit applicable au traitement des axiomes de la physique, nous devons d'abord essayer d'embrasser une classe aussi générale que possible de phénomènes physiques avec un petit nombre d'axiomes, puis de parvenir aux théories plus particulières par adjonction de nouveaux axiomes. [...] Le mathématicien aura à considérer, comme il l'a

fait en géométrie, non seulement les théories qui approchent la réalité, mais toutes les théories logiquement possibles et devra penser à acquérir une supervision complète des conséquences que chaque système d'axiomes considéré entraîne.

De plus, il incombera au mathématicien de compléter le point de vue physique en examinant précisément à chaque fois si le nouvel axiome adjoint n'est pas en contradiction avec les axiomes précédents. Le physicien se voit souvent obligé par les résultats de ses expériences de faire de nouvelles hypothèses *pendant* le développement de sa théorie, en n'invoquant que ses expériences ou un certain sentiment physique pour ce qui concerne la non-contradiction des nouvelles hypothèses — un procédé inadmissible dans l'édification logiquement rigoureuse d'une théorie. La preuve requise de la non-contradiction de toutes les hypothèses faites *ad hoc* me semble aussi d'importance parce que la recherche d'une telle preuve nous oblige toujours de la manière la plus efficace à une formulation exacte des axiomes mêmes.

4.1.2 Le développement des idées de Hilbert

Dix-sept ans plus tard, David Hilbert développa à nouveau ses idées théoriques dans son article *La pensée axiomatique* [Hil18]. Il y ajoute que

> Le procédé de la méthode axiomatique revient donc à poser plus profondément les fondations qui soutiennent chacun des domaines scientifiques spéciaux, travail analogue à celui qui est nécessaire pour tout bâtiment dans la mesure où on l'agrandit, le rehausse et qu'on veut néanmoins répondre de sa sécurité.

Il précise le rôle de l'indépendance des axiomes : elle est nécessaire

> si la théorie d'un domaine de connaissances, c'est-à-dire la charpente de ses concepts veut servir son dessein, à savoir d'orientation et d'ordre. [...] Dans la théorie des nombres réels, on montre que l'axiome de la mesure dit axiome d'Archimède est indépendant de tous les autres axiomes arithmétiques. Ce résultat [...] me semble aussi d'intérêt théorique pour la physique. [...] Justement, la validité de l'axiome d'Archimède dans la nature nécessite une confirmation expérimentale comme la proposition relative à la somme des angles d'un triangle au sens connu.

Hilbert avait pris douze ans pour se lancer lui-même à l'attaque de son sixième problème. En 1912, il s'écria : « la physique est bien trop dure pour les physiciens ! » et se plongea dans l'étude mathématique de la théorie cinétique des gaz développée par Clausius, Maxwell et Boltzmann, à laquelle il attachait depuis 1900 un grand intérêt. Les autres domaines qu'il soumit à son analyse furent la théorie statistique de la radiation et la relativité générale d'Einstein dont il suivait de très près le développement. Mais, comme l'écrit Hermann Weyl [Wey44] en parlant de ses découvertes, la moisson peut difficilement être comparée à ses prouesses en mathématiques pures : la réalisation d'une axiomatique générale de la physique lui échappa.

Le dernier article de physique mathématique signé par David Hilbert fut son œuvre conjointe avec Ludwig Nordheim et John v. Neumann : *Sur* *les fondements de la mécanique quantique* [HNN27]. Même si sa participation effective était petite, cet article était, comme l'écrit Reid [Rei70], pénétré de son esprit.

4.1.3 Discussion de ces idées

David Hilbert conclut son article [Hil18] par un manifeste en faveur de la suprématie des mathématiques sur les autres sciences :

> Je pense que tout ce qui peut être objet de pensée scientifique mûr pour la formation d'une théorie peut se soumettre à la méthode axiomatique. En accédant à des strates de plus en plus profondes d'axiomes, nous gagnons aussi des aperçus de plus en plus profonds de l'être même de la pensée scientifique et nous devenons de plus en plus conscients de l'unité de notre savoir.

Vingt-six ans plus tard, en écrivant la nécrologie de Hilbert, Hermann Weyl [Wey44] lui répond ainsi :

> Le fouillis de faits expérimentaux dont le physicien doit prendre compte est trop divers, sa croissance trop rapide, leur aspect et leur poids relatif trop variable pour la méthode axiomatique pour qu'elle trouve une assise assez stable, à part dans les parties bien consolidées de nos connaissances physiques.
>
> Des hommes comme Einstein ou Niels Bohr trouvent leur chemin dans le noir vers les conceptions de relativité générale ou de structure atomique par un autre type d'expériences et d'imagination que celle du mathématicien, même si sans doute les mathématiques sont un ingrédient essentiel. Ainsi, les vastes plans de Hilbert ne mûrirent jamais.

comme Wolfgang Pauli répond à v. Neumann disant

> — Je peux démontrer ceci et cela...
> — Eh bien, si une preuve était importante en physique, vous seriez un grand physicien.

Mais on peut adresser, comme Wightman [Wig76], l'objection suivante à Weyl : en revanche, une grande théorie physique n'est pas mûre avant d'avoir été mise en une forme mathématique précise capable de donner des réponses claires à des problèmes conceptuels. Ainsi, la mutation de la mécanique quantique de 1925 à 1928 en passant par la méthode axiomatique et qui aboutit au livre de v. Neumann [Neu32] a fait de celle-ci la théorie mûre d'aujourd'hui.

Même si la méthode axiomatique a eu dans l'histoire des sciences la signification que lui attribuait Hilbert, elle a aussi joué un rôle différent et très important. Elle a permis de bien définir l'objet de l'étude et de distinguer les théories entre elles : ainsi, avant l'emploi de la méthode axiomatique, on ne pouvait pas parler de théorie du champ quantique. La théorie axiomatisée correspondante s'est formée à partir d'une simple définition mathématique et a produit un corps significatif de théorèmes généraux.

La valeur des recherches de Hilbert n'aura pas été d'établir de nouvelles théories physiques, mais, comme il l'avait prévu par ailleurs, de davantage comprendre leur structure, les hypothèses sous-jacentes et les domaines de validité des théorèmes.

4.1.4 Conséquences sur le style des mathématiques appliquées

La méthode axiomatique promue par HILBERT engendra un changement profond de l'usage des mathématiques en physique. Alors que la théorie des équations différentielles suivait *mécaniquement* les processus physiques, v. NEUMANN invoqua l'espace de HILBERT abstrait pour sa *forme*. Les mathématiques fournissent un langage analogique qui permet une exposition unifiée.

STANISLAW ULAM [Ula58] écrira à ce sujet :

> Les idées de la physique du 19e siècle, mathématiquement dominée par les équations différentielles et intégrales et la théorie des fonctions analytiques, sont devenues inadéquates. La nouvelle théorie quantique nécessite, en ce qui concerne l'analyse, un point de vue plus général sur la théorie des ensembles, de sorte que les notions primitives elles-mêmes englobent les distributions de probabilités et des espaces fonctionnels de dimension infinie. La contrepartie algébrique de cela comprend une étude des structures combinatoires et algébriques plus générales que celles des nombres réels ou complexes. V. NEUMANN entreprit son œuvre à un moment où l'ensemble des idées élaborées à partir de la théorie des ensembles de CANTOR et l'œuvre algébrique de HILBERT, WEYL, NOETHER, ARTIN, BRAUER et d'autres pouvait être exploités à cet effet.

4.2 *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*

Nous commençons par une présentation des débuts balbutiants de la théorie des jeux pour mieux comprendre l'apport de v. NEUMANN par rapport à ses prédécesseurs. Nous discutons sa modélisation des jeux et, très longuement, la preuve mathématique du théorème du minimax. Finalement, nous resituons cet article dans le contexte du programme de HILBERT et de la mécanique quantique. Nous omettons par contre volontairement de traiter la corrélation entre la structure de la théorie des jeux et la stratégie militaire et renvoyons à [Mir91] : ces explications n'auront de sens que pour le développement ultérieur de la théorie pendant la Deuxième guerre mondiale.

4.2.1 Historique

Un des articles les plus originaux de v. NEUMANN porte le titre *Sur la théorie des jeux de société* [Neu28c]. Le contexte de découverte de cet article est très flou : d'un côté, les premières études de jeux stratégiques, c'est-à-dire de jeux dont l'issue dépend de l'habileté de chaque partenaire de jeu, remontent à 1713 : il s'agit d'un jeu de cartes à deux personnes, « le Her », étudié par JAMES WALDEGRAVE (voir la lettre de PIERRE-RÉMOND DE MONTMORT à

Daniel Bernoulli [Mon13]). Deux idées fondamentales y apparaissent déjà, celle d'introduire de la probabilité pour l'étude du jeu, même si celui-ci ne fait pas intervenir le hasard — un joueur doit pouvoir varier ses stratégies pour ne pas être prévisible pour son adversaire —, et celle de rechercher la stratégie optimale à employer quelle que soit la stratégie à celui-ci inconnue de celui-là.

En effet, il n'y a pas en général de stratégie *pure* gagnante, c'est-à-dire une stratégie qui permette de gagner à tous les coups, même si des exceptions bien connues existent, comme le jeu de Marienbad (voir [HW54]). Il s'agit alors bien plus de déterminer avec quelle probabilité il faut choisir telle ou telle stratégie pour s'assurer une chance optimale de gagner.

L'illustration aujourd'hui classique en est le jeu japonais du papier, des ciseaux et de la pierre : deux personnes choisissent simultanément un des trois objets. Gagnera celui qui a choisi le papier contre la pierre, enveloppée ; la pierre contre les ciseaux, cassés ; les ciseaux contre le papier, coupé. Puisque le joueur perd à coup sûr dès que son adversaire peut prévoir l'objet qu'il a choisi, la stratégie optimale sera *mixte* : le joueur choisit simplement chacun des objets avec une probabilité d'un tiers. Les règles de ce jeu ne contiennent pas de hasard, et pourtant son issue dépend uniquement de la chance !

Cet exemple a été explicitement traité par Émile Borel [Bor24], qui a publié quatre articles sur la théorie des jeux stratégiques au cours des années vingt. Ces articles sont très riches en idées : il considère la totalité peut-être grande mais finie des stratégies possibles et remarque la nécessité de considérer des stratégies mixtes. Il note dès son premier article [Bor21] que

> Les problèmes de probabilités et d'analyse que l'on pourrait se poser à propos de l'art de la guerre ou des spéculations économiques et financières ne sont pas sans analogie avec les problèmes relatifs aux jeux.

Il est le premier à poser le problème sous forme explicitement matricielle. Mais il ne réussit pas à dépasser, dans son analyse, les cas de trois ou cinq stratégies possibles, en prétendant pourtant, de manière à première vue incohérente, que l'on pourrait néanmoins généraliser ses idées au cas d'un ensemble continu de stratégies — ce qu'il fait au demeurant dans des cas particuliers dès 1921 [Bor21]. Ce n'est que dans sa note du 10 janvier 1927 [Bor27] qu'il pose le problème du minimax — qu'il a résolu pour le cas de trois ou de cinq stratégies — dans le cas général de deux joueurs et d'un nombre quelconque de stratégies. John v. Neumann en aura présenté une solution un mois auparavant devant la société mathématique de Göttingen, au séminaire de David Hilbert, le 7 décembre 1926.

En fait, v. Neumann a envoyé ses résultats à Borel qui les a fait publier aussitôt dans dans une note des *Comptes rendus de l'académie des sciences* [Neu28b]. Maurice Fréchet [Fré53] relancera en 1953 le débat sur la priorité dans l'invention de la théorie des jeux. D'un côté, il est difficile d'évaluer l'impact des idées de Waldegrave au 20[e] siècle. D'un autre, il est peu probable que l'ouvrage de Borel de 1924 [Bor24] soit resté inconnu à v. Neumann, malgré son silence à ce sujet dans sa réponse à Fréchet [Neu53] : les approches sont bien similaires à celles de Borel. Mais une autre source sûre des réflexions de v.

NEUMANN est l'article de ERNST ZERMELO *Sur une application de la théorie des ensembles à la théorie du jeu d'échecs* [Zer13] : en effet, DÉNES KŐNIG explique dans son article de 1927 [Kőn27] que V. NEUMANN l'a aidé dans la correction d'une erreur contenue dans [Zer13].

4.2.2 Description de l'article

4.2.2.1 Définition du jeu

ÉMILE BOREL traite de tactiques sans les circonscrire mathématiquement : il considère les « manières de jouer » comme « un code plus ou moins complexe fixant la conduite du joueur dans toutes les circonstances possibles du jeu, circonstances dont nous supposons le nombre total fini ». L'impression qui se dégage constamment du texte est qu'il traite les jeux stratégiques comme un exercice intéressant de probabilités, tout en prévenant tout usage pratique de sa solution.

V. NEUMANN se place au contraire dans la perspective du fondement d'une théorie nouvelle dont le but est à terme de pouvoir s'appliquer à toutes sortes de phénomènes réels. C'est pourquoi il doit se poser la question générale de la définition rigoureuse d'un jeu de société. Il analyse leur syntaxe comme s'il s'agissait d'un système d'axiomes de la théorie des ensembles — de manière d'autant plus pertinente qu'il s'agit de systèmes finis.

Il en décrit soigneusement les caractéristiques. La formulation du jeu dans un langage adapté à l'analyse mathématique est engagée à partir de la description initiale et est justifiée par des raisonnements combinatoires qui montrent que la simplification formelle n'est qu'apparente et que la généralité est préservée. Il explicite la fonction de gain et précise la notion de recherche d'un résultat optimal possible. Il réduit ainsi la multiplicité des phénomènes spécifiques au jeu à un univers d'objets mathématiques d'une simplicité maximale. Ce qui est à l'œuvre ici, c'est la méthode axiomatique de DAVID HILBERT !

> Procéder axiomatiquement, c'est, en ce sens, simplement avoir conscience de sa pensée ; alors qu'avant, quand on n'avait pas la méthode axiomatique, il arrivait que l'on crût naïvement à certaines relations comme à un dogme, l'axiomatisation met fin à cette naïveté en nous laissant les avantages de la croyance. (DAVID HILBERT [Hil22])

La définition axiomatique a un avantage supplémentaire qui se manifeste aujourd'hui : à présent, la théorie des jeux a abandonné toute référence aux questions d'origine pour devenir une technique de l'analyse mathématique qui peut s'appliquer aux questions les plus diverses.

Contrairement à ÉMILE BOREL, V. NEUMANN n'accorde aucune place aux cas particuliers de trois ou cinq stratégies. On sent l'impact des raisonnements en termes d'ensembles : toute la formalisation consiste finalement à expulser le sens des objets initiaux et à étudier uniquement la forme de leur collection. Une telle mise à plat se retrouve dans l'article de ERNST ZERMELO [Zer13]. Celui-ci ramène la question : le jeu d'échecs est-il déterminé ? à des raisonnements purement ensemblistes qui ne font plus intervenir la psychologie des joueurs : les ensembles deviennent la matière concrète, le support du raisonnement mathématique.

4.2.2.2 Le théorème du minimax

V. Neumann formule alors le problème fondamental de la théorie des jeux : quel est le résultat optimal qu'un joueur peut obtenir quelle que soit la stratégie de son adversaire ? Il lui donne d'emblée la forme désormais classique du *minimax* : si $g(i, j)$ est la fonction de gain que cherche à maximiser le joueur A par le choix de la stratégie i qui lui appartient, et que son partenaire B cherche à minimiser par le choix de j, le gain *minimal* que peut obtenir A en jouant *au mieux* est

$$\max_i \min_j g(i, j),$$

et B peut le rendre en tous cas inférieur ou égal à

$$\min_j \max_i g(i, j).$$

On montre directement qu'en général

$$\max_i \min_j g(i, j) \leq \min_j \max_i g(i, j). \tag{4.1}$$

En général, cette inégalité est stricte. Considérons le jeu du papier, de la pierre et des ciseaux. Notons la stratégie du choix de chacun des objets par 1, 2 et 3 respectivement. Alors la fonction de gain qui résulte des règles du jeu vérifie $g(i, j) = 0$ si $i = j$ (la partie est remise), $g(i, j) = 1$ si $i = 1$, $j = 2$ ou si $i = 2$, $j = 3$ (A gagne), $g(i, j) = -1$ si $i = 1$, $j = 3$ ou si $i = 2$, $j = 1$ (B gagne). Alors

$$-1 = \max_i \min_j g(i, j) < \min_j \max_i g(i, j) = 1.$$

Cela veut dire qu'il n'existe pas nécessairement de stratégie gagnante pour laquelle A atteindrait l'égalité en (2.1). V. Neumann le remarque et l'explique : « $\max_i \min_j g(i, j)$ est le meilleur résultat que A peut obtenir lorsque B perce et déjoue complètement ses plans » — ce qui n'est pas prévu dans les règles du jeu.

Mais si on établit des conditions ou plutôt un nouveau point de vue qui entraînent l'égalité en (2.1), la théorie des jeux aura fait un grand pas : la valeur du gain $g(i, j)$ et donc le jeu lui-même seraient *déterminés* en supposant que A et B jouent de manière optimale.

V. Neumann cherche donc a récupérer cette égalité par un dispositif qui rende les intentions de chaque joueur opaques. L'idée lui vient de ses prédécesseurs : chaque joueur choisira non pas une stratégie particulière, mais ce qu'on appellera une stratégie mixte qui lui permet de varier de stratégie au cours des parties successives. Il décidera seulement de la probabilité ξ_i avec laquelle il choisira i : si A a n stratégies à sa disposition, il aura donc à choisir un vecteur

$\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ de n probabilités telles que $\xi_i \geq 0$ et $\xi_1 + \cdots + \xi_n = 1$. De même, B choisira $\{\eta_j\}_{j=1}^m$ tel que $\eta_j \geq 0$ et $\eta_1 + \cdots + \eta_m = 1$.

$$h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(i, j)\xi_i \eta_j$$

représente alors l'espérance du gain pour les choix de ξ et η.

V. Neumann est prêt à formuler son

Théorème 4.1

$$\max_{\xi} \min_{\eta} h(\xi, \eta) = \min_{\eta} \max_{\xi} h(\xi, \eta).$$

La démonstration du théorème repose sur une variation du théorème du point fixe de Brouwer [Bro11] et fait appel à la topologie de la droite réelle.

4.2.2.3 Démonstration par des méthodes de point fixe

Comme

$$\xi_1 + \cdots + \xi_n = \eta_1 + \cdots + \eta_m = 1,$$

les vecteurs ξ et η sont déterminés par $\{\xi_i\}_{i=1}^{n-1}$ et $\{\eta_j\}_{j=1}^{m-1}$. Définissons f par

$$f(\{\xi_i\}_{i=1}^{n-1}, \{\eta_j\}_{j=1}^{m-1}) = h(\xi, \eta).$$

C'est une fonction bilinéaire de $[0, 1]^{n-1} \times [0,1]^{m-1}$ à valeurs réelles. Pour démontrer le théorème du minimax, v. Neumann propose alors de considérer plus généralement les fonctions continues de $[0, 1]^p \times [0, 1]^q$ à valeurs réelles qui vérifient

$$(C) \quad \begin{array}{l} f(\xi', \eta) \geq A \text{ et } f(\xi'', \eta) \geq A \ \Rightarrow\ f(\xi, \eta) \geq A \text{ pour } \xi \in [\xi', \xi''] \\ f(\xi, \eta') \leq A \text{ et } f(\xi, \eta'') \leq A \ \Rightarrow\ f(\xi, \eta) \leq A \text{ pour } \eta \in [\eta', \eta''], \end{array}$$

en particulier les fonctions concaves dans la première variable et convexes dans la deuxième variable, ainsi que de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.2 (Minimax) *Si f vérifie (C), alors*

$$\max_{\substack{\xi \\ \xi_1+\cdots+\xi_p \leq 1}} \min_{\substack{\eta \\ \eta_1+\cdots+\eta_q \leq 1}} f(\xi, \eta) = \min_{\substack{\eta \\ \eta_1+\cdots+\eta_q \leq 1}} \max_{\substack{\xi \\ \xi_1+\cdots+\xi_p \leq 1}} f(\xi, \eta).$$

La conclusion du théorème peut aussi s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{\xi_1 \\ \xi_1 \leq 1}} \max_{\substack{\xi_2 \\ \xi_1+\xi_2 \leq 1}} \cdots \max_{\substack{\xi_p \\ \xi_1+\cdots+\xi_p \leq 1}} \min_{\substack{\eta_1 \\ \eta_1 \leq 1}} \min_{\substack{\eta_2 \\ \eta_1+\eta_2 \leq 1}} \cdots \min_{\substack{\eta_q \\ \eta_1+\cdots+\eta_q \leq 1}} f(\xi, \eta) \\ = & \min_{\substack{\eta_1 \\ \eta_1 \leq 1}} \min_{\substack{\eta_2 \\ \eta_1+\eta_2 \leq 1}} \cdots \min_{\substack{\eta_q \\ \eta_1+\cdots+\eta_q \leq 1}} \max_{\substack{\xi_1 \\ \xi_1 \leq 1}} \max_{\substack{\xi_2 \\ \xi_1+\xi_2 \leq 1}} \cdots \max_{\substack{\xi_p \\ \xi_1+\cdots+\xi_p \leq 1}} f(\xi, \eta). \end{aligned}$$

En effet, on note que si f est une fonction de $[0, 1]^r \times [0,1]^s$ à valeurs réelles, alors $\max\limits_{\substack{\xi_r \\ \xi_1+\cdots+\xi_r \leq 1}} f(\xi, \eta)$ (resp. $\min\limits_{\substack{\eta_s \\ \eta_1+\cdots+\eta_s \leq 1}} f(\xi, \eta)$) est une fonction de $[0, 1]^{r-1} \times$

$[0,1]^s$ (resp. $[0,\,1]^r \times [0,1]^{s-1}$). La démonstration recherchée se ramène donc à intervertir les max et les min de proche en proche. Prouvons

(a) Si une fonction f de $[0,\,1]^r \times [0,1]^s$ est continue et vérifie (C), alors il en est de même de

$$\max_{\substack{\xi_r \\ \xi_1+\cdots+\xi_r\le 1}} f(\xi,\,\eta) \quad \text{et de} \quad \min_{\substack{\eta_s \\ \eta_1+\cdots+\eta_s\le 1}} f(\xi,\,\eta).$$

(b) Si une fonction f de $[0,\,1]^r \times [0,1]^s$ est continue et vérifie (C), alors

$$\max_{\substack{\xi_r \\ \xi_1+\cdots+\xi_r\le 1}} \min_{\substack{\eta_s \\ \eta_1+\cdots+\eta_s\le 1}} f(\xi,\,\eta) \;=\; \min_{\substack{\eta_s \\ \eta_1+\cdots+\eta_s\le 1}} \max_{\substack{\xi_r \\ \xi_1+\cdots+\xi_r\le 1}} f(\xi,\,\eta).$$

V. Neumann mène alors la démonstration de (a) par un calcul à la main. Pour démontrer l'égalité en (b), on peut fixer les variables $\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{r-1}$ et $\eta_1,\,\ldots,\,\eta_{s-1}$ et réduire le problème au cas d'une fonction de deux variables scalaires : il reste à démontrer

Lemme 4.3 *Si f est une fonction continue de $[0,\,a] \times [0,\,b]$ à valeurs réelles, et si*

$$\begin{aligned} &f(\xi',\,\eta) \ge A \textit{ et } f(\xi'',\,\eta) \ge A \;\Rightarrow\; f(\xi,\,\eta) \ge A \textit{ pour } \xi' \le \xi \le \xi'' \\ &f(\xi,\,\eta') \le A \textit{ et } f(\xi,\,\eta'') \le A \;\Rightarrow\; f(\xi,\,\eta) \le A \textit{ pour } \eta' \le \eta \le \eta'', \end{aligned}$$

alors

$$\max_{0\le\xi\le a} \min_{0\le\eta\le b} f(\xi,\,\eta) \;=\; \min_{0\le\eta\le b} \max_{0\le\xi\le a} f(\xi,\,\eta).$$

en posant $a = 1 - \xi_1 - \cdots - \xi_{r-1}$ et $b = 1 - \eta_1 - \cdots - \eta_{s-1}$.

V. Neumann montre alors que le lemme est satisfait si f admet un col, c'est-à-dire un point $(\xi_0,\,\eta_0)$ tel que $f(\xi_0,\,\eta)$ atteint son minimum en η_0 et $f(\xi,\,\eta_0)$ atteint son maximum en ξ_0.

En effet, nous avons déjà vu que

$$\max_{0\le\xi\le a} \min_{0\le\eta\le b} f(\xi,\,\eta) \;\le\; \min_{0\le\eta\le b} \max_{0\le\xi\le a} f(\xi,\,\eta).$$

Or l'existence d'un col en $(\xi_0,\,\eta_0)$ implique

$$\max_{0\le\xi\le a} \min_{0\le\eta\le b} f(\xi,\,\eta) \;\ge\; \min_{0\le\eta\le b} f(\xi_0,\,\eta) \;=\; f(\xi_0,\,\eta_0)$$

et

$$\min_{0\le\eta\le b} \max_{0\le\xi\le a} f(\xi,\,\eta) \;\le\; \max_{0\le\xi\le a} f(\xi,\,\eta_0) \;=\; f(\xi_0,\,\eta_0),$$

d'où l'inégalité inverse.

La preuve que v. Neumann donne alors est profondément non-constructive et repose sur la topologie de la droite réelle.

Réécrivons l'existence de ce col en termes ensemblistes : Soient

$$K_\xi = \{\eta;\, f(\xi,\,\eta) = \min_{0\le\eta\le b} f(\xi,\,\eta)\} \quad \text{et} \quad L_\eta = \{\xi;\, f(\xi,\,\eta) = \max_{0\le\xi\le a} f(\xi,\,\eta)\}.$$

Alors trouver un col équivaut à trouver un ξ tel qu'il existe $\eta \in K_\xi$ tel que $\xi \in L_\eta$. Ou bien, en posant

$$H_\xi = \{\xi'; \exists \eta \in K_\xi \quad \xi' \in L_\eta\} = \bigcup_{\eta \in K_\xi} L_\eta,$$

à trouver ξ tel que $\xi \in H_\xi$. Étudions donc ces ensembles K_ξ, L_η et H_ξ.

K_ξ et L_η sont fermés car images réciproques par une fonction continue d'un ensemble fermé, un point ; il sont convexes par hypothèse du lemme 3. Ce sont donc des intervalles fermés qu'on écrira $[K'(\xi),\, K''(\xi)]$ et $[L'(\eta),\, L''(\eta)]$. K' et L' sont semi-continues inférieurement, et K'' et L'' sont semi-continues supérieurement. (Voir l'appendice pour ces notions découvertes par René Baire en 1897.) Menons la démonstration pour K' :

- Si $K'(\xi) = 0$, K' est semi-continue inférieurement en ξ par application directe de la définition.
- Si $K'(\xi) > 0$, on peut, par continuité de f et par définition de K', choisir, pour tout $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tel que

$$0 \le \eta \le K'(\xi) - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(\xi,\, \eta) \ge \min_{0 \le \eta \le b} f(\xi,\, \eta) + \delta.$$

Comme f et $\min_{0 \le \eta \le b} f(\cdot,\, \eta)$ sont continues, on peut choisir ρ tel que

$$|\zeta - \xi| < \rho \quad \Rightarrow \quad f(\zeta,\, \eta) \ge \min_{0 \le \eta \le b} f(\zeta,\, \eta) + \frac{\delta}{2}.$$

Donc $f(\zeta,\, \cdot)$ ne prend pas son minimum pour $0 \le \eta \le K'(\xi) - \varepsilon$, ce qui veut dire que $K'(\zeta) \ge K'(\xi) - \varepsilon$.

Mais alors, selon la proposition 4.3 et son corollaire 4.4, L' et L'' atteignent leurs bornes respectivement inférieure et supérieure dans l'intervalle $[K'(\xi),\, K''(\xi)]$. Donc H_ξ contient un élément minimal ξ_1 et un élément maximal ξ_2. Démontrons par l'absurde qu'il contient aussi tout ξ' intermédiaire.

Sinon, tout intervalle L_η est situé soit avant soit après ξ', et il y en a de chaque sorte : il suffit de considérer les L_η correspondants à ξ_1 et à ξ_2. Lorsque η parcourt l'intervalle K_ξ, les deux ensembles de η tels que L_η se situe respectivement avant et après ξ ont un point d'adhérence commun η^* (voir l'appendice) : c'est-à-dire qu'il existe deux suites η'_i et η''_j qui tendent vers η^* telles que $L'(\eta'_i) \le \xi'$ et $L''(\eta''_j) \ge \xi'$. Par semi-continuité, on a alors $L'(\eta^*) \le \xi'$ et $L''(\eta^*) \ge \xi'$, c'est-à-dire que $\xi' \in [L'(\eta^*),\, L''(\eta^*)]$. C'est absurde.

Donc H_ξ est aussi un intervalle fermé $[H'(\xi),\, H''(\xi)]$ avec

$$H'(\xi) = \min_{\eta \in K_\xi} L'(\eta) \quad \text{et} \quad H''(\xi) = \max_{\eta \in K_\xi} L''(\eta).$$

On vérifie que H' et H'' sont respectivement semi-continues inférieurement et supérieurement.

Menons la démonstration pour H'. Soit $\varepsilon > 0$ et $\xi \in [0,\, a]$. Il existe ρ tel que si $|\eta - K'(\xi)| < \rho$, alors $L'(\eta) \geq L'(K'(\xi)) - \varepsilon$, et que si $|\eta - K''(\xi)| < \rho$, alors $L'(\eta) \geq L'(K''(\xi)) - \varepsilon$. Soit alors δ tel que

$$|\xi - \xi'| < \delta \quad \Rightarrow \quad K'(\xi') \geq K'(\xi) - \rho \text{ et } K''(\xi') \leq K''(\xi) + \rho.$$

On a finalement

$$H'(\xi') = \min_{\eta \in K_{\xi'}} L'(\eta) \geq \min_{K'(\xi) - \rho \leq \eta \leq K''(\xi) + \rho} L'(\eta) \geq \min_{\eta \in K_\xi} L'(\eta) - \varepsilon = H'(\xi) - \varepsilon.$$

Finalement, démontrons par l'absurde qu'il existe $\xi^* \in [0,\, a]$ tel que $\xi^* \in H_{\xi^*}$.

Sinon, tout intervalle H_{ξ^*} est situé soit avant soit après ξ^*, et il y en a de chaque sorte : il suffit de considérer $\xi^* = 0$ et $\xi^* = a$. Comme ξ^* parcourt l'intervalle $[0,\, a]$, les deux ensembles de ξ^* tels que H_{ξ^*} se situe respectivement avant et après ξ^* ont un point d'adhérence commun ξ^{**} : c'est-à-dire qu'il existe deux suites ξ'_i et ξ''_j qui tendent vers ξ^{**} telles que $H'(\xi'_i) \leq \xi'_i$ et $H''(\xi''_j) \geq \xi''_j$. Par semi-continuité, on a alors $H'(\xi^{**}) \leq \xi^{**}$ et $L''(\xi^{**}) \geq \xi^{**}$, c'est-à-dire que $\xi^{**} \in [H'(\xi^{**}),\, H''(\xi^{**})]$. C'est absurde.

Mais pourquoi v. Neumann prétend-il employer ici des méthodes de point fixe [Neu53] ? En fait, le théorème suivant est sous-jacent à la démonstration précédente.

Théorème 4.4 *Soit f une fonction qui à $x \in [a,\, b]$ associe un intervalle $f(x) = [f'(x),\, f''(x)] \subseteq [a,\, b]$, où f' et f'' sont respectivement semi-continues inférieurement et supérieurement. Alors il existe x_0 tel que $x_0 \in f(x_0)$.*

C'est un théorème du point fixe pour un type de fonctions à valeurs des ensembles de réels. Dans la terminologie actuelle, f est considérée comme une fonction semi-continue supérieure, au sens où son graphe $\{(x,\, y) \in [a,\, b]^2;\, y \in f(x)\}$ est fermé.

4.2.2.4 Démonstration à l'aide du théorème de séparation

Jean Ville a trouvé en 1938 une nouvelle démonstration reposant sur un théorème de *séparation*, c'est à dire d'un théorème permettant de séparer deux ensembles par un troisième [Vil38]. Alors qu'il démontre le lemme suivant à la main, on peut le considérer comme une application du théorème de Hahn-Banach : si deux convexes fermés C_1 et C_2 de E ne se rencontrent pas, il existe une forme linéaire f sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $C_1 \in \{x \in E;\, f(x) < \alpha\}$ et $C_2 \in \{x \in E;\, f(x) > \alpha\}$, c'est-à-dire que l'hyperplan $\{x \in E;\, f(x) = \alpha\}$ sépare C_1 et C_2.
Notons $x = \{x_i\} \geq 0$ si pour tout i $x_i \geq 0$.

Lemme 4.5 *Soient f_i p formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que, pour tout $x \geq 0$, il existe i tel que $f_i(x) \geq 0$. Alors il existe une combinaison convexe $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p$ avec $\lambda \geq 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$ telle que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.*

Démonstration. En effet, si la conclusion du lemme était fausse, les convexes fermés $C_1 = \{f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p;\ \lambda \geq 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1\}$ et $C_2 = \{f;\ f(x) \geq 0$ si $x \geq 0\}$ seraient disjoints et il existerait $x \in \mathbb{R}^n$ et α tels que, pour tout $f \in C_2$, $f(x) > \alpha$ et pour tout $f \in C_1$, $f(x) < \alpha$. En fait, α est strictement négatif puisque $0 \in C_2$. De plus, $\lambda e_i : x \mapsto \lambda x_i$ appartient à C_2 pour tout $\lambda \geq 0$; si $x \not\geq 0$, soit i tel que $e_i(x) < 0$: il existe alors $\lambda > 0$ tel que $\lambda e_i(x) < \alpha$, ce qui est absurde. Donc $x \geq 0$ et $f_i(x) < 0$ pour tout i. ■

Le

Corollaire 4.6 *Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Soient f_i p formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que, pour tout $x \geq 0$, il existe i tel que $f_i(x) \geq \phi(x)$. Alors il existe une combinaison convexe $\psi = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p$ avec $\lambda \geq 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$ telle que, pour tout $x \geq 0$, $\psi(x) \geq \phi(x)$.*

se démontre en appliquant le lemme 2.5 aux $f_i - \phi$.

Replaçons-nous dans le contexte du 2.2.2.2 : soit $h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(i, j)\xi_i \eta_j$, où $\xi, \eta \geq 0$ et $\xi_1 + \cdots + \xi_n = \eta_1 + \cdots + \eta_m = 1$. Notons $f_j(\xi) = \sum_{i=1}^{n} g(i, j)\xi_i$. Alors

$$\max_{\eta} h(\xi, \eta) = \max_{1 \leq j \leq m} f_j(\xi).$$

Soit $\mu = \min_{\xi} \max_{\eta} h(\xi, \eta)$. Alors μ vérifie : pour tout ξ, il existe j tel que $f_j(\xi) \geq \mu$. Donc, en posant $\phi(x) = x_1 + \cdots + x_n$, on a pour tout $x \geq 0$ j tel que $f_j(x) \geq \mu\phi(x)$. Il existe donc par le corollaire 2.6 η tel que $\sum_{j=1}^{m} \eta_j f_j(\xi) \geq \mu$. *A fortiori* $\max_{\eta} \min_{\xi} h(\xi, \eta) \geq \mu$.

Nous avons donc obtenu une nouvelle démonstration du théorème du minimax. Ce sera celle qu'adopteront et généraliseront les mathématiciens — et même à son tour v. Neumann dans son ouvrage *Theory of games and economic behaviour* [NM44].

4.2.3 Le lien avec le programme de Hilbert

La théorie des jeux s'est finalement établie comme une technique mathématique dans des domaines aussi divers que la théorie descriptive des ensembles, la biologie évolutionnaire, les sciences politiques et la microéconomie. La question que l'on peut alors se poser est : quel est le type de rationalité que propose la théorie des jeux dans des domaines aussi divers ?

Nous avons vu que la théorie des jeux est un des nombreux enfants des conceptions de Hilbert : peut-on penser que son usage dans les sciences sociales suit un but comparable à celui du programme de Hilbert en sciences pures ? En effet, comme l'écrit Steve J. Heims dans son livre [Hei80] (avec quelques imprécisions) :

> V. Neumann réduisait apparemment les énigmes épistémologiques entourant la théorie quantique à un formalisme mathématique ; il chercha — et y

arriva plus que tout autre — à prouver la complétude et la consistance interne des mathématiques elles-mêmes par des moyens formels. À présent, les décisions économiques et politiques devaient être ancrées dans la structure formelle de la théorie axiomatique des ensembles.

4.2.3.1 Le jeu formel chez Hilbert

Par ailleurs, les réflexions mêmes de Hilbert proposaient de traiter la théorie de la démonstration comme un jeu dont les règles seraient les axiomes et les pions les signes. Il a écrit en 1922 [Hil22]

> Comme nous l'avons noté, opérer abstraitement avec des extensions de concepts et des contenus sémantiques en général est apparu insuffisant et peu sûr. À titre de condition préalable à l'emploi d'inférences logiques et à l'effectuation d'opérations logiques, quelque chose doit déjà être donné dans la représentation : certaines entités extralogiques, présentes en tant qu'expérience immédiate antérieure à toute pensée. [...] *Au commencement est le signe*, telle est la loi ici.

Mais ces signes et leur manipulation n'ont aucune signification. V. Neumann lui-même dira des « signes simples » de sa théorie : « comme ils appartiennent au formalisme, on ne doit, par principe, leur assigner aucun sens. Ils ne signifient rien, ils ne tiennent lieu de rien, ils n'ont pas plus de sens que, par exemple, les pions sur un échiquier » [Neu25]. Hilbert déplace la réflexion matérielle vers la métamathématique et ébauche sa théorie de la démonstration contre les attaques de Hermann Weyl [Wey21]. La matière de cette théorie seront les signes mathématiques et logiques et l'inférence logique ; la démonstration est une *figure* [Hil23]. Et finalement, dans *Sur l'infini* [Hil26], Hilbert parle de *règles.*

> Dans le calcul logique, nous avons un langage de signes capable d'exprimer les théorèmes mathématiques en formules et l'inférence logique par des processus formels. [...] Ainsi, nous obtenons finalement à la place de la science mathématique matérielle, dont on fait part dans le langage ordinaire, à présent un corps de formules composées de signes mathématiques et logiques qui s'alignent les unes à la suite des autres selon des règles déterminées. Aux axiomes mathématiques correspondent certaines de ces formules et à l'inférence matérielle les règles selon lesquelles ces formules se suivent les unes les autres.

Cette manière de voir sera tellement discutée que David Hilbert précisera sa position en 1927 [Hil28] :

> Voyons maintenant de quoi il retourne à propos de l'accusation de faire dégénérer les mathématiques en un jeu. [...] Ce jeu de formules permet d'exprimer d'une façon homogène tout le contenu de pensée de la science mathématique et de le dérouler en plaçant en relief les relations entre les théories et les faits mathématiques. [...] Ce jeu de formules s'effectue selon certaines règles déterminées dans lesquelles s'exprime la technique de notre pensée. Ces règles forment un système fermé qu'il est possible de découvrir et de décrire définitivement. L'idée maîtresse de ma théorie de la démonstration n'est rien d'autre que de dépeindre l'activité de notre entendement

> et de dresser un protocole des règles suivant lesquelles notre pensée procède réellement.

4.2.3.2 L'axiomatique comme jeu

PHILIP MIROWSKI [Mir92] prétend qu'il existe un homéomorphisme structurel entre le programme formaliste et l'idée même d'un jeu régi par des règles qui en garantissent le bon déroulement et qui font mouvoir des pions dont la référence sémiotique est indifférente. Ils ont en commun d'être essentiellement finitistes : le jeu comme la preuve se construisent en un nombre fini d'étapes selon des règles définies. Le but espéré des deux théories est le même : savoir comment se déroule cette activité si un être au-dessus des faiblesses de l'intellect humain prend des décisions idéales. Elles sont toutes les deux statiques en ce qu'elles ne nous donnent en l'état pas de conseil effectif pour jouer ou prouver. Ainsi, MIROWSKI prétend, contre STANISLAS ULAM [Ula58] et bien d'autres commentateurs

> qu'il est probable que le programme formaliste se prête plutôt facilement à une notion d'axiomatisation des jeux, et que l'affliction de V. NEUMANN au vu de l'affirmation de FRÉCHET que BOREL devrait être considéré comme l'inventeur de la théorie des jeux s'explique plutôt ainsi que par un ego blessé.

Finalement, on peut rapprocher l'intérêt ravivé pour la théorie des jeux après 1935 du vide qu'a créé dans la vie mathématique de V. NEUMANN le théorème de GÖDEL. Ainsi, alors qu'il dévouait auparavant la moitié au moins de son temps au programme de HILBERT, il disait lui-même qu'après les articles de GÖDEL sur l'indécidabilité et l'incomplétude de toute théorie arithmétique, il ne s'embarrasserait plus à lire des articles en logique symbolique.

4.2.4 Le lien avec la mécanique quantique

4.2.4.1 Les motivations de V. NEUMANN

On sait que les années 1927–1928–1929 furent les années de travail les plus intenses de V. NEUMANN. L'article *Sur la théorie des jeux de société* est la plus incongrue de toutes ses découvertes. Il est isolé dans son œuvre et même dans le contexte de la recherche des années vingt et trente. Les contacts avec BOREL avaient été rares. Pour l'anecdote, ils avaient commencé lorsque V. NEUMANN, à l'âge de 12 ans, lut ses *Leçons sur la théorie des fonctions*. Ils s'arrêtèrent à la publication de sa note [Neu28b] dans les *Comptes rendus de l'académie des sciences*. Aucun article sur le sujet ne parut avant la contribution de JEAN VILLE en 1938, à part le livre de vulgarisation de RENÉ DE POSSEL [Pos37] sur les « jeux de hasard et de réflexion ».

ROBERT J. LEONHARD a conclu après une étude fine [Leo92] que jusqu'à la parution du livre *Théorie des jeux et comportement économique* [NM44], la théorie des jeux n'avait pas de public naturel : il n'y eut pas de communauté de théoriciens des jeux avant la fin de la Deuxième guerre mondiale qui auraient pu développer ou échanger des idées. Ce n'est d'ailleurs pas le livre de v. Neumann et d'Oskar Morgenstern qui a lui-même ravivé l'intérêt de la théorie, mais les applications militaires du théorème du minimax. Comment expliquer alors l'intérêt de v. Neumann pour les jeux ? Il existe quelques pistes biographiques, mais elles n'ont pas pu être déterminantes en 1926.

4.2.4.2 Le caractère stochastique des jeux

Or l'article lui-même donne une indication intéressante :

> Alors qu'on a éliminé le hasard (par introduction des espérances et la suppression des tirages) des jeux de société, il est réapparu tout seul : même si la règle du jeu ne contient aucun élément aléatoire (*i. e.* pas de tirages d'urnes), il est devenu irrémédiablement nécessaire de considérer à nouveau l'élément aléatoire dans l'énoncé des règles de conduite des joueurs. L'aléatoire (le hasardeux, le statistique) est si profondément ancré dans l'essence du jeu (sinon dans l'essence du monde) qu'il n'est pas nécessaire de l'introduire artificiellement par des règles de jeu : même s'il n'y en a aucune trace dans la règle formelle du jeu, il se fraie lui-même sa voie.

John v. Neumann, en se référant au monde, pense évidemment à la mécanique quantique, dont il est en train d'élaborer les fondements mathématiques : il a d'ailleurs démontré que le caractère stochastique de la mécanique quantique était irréductible et ne pouvait être ramené à des variables « cachées » [Neu32].

On peut penser que son dessein à long terme était de créer pour les sciences sociales un outil mathématique comparable à celui qu'il est en train d'élaborer pour la nouvelle physique de Niels Bohr et de Werner Heisenberg. Il voulait réaliser le rêve de Leibniz et édifier une théorie de la rationalité qui aurait le même effet sur le vieux concept d'utilité du 19e siècle que la théorie spectrale sur la mécanique classique. Il écrit :

> Et en fin de compte, n'importe quel événement, avec des circonstances extérieures données et des acteurs donnés (dont on présuppose la liberté absolue d'entreprise), peut être traité comme un jeu de société, si on considère sa rétroaction sur les acteurs.

Mais v. Neumann vise déjà le domaine de l'économie nationale : la théorie des jeux doit permettre de prévoir et de simuler le comportement, « pour des circonstances extérieures données, de l'*homo œconomicus* absolument égoïste. »

Quand on opposait à la théorie des jeux qu'elle était statique en ce qu'elle ne permettait pas de changer de stratégie au cours d'une partie, v. Neumann répondait qu'il était futile de tenter de construire une théorie dynamique aussi longtemps que la statique n'était pas comprise, comme cela fut le cas en physique.

En fait, ses derniers travaux [Neu48] et [Neu54a] traitaient du calcul effectif du minimax par un algorithme d'une complexité en $O(m^2 n \log(mn))$.

4.3 *Über ein ökonomisches Gleichungssystem*

4.3.1 Avant l'article de v. Neumann

4.3.1.1 Le modèle de Walras

Comme l'explique Kenneth J. Arrow [Arr89],

> Le concept d'équilibre général, que toutes les parties de l'économie sont interconnectées de manière inhérente et nécessaire, est implicite chez les économistes classiques, Adam Smith, Ricardo et leurs successeurs. Mais c'est dans l'œuvre de Léon Walras [Wal74], comme chacun sait, qu'il apparaît pour la première fois de manière explicite et que quelqu'un souligne son importance.

En effet, les économistes classiques pensaient que le prix de chaque bien était déterminé par les prix des biens qui ont servis à sa production. L'économie se résolvait dans un système d'équations dont les données sont les prix des facteurs de production, travail, terre et capital, et les inconnues les prix restants. Arrow souligne que « ce système était inconsistant dans le traitement des facteurs primaires ». Leur prix n'est pas indépendant des autres prix : par exemple, le travailleur se nourrit en achetant des produits alimentaires.

À la recherche d'un nouveau modèle, le philosophe, mathématicien et économiste Antoine Augustin Cournot [Cou38] introduit en 1838 les fonctions d'offre et de demande : elles expriment l'offre et la demande d'un bien en fonction de son prix. L'équilibre serait atteint lorsque leurs graphes se croisent. Walras remarqua justement que les fonctions d'offre et de demande d'un marché dépendaient en fait aussi des prix en usage dans d'autres marchés. Mais il ne développa pas d'outil mathématique autre que le dénombrement des équations et des inconnues (s'il y a égalité, le système aurait une solution) et ne se pose manifestement pas la question de l'*existence* de cet équilibre.

L'*homo œconomicus* forme l'objet d'étude. Vilfredo Pareto le décrit comme suit :

> Comme la mécanique rationnelle considère des points matériels, l'économie pure considère l'*homo œconomicus*. C'est un être abstrait sans passions ni sentiments recherchant en toute chose le maximum de plaisir, ne s'occupant d'autre chose que de transformer les uns en les autres les biens économiques. [...] Les économistes ne prétendent pas que le véritable homme soit un *homo œconomicus*, de même qu'il ne viendrait à l'idée d'aucun connaisseur de la mécanique pure de considérer les corps véritables comme identiques avec ceux que traite la mécanique rationnelle. Les deux séparent simplement, par abstraction, certaines parties de la véritable apparition des autres parties et l'étudient isolément.

4.3.1.2 Le modèle de Cassel

L'économiste suédois Gustav Cassel publie en 1923 *La théorie de l'économie sociale* [Cas23], qui contient une théorie de l'équilibre simplifiée à partir du modèle de Walras. Les fonctions de demande de chaque bien sont données, ainsi que les fonctions d'offre de chaque facteur primaire. Tous les biens sont produits par des facteurs primaires selon des proportions fixées.

Le « principe de rareté » des facteurs primaires joue alors un rôle fondamental : à concurrence totale, les profits sont nuls pour chaque activité et les prix des facteurs primaires déterminent directement les prix des biens. Or la demande de biens entraîne entraîne à travers leur production une demande de facteurs primaires selon des proportions préétablies. Finalement, les prix des facteurs primaires déterminent donc la fonction de demande des facteurs primaires.

Pour Cassel, cette économie atteint son équilibre lorsque la demande et l'offre des facteurs primaires coïncident. Formulons le modèle en termes mathématiques. Soient donc R_j l'offre du facteur j, $1 \leq j \leq r$, et a_{ij} la proportion du facteur j utilisée dans la production d'une unité du bien i, $1 \leq i \leq n$. Soit S_i le nombre d'unités de i produites. Si on veut alors que l'offre du facteur j soit égale à sa demande, on obtient les r équations

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} S_i = R_j \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq j \leq r.$$

Par la concurrence entre entreprises, chaque production est sans profit : si q_j est le prix du facteur primaire j et p_i celui du bien i, cela donne

$$p_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} q_j.$$

Les fonctions de demande $D_i(p_1, \ldots, p_n)$ du bien i étant données, on a

$$D_i = S_i \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ainsi, nous obtenons $n+r$ équations pour les $n+r$ inconnues $S_1, \ldots, S_n, q_1, \ldots, q_r$. En conséquence, on peut penser en première approximation que le système est déterminé.

Cassel étendra son modèle au cas d'une économie uniformément croissante, c'est-à-dire qu'à chaque unité de temps, les prix des facteurs primaires qui entrent dans la production à l'unité de temps suivante augmentent à un taux constant et uniforme.

Abraham Wald, un des participants du *Mathematische Colloquium* de Karl Menger, a explicitement étudié ce type de systèmes [Wal35]. Selon Arrow, il est clair que le modèle étudié par v. Neumann en est aussi dérivé : comme on le verra, les ressemblances sont nombreuses.

4.3.1.3 La réaction du *Mathematisches Colloquium*

Le *Mathematische Colloquium*, dirigé par Karl Menger, le fils de l'économiste et fondateur de l'école autrichienne de la *Nationalökonomie* Carl Menger, est un des nombreux cercles de réflexion viennois de l'entre-deux-guerres. Ses participants étaient en contact notamment avec le séminaire économique de H. Mayer et avec le *Wiener Kreis*, dont Menger était un membre. De plus, celui-ci s'intéressait profondément aux questions de fondement des mathématiques, comme en témoignent deux articles [Men28] et [Men30].

C'est dans ce séminaire que s'est développée l'idée de la nécessité d'une démonstration pour l'existence d'un équilibre économique. Le problème est pourtant déjà ancien à cette époque : en effet, déjà le modèle de Wieser, en 1889, pose un problème de non-contradiction. Ce modèle avait pour but de déterminer la valeur de chaque facteur primaire employé dans la production des biens : chaque bien donne lieu à une équation qui exprime sa production à partir des facteurs primaires, et il convient de résoudre ce système d'équations. Or il arrive facilement que le nombre de biens soit supérieur au nombre de facteurs primaires. Dans ce cas, le système n'a pas de solution ! En cherchant à résoudre ce problème, il semble que les membres du *Colloquium* aient pensé à considérer les modèles plus élaborés de Walras et Cassel.

L'idée maîtresse du modèle de Walras est de considérer deux systèmes partiels, dont le premier exprime la valeur des facteurs primaires en fonction des quantités de biens offertes et le deuxième l'égalité de la demande des facteurs primaires nécessaires à la production des biens et de leur offre. Ensemble, ces deux systèmes contiennent autant d'inconnues que d'équations et on échappe à la contradiction précédente.

Selon Lionello Punzo [Pun89], cette idée, reprise par Cassel, n'a pas convaincu le groupe autour de Karl Menger : chaque système partiel est soit sous-déterminé soit surdéterminé. Dès qu'on ne les considère pas dans leur interdépendance, on obtient, comme l'explicite H. v. Stackelberg [Sta33], des contradictions : il y a des solutions du système sous-déterminé qui rendent le système surdéterminé irrésoluble. L'économiste H. Neisser montre de plus que le modèle de Cassel peut produire des prix négatifs et donc des solutions non viables [Nei32].

En réalité, écrit Punzo, Cassel a cherché à « décrire un état qui est interprété de manière théorique comme l'équilibre d'un système ». Son système d'équations n'a pas pour but de déterminer quels biens et quels facteurs de production ont un prix et lesquels sont libres, mais de déterminer le prix des biens qui en ont un. Ainsi, les contradictions que nous venons de voir ne mettraient pas en cause sa modélisation, mais les données du système — il faut éliminer les biens libres et recommencer le calcul !

4.3.1.4 Les démonstrations d'existence et la méthode axiomatique

Les membres du *Mathematische Colloquium* développent en réponse à ces contradictions une nouvelle conception d'équilibre économique : ils rejettent la justification empirique d'un modèle par l'*observation* et l'analyse, puisque, comme ils l'ont vu, certaines données plausibles peuvent le mener à la contradiction. Il s'agit de clarifier la structure des modèles en leur donnant une forme purement mathématique. Il faut explicitement désigner les objets primitifs comme les biens et les facteurs primaires. Chaque condition sur ces objets est alors traitée comme un axiome auquel ils doivent suffire. Alors qu'auparavant les équations mathématiques ne faisaient qu'illustrer l'état dans lequel le système était supposé être, elles exercent à présent une coercition sur des variables : elles figent dans un certain état des données qui pourraient varier librement.

Les modèles deviennent donc des théories abstraites dont le rapport à la réalité est encore à établir. Leur cohérence signifie alors la possibilité logique d'un état qui n'a plus la prétention d'être réel. WALD écrit

> [Dès qu'on en a montré la cohérence] on peut seulement faire un reproche à une théorie, qu'elle travaille avec des hypothèses irréelles, et que la théorie n'est donc pas applicable. Il faut avouer que dans nombre de domaines de l'économie mathématique on travaille avec des abstractions très poussées et qu'on ne peut pas parler d'une bonne approximation de la réalité.

Dès lors, un modèle n'est *a priori* pas plus vrai qu'un autre et c'est par l'étude de la variété des modèles — et non de l'étendue ou de la pertinence des données — que l'économiste approchera la réalité.

En premier lieu, il faut savoir traduire les énoncés mathématiques en assertions économiques, *i. e.* il faut établir un dictionnaire. La justification du modèle vient alors *a posteriori*, par la démonstration d'existence d'un équilibre : elle exprime que les axiomes ne se contredisent pas. C'est seulement alors qu'on choisira parmi la variété de modèles celui qui concorde le mieux avec le système d'événements considéré. Ces idées sont en parfait accord avec les conceptions tant d'ERNST MACH que de DAVID HILBERT.

Ainsi, non pas la recherche, mais la simple existence de l'équilibre acquiert une importance primordiale dans l'étude des modèles économiques. Elle seule rend un modèle plausible. C'est ABRAHAM WALD [Wal36], membre du *Colloquium*, qui a publié en 1935 la première preuve d'existence d'équilibre économique pour le modèle de K. SCHLESINGER [Sch35], du type de celui de CASSEL. Mais cette approche ne permet pas en général de *calculer* l'équilibre dont on a démontré l'existence, de même qu'une démonstration de cohérence de la théorie axiomatique des ensembles ne permet pas de démontrer les théorèmes.

4.3.2 De la théorie des jeux à la microéconomie

Neuf ans séparent les deux articles de V. NEUMANN. Les notions d'équilibre et de minimax se ressemblent par le contraste entre leur caractère statique et la matière faite de mouvements, d'échanges et de tactiques des théories respectives. Nous avons vu que V. NEUMANN pensait, à l'instar d'ÉMILE BOREL, que les concepts de la théorie des jeux devaient trouver leur application dans la vie réelle, et qu'il pensait plus particulièrement à l'économie nationale.

Dans cette optique, la théorie des jeux est le pendant microéconomique des théories macroéconomiques de l'équilibre. Or, alors que le concept du minimax découle élementairement du concept de jeu, V. NEUMANN décrit l'économie comme un jeu à plus grande échelle. On peut s'imaginer deux protagonistes dont, comme on verra, l'un tente d'éliminer les processus déficitaires, l'autre les biens non vendus. L'un cherche à maximiser le profit par une répartition des prix, l'autre à minimiser la consommation par une répartition des processus de production.

Mais ce n'est pas ainsi que v. Neumann fit le rapprochement. Il semble que la présentation de la théorie générale de l'équilibre économique par Jacob Marschak au séminaire interdisciplinaire sur les applications des mathématiques de Leo Szilard attira en premier l'attention de v. Neumann sur cette question. Marschak se rappelle de son excitation : il en réalisait les liens avec sa théorie des jeux, qui était restée en sommeil depuis la publication de son article. Nous verrons en effet que les deux démonstrations sont étroitement liées.

Les formalismes de Marschak lui rappelaient la *forme* des hypothèses du théorème du minimax. Dans son article de 1937, v. Neumann fit le rapprochement inverse par un biais à nouveau formel.

> La solution [du probleme de l'existence de l'équilibre] est bizarrement liée à un problème apparaissant dans la théorie des jeux traité ailleurs. Le problème là-bas est un cas spécial de [celui traité ici] et est résolu ici d'une nouvelle manière. En fait, si $a_{ij} = 1$ [...], $\Phi(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j$ et coïncide donc avec [la fonction de gain g].

Le *sens* de ce rapprochement semble donc lui échapper, alors que tout laisse à penser que la similitude des formes fut déterminant dans l'élaboration de l'article !

4.3.3 L'article de v. Neumann

L'article *Sur un équilibre économique et une géneralisation du théorème du point fixe de Brouwer* [Neu37] a été publié en 1937. Il avait été présenté au séminaire de mathématiques de Princeton en hiver 1932. Il décrit d'abord un modèle de l'économie inspiré des travaux de Cassel et définit l'équilibre correspondant. Il passe alors à une démonstration très fine de l'existence générale d'un tel équilibre.

4.3.3.1 Le modèle de v. Neumann

Les données fondamentales du modèle sont les biens et les processus de production qui transforment ces biens en d'autres biens : on ne distingue plus les facteurs de production comme des biens particuliers mais on considère tacitement que les facteurs naturels de production comme le travail sont disponibles en quantité infinie. V. Neumann ne fait pas intervenir de fonction de demande de bien finale comme donnée initiale : la seule demande à une étape donnée provient des biens nécessaires à la production lors de l'étape suivante. Toute consommation s'effectue par les processus.

En effet, il introduit le temps de production : chaque processus est censé prendre une unité de temps. Il fait les deux remarques suivantes : si on veut représenter un processus qui dure n unités, on l'écrit comme une suite de n processus qui n'en durent qu'une ; si on veut faire intervenir les étapes de la déterioration d'un produit, on fait correspondre à chaque étape un bien différent.

Les questions auxquelles est censé répondre son modèle sont :

> (*i*) Quels processus vont effectivement être utilisés ? (*ii*) Avec quelle vitesse la quantité de biens va-t-elle augmenter ? (*iii*) Quels prix en résultent ? (*iv*)

Quel sera le taux d'intérêt ? [Neu37]

Soient donc n biens B_i produits à l'aide de m processus de production P_j : ceux-ci transforment des quantités notées a_{ij} de B_i, $1 \leq i \leq n$, en quantités notées b_{ij} de B_i, $1 \leq i \leq n$. À chaque bien B_i correspond un prix x_i et à chaque processus P_j correspond une intensité de production y_j.

Les données du modèle sont les a_{ij} et b_{ij} ; les inconnues à déterminer sont les x_i, y_j, α et β, mais on ne s'intéresse en fait qu'aux rapports entre les x_i et entre les y_j. On peut donc normaliser x et y en posant $x_1+\cdots+x_n = y_1+\cdots+y_m = 1$. Le nombre d'inconnues est donc $n+m$.

À ce stade, V. Neumann est en mesure de définir l'équilibre que doit atteindre son économie. On veut que la proportion entre prix $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ reste égale au cours du temps, *i. e.* si x_i et x'_i représentent les prix à une unité de temps d'intervalle, alors

$$\frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \cdots = \frac{x'_m}{x_m} = \alpha,$$

avec α taux d'intérêt constant et uniforme. De surcroît, on veut que la proportion entre intensités y_j reste inchangée et que celles-ci augmentent avec un taux β. On recherche évidemment les solutions telles que x_i, $y_j \geq 0$ et telles que ni tous les x_i ni tous les y_j ne soient nuls.

V. Neumann établit alors les *inégalités* suivantes qui doivent être réalisées à l'équilibre :

$$\forall\ 1 \leq j \leq m \quad \begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i ; \\ \text{s'il y a inégalité stricte, alors } y_j = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\forall\ 1 \leq i \leq n \quad \begin{cases} \beta \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq \sum_{j=1}^{m} b_{ij} y_j ; \\ \text{s'il y a inégalité stricte, alors } x_i = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Les premières signifient qu'à l'équilibre, aucun processus ne fait de profit ; s'il est déficitaire, son intensité est nulle. Les deuxièmes veulent dire qu'on ne peut consommer plus du bien B_i que ce qui en a été produit ; si la demande est strictement inférieure à l'offre, son prix est nul.

Zeuthen [Zeu32] fut le premier à réaliser l'idée fondamentale de formuler des inégalités à la place d'égalités, mais il semble que v. Neumann ait eu la même idée indépendamment. Il avait découvert que leur usage permettait de concrétiser le principe de rareté décrit plus haut de la manière suivante : à la place de l'égalité $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} S_i = R_j$, on considère l'inégalité $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} S_i \leq R_j$, et une inégalité stricte entraîne $q_j = 0$.

Il y a ici dualité complète entre prix et intensités de production ; l'idée fondamentale sous-jacente à l'usage des inégalités est celle *d'optimisation* des prix et intensités. Si un processus n'est pas rentable, si un produit ne se vend pas, il est éliminé du circuit économique.

Les $n+m$ inconnues sont donc soumises à $n+m$ conditions, ce qui est un gage de bonne réussite — mais comme nous avons affaire à des *inégalités*, nous ne pouvons pas appliquer les critères habituels.

Pour mener ses calculs, il va supposer que pour tous i et j $a_{ij} > 0$ ou $b_{ij} > 0$. Cette hypothèse n'est pas très forte, puisqu'on peut néanmoins considérer a_{ij} ou b_{ij} arbitrairement petits.

Comme on a supposé qu'au moins une intensité et qu'au moins un prix sont non nuls, on a

$$\alpha = \max_{1 \leq j \leq m} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i} \quad \text{et} \quad \beta = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij} y_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} y_j}.$$

Si on note alors

$$\Phi(x,\, y) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij} x_i y_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j}$$

le quotient de deux formes bilinéaires défini sur $[0,\, +\infty[^n \times [0,\, +\infty[^m$, on constate que si le couple de vecteurs $(x^0,\, y^0)$ est solution, alors $\Phi(\cdot,\, y^0)$ atteint son maximum en x^0 et $\Phi(x^0,\, \cdot)$ atteint son minimum en y^0. En effet, soit y_j^0 est nul, soit $\dfrac{\sum_i b_{ij} x_i}{\sum_i a_{ij} x_i} = \alpha$; de même pour le minimum. Il s'agit donc à nouveau de trouver un col, mais dans un cas plus élaboré que celui d'une simple forme bilinéaire.

On conclut alors que $\Phi(x^0,\, y^0) = \alpha = \beta$. De plus, comme Φ prend nécessairement, par un petit jeu d'inégalités, la même valeur en tout col, α et β sont uniquement déterminés. Pour des raisons plus ou moins subtiles, il n'en est pas de même pour x et y.

4.3.3.2 Démonstration par le théorème du minimax

John v. Neumann démontre dans son article un théorème du point fixe pointu pour en déduire l'existence d'un col pour Φ. Des auteurs ultérieurs remarqueront que ce détour était en quelque sorte inutile : il aurait suffi de la variation suivante du théorème du minimax pour faire aboutir la démonstration.

Soit $\Phi(x,\, y) = \dfrac{f(x,\, y)}{g(x,\, y)}$ le quotient de deux formes bilinéaires avec $g \neq 0$. Alors, par le théorème du minimax, $f - tg$ admet un col pour tout t. La valeur de f au col est une fonction continue de t : or, comme cette valeur admet nécessairement des valeurs positives et négatives pour certains choix de t, il existe t et $(x_0,\, y_0)$ tels que cette valeur de f au col $(x_0,\, y_0)$ soit nulle, *i. e.*

$$\min_y (f - tg)(x_0,\, y) = \max_x (f - tg)(x,\, y_0) = (f - tg)(x_0,\, y_0) = 0$$

et donc, en divisant respectivement par $\max_y g(x_0, y)$ et $\min_x g(x, y_0)$ et en additionnant t,

$$\min_y \frac{f(x_0, y)}{g(x_0, y)} = \max_x \frac{f(x, y_0)}{g(x, y_0)} = t.$$

On a donc trouvé un col pour Φ.

4.3.3.3 Démonstration par le théorème du point fixe

Formulons l'existence d'un col en termes d'ensembles : notons

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n;\, x \geq 0 \text{ et } x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

et

$$T = \{y \in \mathbb{R}^m;\, y \geq 0 \text{ et } y_1 + \cdots + y_m = 1\}.$$

Notons V (resp. W) l'ensemble des (x, y) tels que 2.2 (resp. 2.3). Il s'agit simplement de démontrer que l'intersection de V et W n'est pas vide. Le théorème suivant permet alors de conclure : les ensembles $Q(x)$ et $P(y)$ qui interviennent dans l'hypothèse sont naturellement convexes et non vides.

Théorème 4.7 (du point fixe de v. Neumann**)** *Soient $S \subseteq \mathbb{R}^m$ et $T \subseteq \mathbb{R}^n$ des convexes fermés bornés non vides. Soient V et W fermés dans $S \times T = \{(x, y);\, x \in S \text{ et } y \in T\}$. Si $Q(x) = \{y;\, (x, y) \in V\}$ et $P(y) = \{x;\, (x, y) \in W\}$ sont des convexes non vides pour tous $x \in S$ et $y \in T$, alors $V \cap W \neq \emptyset$.*

Démonstration. Pour tous $x \in S$ et $y \in T$, on peut choisir des points $Y(x) \in Q(x)$ et $X(y) \in P(y)$. Si on pouvait choisir ces fonctions X et Y *continues*, alors on pourrait appliquer le théorème du point fixe de L. E. J. Brouwer [Bro11] de la manière suivante : posons $f = X \circ Y : S \to S$. Comme S est convexe fermé borné, f a un point fixe x tel que $x = f(x) = X(Y(x))$. Soit $y = Y(x)$: alors $x = X(y)$ et $(x, y) \in V \cap W$.

Or, remarque v. Neumann, ceci est en général impossible ! La partie la plus délicate consiste alors à construire deux fonctions continues dont l'image est proche de V et de W respectivement. Soit d la distance euclidienne ; nous noterons aussi ainsi la distance de deux ensembles. Soient $\varepsilon > 0$ et $w^\varepsilon(x, x') = \max(0, 1 - \frac{1}{\varepsilon} d(x, x'))$. $w^\varepsilon(x, x') = 0$ si $d(x, x') \geq \varepsilon$. Soit $x \in S$.

$$Y^\varepsilon(x) = \frac{\int_S Y(x') w^\varepsilon(x, x')\, dx'}{\int_S w^\varepsilon(x, x')\, dx'}$$

est le barycentre pondéré par $w^\varepsilon(x, x')\, dx'$ des $Y(x')$ avec $d(x, x') < \varepsilon$. Comme $Y(x') \in T$ et que T est convexe, $Y^\varepsilon(x) \in T$. Comme $w^\varepsilon(x, \cdot)$ est continue, Y^ε est continue sur S.

Soit $\delta > 0$ donné. Démontrons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d((x, Y^\varepsilon(x)), V) < \delta$ pour $x \in S$.

> Sinon, il existe $\delta > 0$, une suite de $\varepsilon_i > 0$ avec $\varepsilon_i \to 0$ et une suite de $x_i \in S$ tels que
>
> $$d((x_i, Y^{\varepsilon_i}(x_i)), V) \geq \delta.$$

Pour tout x' tel que $d(x_i, x') \leq \frac{\delta}{2}$, on a avec $y \in Q(x')$

$$d(Y^{\varepsilon_i}(x_i), y) \geq d((x_i, Y^{\varepsilon_i}(x_i)), (x', y)) - d((x', y), (x_i, y)) \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2},$$

c'est-à-dire $d\,(Y^{\varepsilon_i}(x_i), Q(x')) \geq \frac{\delta}{2}$.

La suite des x_i est bornée et on peut en extraire une sous-suite convergente $x'_i \to x^*$ telle que $|x'_i - x^*| \leq \frac{\delta}{2}$. Alors $d\,(Y^{\varepsilon_i}(x'_i), Q(x^*)) \geq \frac{\delta}{2}$.

$Q(x^*)$ étant convexe, l'ensemble des points à distance strictement inférieure à $\frac{\delta}{2}$ de $Q(x^*)$ l'est aussi. Or $Y^{\varepsilon_i}(x'_i)$, barycentre de points $Y(x)$ tels que $d(x'_i, x) \leq \varepsilon_i$, n'appartient pas à cet ensemble. On peut donc choisir x''_i tel que $d(x'_i, x''_i) \leq \varepsilon_i$ et $d\,(Y(x''_i), Q(x^*)) \geq \frac{\delta}{2}$. Comme $d(x'_i, x''_i) \to 0$, $x''_i \to x^*$.

La suite des $Y(x''_i)$ est bornée et a un point d'adhérence y^*. Alors (x^*, y^*) est adhérent aux points $(x''_i, Y(x''_i))$ de V et appartient donc à V, *i. e.* $y^* \in Q(x^*)$. Or $d\,(Y(x''_i), Q(x^*)) \geq \frac{\delta}{2}$. C'est absurde.

Construisons de la même manière une fonction continue X^η telle que

$$d\,((X^\eta(y), y), W) < \delta \quad \text{pour tout } y \in T.$$

En appliquant le théorème du point fixe à $X^\eta \circ Y^\varepsilon$, on obtient x_δ tel que $x_\delta = X^\eta(Y^\varepsilon(x_\delta))$. Soit $y_\delta = Y^\varepsilon(x_\delta)$: alors $x_\delta = X^\eta(y_\delta)$. La distance de (x_δ, y_δ) à V et à W est donc strictement inférieure à δ, *i. e.* $d(V, W) < 2\delta$. Comme $\delta > 0$ est arbitraire, $d(V, W) = 0$; or V et W sont fermés bornés et donc $V \cap W \neq \emptyset$.

4.3.3.4 Une nouvelle démonstration du théorème du minimax

Gardons les notations du 2.1.2 et du paragraphe précédent : soit f une fonction de $[0, 1]^p \times [0, 1]^q$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant (C). Soient

$$S = \{\xi \in [0, 1]^p;\ \xi_1 + \cdots + \xi_p \leq 1\} \quad \text{et} \quad T = \{\eta \in [0, 1]^q;\ \eta_1 + \cdots + \eta_q \leq 1\}.$$

Posons

$$V = \{(\xi, \eta) \in S \times T;\ f(\xi, \eta) = \min_{\eta \in T} f(\xi, \eta)\}$$

et

$$W = \{(\xi, \eta) \in S \times T;\ f(\xi, \eta) = \max_{\xi \in S} f(\xi, \eta)\}.$$

Ce sont des fermés.

$$Q(\xi) = \{\eta;\ f(\xi, \eta) = \min_{\eta \in T} f(\xi, \eta)\} \quad \text{et} \quad P(\eta) = \{\xi;\ f(\xi, \eta) = \max_{\xi \in S} f(\xi, \eta)\}$$

ne sont pas vides puisque $f(\xi, \cdot)$ et $f(\cdot, \eta)$ atteignent leurs extréma sur les compacts S et T. Ils sont convexes par (C). Par le théorème précédent, on a donc $V \cap W \neq \emptyset$ et f admet un col.

4.3.3.5 Minimax et équilibre économique

Nous avons vu que l'existence d'un équilibre pour le modèle de v. Neumann peut se déduire du théorème du minimax pour les formes bilinéaires. Celui-ci se démontre à son tour facilement par l'argument de Jean Ville [Vil38]. Pouvons-nous en conclure que dans les deux cas, les démonstrations de v. Neumann représentaient une complication subtile mais inutile par rapport au but visé ?

Kenneth J. Arrow [Arr89], pour sa part, pense que démontrer l'existence d'un équilibre par le théorème du point fixe était superflu — tout du moins avant que les techniques nouvelles qu'il contient ne trouvent usage dans des théorème d'existence plus élaborés. Il a raison d'un point de vue « économique », mais, comme v. Neumann le remarque lui-même.

> c'est une erreur répandue et tentante que de montrer les étapes ultérieures dans une évolution mathématique comme étant beaucoup plus évidentes et convaincantes après une découverte qu'elles ne l'étaient auparavant.

En effet, dix ans ont passé avant que Ville ne découvre la connection entre minimax et théorème de séparation de corps convexes.

Tant le théorème de séparation que la démonstration d'existence d'un col par le théorème du minimax ne s'appliquent que dans le contexte des formes bilinéaires, alors que v. Neumann élabore ses arguments pour des cas beaucoup plus généraux. Il y a dans les deux articles de 1928 et de 1937 une égale distance entre la simplicité des applications et la généralité des énoncés.

V. Neumann semble avoir cherché, à partir de l'énoncé du minimax, puis à partir d'une certaine formulation de l'existence d'un équilibre, le contexte optimal dans lequel ces propositions se démontrent. Dans un premier temps, plus les hypothèses envisagées sont générales, plus les arguments prennent du relief et avouent leur force. Ce réflexe correspond à la formation de v. Neumann à l'école de Hilbert et à la recherche, pour un théorème donné, des axiomes les plus faibles et les plus adéquats qui le rendent vrai.

Alors que l'argument de Ville permet de comprendre avec précision une propriété des fonctions bilinéaires, le but de v. Neumann ets de saisir l'essence des phénomènes de minimax et de col.

Cette optique permet de comprendre l'évolution entre 1928 et 1937 : les techniques du théorème du point fixe 2.7 ont pour but d'affiner et d'expliciter les arguments à l'œuvre dans sa démonstration du théorème du minimax. Les $Q(\xi)$ et $P(\eta)$ du 2.3.3.4 sont les K_ξ et L_η du 2.2.2.3 dans des espaces à plusieurs dimensions : ils s'écrivent de la même manière et leurs propriétés se démontrent par les même arguments. La construction de H_ξ correspond à celle de la fonction $f = X \circ Y$ du 2.3.3.3 : $f(x)$ est défini comme le choix d'un élément de $P(y)$ pour quelque $y \in Q(x)$; H_ξ est défini comme l'ensemble des éléments des L_η pour quelque $\eta \in K_\xi$!

Tout cela explique pourquoi le théorème du point fixe de v. Neumann s'applique aussi bien à la démonstration du théorème du minimax : il ne fait qu'isoler les hypothèses essentielles cachées dans les formulations du 2.3.3.4.

4.3.4 L'analogie thermodynamique

Souvent, l'analogie guide le mathématicien dans son intuition. Parfois, elle est une découverte en elle-même, en ce que sa nature toujours formelle la rend surprenante. Dès lors, elle permet d'enrichir le vocabulaire de chaque domaine en tentant de créer les bons objets pour qu'il y ait une correspondance parfaite : on remplit les blancs laissés dans l'écriture de la correspondance par analogie. Elle permet de transférer des démonstrations et aussi des hypothèses d'une théorie à l'autre : la signification d'un énoncé formel peut être plus facile à saisir dans un « modèle » que dans l'autre. De surcroît, l'analogie permet de comprendre et de déceler la structure profonde de chacune des théories ; on discerne mieux les questions sous-jacentes.

Mais le caractère formel fait qu'elle peut aussi rester incomprise, mystérieuse pendant longtemps : ainsi existe une analogie flagrante entre deux problèmes, *i. e.* de deux fonctions et de deux questions, l'une apparaissant dans la théorie mathématique des modèles économiques, l'autre dans l'étude des phases hétérogènes en thermodynamique. Cette découverte tient à la double culture de chimiste et de mathématicien de John v. Neumann : il a étudié la chimie avec Ostwald, qui a traduit l'œuvre de Gibbs en allemand. Il a écrit dans son fameux article [Neu37]

> Une interprétation directe de la formule $\Phi(X, Y)$ serait hautement souhaitable. Son rôle se révèle être similaire à celui de potentiels thermodynamiques en thermodynamique phénoménologique. On peut émettre l'hypothèse que cette similitude persistera dans toute sa généralité phénoménologique (indépendamment de nos idéalisations restrictives).

Cette similitude apparaît seulement en adoptant la méthode axiomatique. Au demeurant, toute la théorie mathématique de l'équilibre économique de von Neumann semble s'être inspirée des travaux de J. W. Gibbs : certains de ses outils mathématiques en proviennent, comme la caractérisation des variations permises à partir d'un équilibre en termes d'inégalités et l'énonciation d'un critère de la forme du « minimax » pour l'existence d'un équilibre.

Mais on peut légitimement s'interroger : l'analogie est-elle uniquement formelle ? Quelle est donc la nature de cette similitude entre économie et thermodynamique chimique ? L'utilité d'une analogie au niveau formel n'est pas à nier, mais elle pose un rébus scientifique : peut-on transférer aussi la signification ? Quelles sont les significations de l'analogue, dans la deuxième théorie, d'objets de la première ? Quoi qu'il en soit, les travaux de certains (voir [Bro89]) montrent que la résolution de ce rébus est fertile.

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Questions de primauté et d'originalité

John v. Neumann s'inspira très souvent des idées d'autres scientifiques dans ses propres travaux pour les dépasser par sa clarté et sa fougue et en leur donnant un effet pratique. D'ailleurs, nombre de ses articles sont cosignés avec d'autres scientifiques. Cela l'amena à devoir parfois défendre leur originalité, comme en témoignent son progrès sur la théorie des jeux de Borel et la polémique subséquente avec Maurice Fréchet dans [Fré53] et [Neu53].

On peut en conclure d'un côté que son esprit était moins original que celui d'autres scientifiques comme Weyl, Hilbert ou plus récemment Grothendieck. Son activité avait besoin d'être déclenchée par un apport extérieur. D'un autre côté, il avait une faculté légendaire de juger la teneur des travaux des autres et de les mener jusqu'au bout de leur fertilité, souvent bien au-delà des espérances de leur auteur.

5.2 Les mathématiques de v. Neumann

5.2.1 Méthode axiomatique et formalisme

5.2.1.1 Méthode axiomatique

Selon Paul R. Halmos [Hal73],

> La "méthode axiomatique" est parfois mentionnée comme le secret du succès de v. Neumann. Dans ses mains, ce n'était pas pédanterie mais perception ; il arrivait aux racines du sujet en se concentrant sur les propriétés élémentaires (axiomes) dont dérivent toutes les autres. La méthode, en même temps, lui révélait les étapes à suivre pour aller des fondements aux applications.

5.2.1.2 Formalisme

Les travaux de v. Neumann montrent une propension à ramener très rapidement les questions posées à des équations et à des formalismes : il prend un soin exemplaire de toujours se placer dans un cadre rigoureux. Stanislaw Ulam a écrit au sujet de v. Neumann [Ula58] :

> Dans beaucoup de conversations sur des thèmes de la théorie des ensembles ou des domaines associés, v. Neumann semblait même penser formellement. La plupart des mathématiciens, lorsqu'ils traitent de problèmes dans ces domaines, paraissent avoir une approche intuitive basée sur des images géométriques ou presque tactiles d'ensembles abstraits, de transformations etc. V. Neumann donnait l'impression d'opérer séquentiellement par déductions purement formelles. Ce que je veux dire est que la base de son intuition, qui pouvait produire de nouveaux théorèmes et démonstrations autant que l'intuition « naïve », semblait être d'un type beaucoup plus rare. [...] Elle comprenait une complémentarité entre l'apparence formelle d'une collection de symboles et le jeu joué avec eux d'un côté, et une interprétation de leur sens de l'autre.

Chez v. Neumann, l'usage du formalisme en 1923 [Neu23] est en premier lieu une prise de position à l'intérieur des mathématiques, qu'il veut concrètes et univoques : il s'agit d'éviter toute entorse à la rigueur et tout symbole flou. Sa préoccupation pour une construction cohérente des concepts et la clarté du formalisme apparaît ainsi dès le début de sa carrière et vise à éviter les cercles vicieux.

Mais le formalisme devient également un gage d'efficacité. Nous avons vu combien la rigueur de v. Neumann a permis d'élaborer une axiomatique optimale pour la théorie des ensembles : le travail sur les signes permet d'affûter axiomes et notations.

Mais cette efficacité se déploie vraiment dans les mathématiques appliquées. La théorie des jeux telle que nous la connaissons n'aurait pas pu se développer si ses bases n'avaient été aussi clairement énoncées à l'intérieur des mathématiques. De même, l'usage des espaces hilbertiens en mécanique quantique a permis, malgré les critiques de Feyerabend, le développement d'un formalisme qui reste toujours d'actualité.

> On ne peut peut pas dire que v. Neumann ait fait avancer la théorie des quanta. Mais il a certainement rendu la discussion de ses fondements interminable et malaisée. En outre, les imprécisions qu'il évite au sein du formalisme réapparaissent dans la relation entre théorie et fait. [Fey75]

5.2.2 La valeur objective des mathématiques

V. Neumann a exprimé à plusieurs reprises que « toutes les idées ont leur origine empirique, même si la généalogie est parfois longue et obscure ». *A contrario*, « si une discipline mathématique s'éloigne trop loin de sa source empirique, elle est exposée à un grave danger ».

Dans un exposé sur *Le rôle des mathématiques dans les sciences et dans la société* [Neu54b], il explique qu'on ne peut pas néanmoins les réduire à une science empirique.

> Les mathématiques ont un rôle très important : celui d'établir certaines normes d'objectivité, certaines normes de vérité ; et il est très important qu'elles paraissent donner un moyen d'établir ces normes de manière indépendante de toute autre chose, indépendante de questions émotionnelles, indépendante de questions morales. Il est très important de mener à bien cette prise de conscience : que des critères objectifs de vérité sont possibles, qu'un tel but n'est pas contradictoire, n'est pas dans un certain sens inhumain. Cette exigence n'est ni évidente ni particulièrement ancienne, et ce prestige de la logique en tant que telle, de la science en tant que telle est probablement connectée avec le rôle des sciences dans notre vie et avec le rôle des mathématiques, dans sa forme complètement abstraite, dans les sciences.
>
> À nouveau, la vérité intrinsèque de ces propositions peut même être sujette à débats, mais il est très important que ces propositions puissent déjà être faites, que chacun puisse se faire une image précise et détaillée de leur contenu.

Les hésitations de v. Neumann ici rendent compte de l'effet dévastateur qu'a eu sur lui le théorème de Gödel !

5.2.3 Le rapport des mathématiques aux sciences appliquées

John v. Neumann a écrit dans son texte *The mathematician* :

> Lorsqu'une théorie mathématique s'éloigne beaucoup de sa source empirique, ou même plus, si c'est une seconde et troisième génération seulement indirectement inspirée des idées venant de la « réalité », elle est menacée de très graves dangers. Elle devient de plus en plus purement esthétisante, de plus en plus "l'art pour l'art". [...]
>
> Dans tous les cas, lorsque cette étape [de dégénérescence] est atteinte, le seul remède me semble être le retour rajeunissant à la source : la réinjection d'idées plus ou moins directement empiriques. Je suis convaincu que cela était une condition nécessaire pour conserver la fraîcheur et la vitalité du sujet, et que cela va également rester vrai dans le futur.

Chapitre 6

Appendices

6.1 Topologie élémentaire

Définition 6.1 *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.*
(1) *E est borné si la distance entre deux quelconques de ses éléments est bornée.*
(2) *Un ensemble O est ouvert dans E si pour tout $x \in O$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que O contienne tous les points de E à distance inférieure à ε.*
(3) *Un ensemble F est fermé dans E s'il contient toutes les limites dans E de suites de points dans F.*
(4) *On note $[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n; z = \lambda x + \mu y$ avec $\lambda + \mu = 1\}$ le segment d'extrémités $x, y \in E$.*
(5) *E est convexe si, pour tous $x, y \in E$, $[x, y] \subseteq E$.*
(6) *E est connexe s'il n'existe pas F, G fermés dans E tels que $F \cup G = E$ et $F \cap G = \emptyset$.*
(7) *E est compact si on peut extraire de toute suite d'éléments de E une sous-suite convergeant dans E.*

Proposition 6.2 *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.*
(a) *E est compact si et seulement si E est fermé et borné.*
(b) *Si E est compact, on peut extraire de tout recouvrement de E par des ouverts un recouvrement fini.*
(c) *Les intervalles sont connexes.*

6.2 Fonctions semi-continues

Définition 6.3 *f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en x si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \qquad |x' - x| < \eta \quad \Rightarrow \quad f(x') \geq f(x) - \varepsilon \text{ (resp. } f(x') \leq f(x) + \varepsilon).$$

On en déduit : si f est semi-continue inférieurement, alors $-f$ est semi-continue supérieurement et vice-versa ; si f est à la fois semi-continue inférieurement et supérieurement, alors f est continue.

Proposition 6.4 *Sur un intervalle fermé borné* $[a, b]$*, toute fonction* f *semi-continue inférieurement atteint sa borne inférieure* m*.*

Démonstration par l'absurde. Si f ne prend pas la valeur m sur $[a, b]$, alors on peut choisir pour tout $x \in [a, b]$ un ε_x et un η_x tels que $0 < \varepsilon_x < f(x) - m$ et

$$|x - x'| < \eta_x \quad \Rightarrow \quad f(x') \geq f(x) - \varepsilon_x > m.$$

Considérons la famille des intervalles ouverts $B_x = \{x'; |x' - x| < \eta_x\}$: c'est un recouvrement de l'intervalle $[a, b]$. Par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe une sous-famille finie $\{B_{x_i}\}_{i=1}^n$ qui recouvre déjà $[a, b]$. Mais alors on a pour tout x' un x_i tel que $|x' - x_i| < \eta_{x_i}$ et donc

$$\forall x' \; f(x') \geq \min_{1 \leq i \leq n} (f(x_i) - \varepsilon_{x_i}) > m,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que m est la borne inférieure de f. ∎

En passant de f à $-f$, on obtient le

Corollaire 6.5 *Sur un intervalle fermé borné, toute fonction semi-continue supérieurement atteint sa borne supérieure.*

Bibliographie

[Ack24] Wilhelm Ackermann. Begründung des "tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit. *Mathematische Annalen*, 93 :1–36, 1924.

[Arr89] Kenneth J. Arrow. Von Neumann and the existence theorem for general equilibrium. In *[Dor89]*, pages 15–28. 1989.

[Bor21] Émile Borel. La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, 173 :1304–1308, 1921.

[Bor24] Émile Borel. Sur les jeux où interviennent le hasard et l'habileté des joueurs. In *Théorie des probabilités*, pages 204–221. Hermann, 1924.

[Bor27] Émile Borel. Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, 184 :52–53, 1927.

[Bro11] Luitz Egbertus Jan Brouwer. Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71 :97–115, 1911.

[Bro28] Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 31 :374–379, 1928.

[Bro89] Andrew Brody. Economics and Thermodynamics. In *[Dor89]*, pages 141–148. 1989.

[Can95] Georg Cantor. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 46 :497, 1895.

[Cas23] Gustav Cassel. *La théorie de l'économie sociale*. 1923.

[Cav37] Jean Cavaillès. *Méthode axiomatique et formalisme*. Hermann, 1937.

[Cou38] Antoine Augustin Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. 1838.

[Dor89] Mohammed Dore (éd.). *John von Neumann and Modern Economics*. Clarendon, 1989.

[Fey75] Paul K. Feyerabend. *Against Method*. New Left Books, 1975.

[FN22] Michael Fekete and John von Neumann. Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 31 :125–138, 1922.

[Fra22] Abraham Fraenkel. Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 86 :230–237, 1922.

[Fré53] Maurice Fréchet. Émile Borel. *Econometrica*, 21 :95–99, 118–124, 1953.

[Fre76] Gottlob Frege. Briefwechsel mit David Hilbert. In *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Felix Meiner, 1976.

[Gen36] Gerhard Gentzen. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, 112 :493–565, 1936.

[Göd31] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37.1 :173–198, 1931.

[H+31] Hans Hahn et al. Diskussion zur Grundlegung der Mathematik am Sonntag, dem 7. Sept. 1930. *Erkenntnis*, 2 :135–149, 1931.

[Hal73] Paul Richard Halmos. The legend of John v. Neumann. *American Mathematical Monthly*, 80 :382–394, 1973.

[Hei80] Steve J. Heims. *John von Neumann and Norbert Wiener*. MIT Press, 1980.

[Hey34] Arend Heyting. *Mathematische Grundlagenforschung Intuitionismus Beweistheorie*. Springer, 1934.

[Hil99] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Festschrift zur Enthüllung des Gauß-Weber Denkmals Göttingen, 1899.

[Hil00] David Hilbert. Mathematische Probleme. *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Mathematik zu Göttingen*, 1900. Traduction de L. Laugel dans les *Comptes rendus du deuxième congrès international des mathématiciens*, Gauthiers-Villars, 1902, pages 58–114.

[Hil04] David Hilbert. Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. In *Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses*, 1904.

[Hil18] David Hilbert. Axiomatisches Denken. *Mathematische Annalen*, 78 :405–415, 1918. Traduction d'Arnold Reymond dans *L'enseignement mathématique*, 20 :122–136, 1918.

[Hil22] David Hilbert. Neubegründung der Mathematik. I. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1 :157–177, 1922. Traduction dans [Lar91], pages 111–130.

[Hil23] David Hilbert. Die logischen Grundlagen der Mathematik. *Mathematische Annalen*, 88 :151–165, 1923. Traduction dans [Lar91], pages 131–144.

[Hil26] David Hilbert. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95 :161–190, 1926. Traduction d'André Weil dans *Acta Mathematica* 48 :91–122, 1926.

[Hil28] David Hilbert. Die Grundlagen der Mathematik. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 88 :65–85, 1928. Traduction dans [Lar91], pages 146–163.

[HNN27] David Hilbert, Ludwig Nordheim, and John von Neumann. Über die Grundlagen der Quantenmechanik. *Mathematische Annalen*, 98 :1–30, 1927.

[HW54] Godfrey Harold Hardy and Edward Maitland Wright. *An introduction to the theory of numbers*, pages 117–120. Oxford University Press, 1954.

[Kőn14] Gyula Kőnig. *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre*. Leipzig, 1914.

[Kőn27] Dénes Kőnig. Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche. *Acta scientiarum mathematicarum Szeged*, 3 :121–130, 1927.

[Lar91] Jean Largeault (éd.). *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*. Vrin, 1991.

[Leo92] Robert J. Leonhard. Creating a context for game theory. In *[Wei92]*, pages 29–76. 1992.

[Leś29] Stanislaw Leśniewski. Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik. *Fundamenta Mathematicae*, 14 :78–81, 1929.

[Lin31] Adolf Lindenbaum. Bemerkungen zu den vorhergehenden "Bemerkungen..." des Herrn J. v. Neumann. *Fundamenta Mathematicae*, 17 :335–336, 1931.

[Men28] Karl Menger. Bemerkungen zu den den Grundlagenfragen I–IV. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 37 :213–226, 298–325, 1928.

[Men30] Karl Menger. Der Intuitionismus. *Blätter der Deutschen Philosophie*, 4 :311–325, 1930.

[Mir91] Philip Mirowski. When games grow deadly serious. In Craufurd D. Goodwin, editor, *Economics and national security*. Supplement to History of political economy, 1991.

[Mir92] Philip Mirowski. What were von Neumann and Morgenstern trying to accomplish ? In *[Wei92]*, pages 113–147. 1992.

[Mon13] Pierre-Rémond de Montmort. Lettre à Daniel Bernoulli. In *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*. Quilau, 1713.

[Nei32] H. Neisser. Lohnhöhe und Beschäftigungsgrad im Marktgleichgewicht. *Weltwirtschaftliches Archiv*, 36 :415–55, 1932.

[Neu23] John von Neumann. Zur Einführung der transfiniten Zahlen. *Acta scientiarum mathematicarum Szeged*, 1 :199–208, 1923.

[Neu25] John von Neumann. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für Mathematik*, 154 :219–240, 1925.

[Neu27] John von Neumann. Zur Hilbertschen Beweistheorie. *Mathematische Zeitschrift*, 26 :1–46, 1927.

[Neu28a] John von Neumann. Die Axiomatisierung der Mengenlehre. *Mathematische Zeitschrift*, 669–752 :27, 1928.

[Neu28b] John von Neumann. La théorie des jeux. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, 186 :1689–1691, 1928.

[Neu28c] John von Neumann. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100 :295–320, 1928.

[Neu29] John von Neumann. Über ein Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre. *Journal für Mathematik*, 160 :227–241, 1929.

[Neu31] John von Neumann. Die formalistische Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis*, 2 :116–121, 1931.

[Neu32] John von Neumann. *Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, 1932.

[Neu37] John von Neumann. Über ein ökonomisches Gleichgewicht und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. *Ergebnisse eines mathematischen Colloquiums*, 8 :73–83, 1937.

[Neu47] John von Neumann. The mathematician. In Robert B. Heywood, editor, *Works of the mind*. University of Chicago Press, 1947.

[Neu48] John von Neumann. *A numerical method for determination of the value and the best strategies of a zero-sum two-person game with large number of strategies*. Non publié, 1948.

[Neu53] John von Neumann. Communication on the Borel notes. *Econometrica*, 21 :124–125, 1953.

[Neu54a] John von Neumann. A numerical method to determine optimum strategies. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1 :109–115, 1954.

[Neu54b] John von Neumann. The role of mathematics in the sciences and in society. *Adress at the fourth conference of the Association of Princeton*, 1954.

[Neu58] John von Neumann. *The computer and the brain*. Yale University Press, 1958.

[NM44] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press, 1944.

[Pos37] René de Possel. *Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de réflexion*. Hermann, 1937.

[Pun89] Lionello F. Punzo. Von Neumann and Karl Menger's mathematical colloquium. In *[Dor89]*, pages 29–65. 1989.

[Rei70] Constance Reid. *David Hilbert*. Springer, 1970.

[Sch21] Arthur Schoenflies. Zur Axiomatik der Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 83 :173–200, 1921.

[Sch35] K. Schlesinger. Über die Produktionsgleichungen der österreichischen Wertlehre. *Ergebnisse eines mathematischen Colloquiums*, 6 :10–11, 1935.

[Sta33] H. von Stackelberg. Zwei kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassels. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 4 :456–472, 1933.

[Ula58] Stanislaw Ulam. John von Neumann, 1903–1957. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64.3 :1–49, 1958.

[Van58] Léon Van Hove. Von Neumann's contributions to quantum theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64.3 :95–99, 1958.

[Vil38] Jean Ville. Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs. In Émile Borel et al., editors, *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, volume 4.2, pages 105–113. Gauthiers-Villars, 1938.

[Wal74] Léon Walras. *Élements d'économie pure*. Guillaumin et C$^{\text{ie}}$, 1874.

[Wal35] Abraham Wald. Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen. *Ergebnisse eines mathematischen Colloquiums*, 6 :12–18, 1935.

[Wal36] Abraham Wald. Über die Produktionsgleichungen der österreichischen Wertlehre (II). *Ergebnisse eines mathematischen Colloquiums*, 7 :1–6, 1936.

[Wei92] E. Roy Weintraub (éd.). *Toward a history of game theory*. Supplement to History of political economy, 1992.

[Wey21] Hermann Weyl. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. *Mathematische Zeitschrift*, 10 :39–79, 1921.

[Wey44] Hermann Weyl. David Hilbert and his mathematical work. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50 :612–654, 1944.

[Wig76] A. S. Wightman. Hilbert's sixth problem. Mathematical treatment of the axioms of physics. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 28, pages 147–240, 1976.

[Zer08] Ernst Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Mathematische Annalen*, 65 :261–281, 1908.

[Zer13] Ernst Zermelo. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In *Actes du V$^{\text{e}}$ congrès international des mathématiciens*, volume 2, pages 501–504, 1913.

[Zeu32] F. Zeuthen. Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination und ökonomische Qualität. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 4 :1–24, 1932.