La continuité chez Cauchy

Stefan Neuwirth

1. Introduction.

Le tournant de la rigueur réalisé par Cauchy avec son *Cours d'analyse* de 1821 continue d'interroger et de diviser les historiens et les philosophes des mathématiques.

La première expression de cette rigueur est la définition d'une fonction continue : elle sera donnée, paraphrasée et discutée plus bas pour essayer de trancher le débat sur son sens. En effet, la plupart des commentateurs concluent qu'il s'agit de la définition d'une fonction "ponctuellement" continue telle que Bolzano [2] la donne en 1817 et telle que Weierstrass la donne dans son cours d'analyse de 1861 [5, pages 119-120] : Spalt [13, page 50, note 85] en fournit un inventaire, auquel on peut rajouter [1, 6]. La conséquence en est qu'alors plusieurs théorèmes de Cauchy "souffre[nt] des exceptions", comme l'écrit Abel en 1826.

Les "erreurs de Cauchy" sont devenues un thème populaire comme paradigme de l'approche non standard aux infiniment petits (voir en particulier Imre Lakatos [10]) : la définition de Cauchy de la continuité se traduit particulièrement facilement dans ce formalisme. Plusieurs auteurs ([7, 13, 11]), dont Spalt, supposent que Cauchy lui-même faisait de l'analyse non standard.

Cependant, Giusti [9] et Lombardi [12] soutiennent que la définition est celle d'une fonction "uniformément" continue. Notre approche partage leur conclusion ainsi que leur argument que c'est bien le concept à l'œuvre dans les démonstrations du *Cours d'analyse*. Nous proposons d'affiner leur analyse en décrivant comment Cauchy "cherche à donner [aux méthodes] toute la rigueur qu'on exige en géométrie".

2. Axiomatique matérielle

Le langage dans lequel Cauchy s'exprime est la langue française : il ne propose pas de langage symbolique propre à réduire l'analyse à un jeu de signes. Sa méfiance au sujet des mathématiques du 18^{e} siècle, qui l'incite "à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre", l'amène à tenir un discours qui interprète les formules pas à pas. L'idée que la fonction f et la variable x vivent dans un monde de formules peut paraitre convaincante en algèbre, mais elle pose un réel problème en analyse.

La présentation de Cauchy n'est pas univoque, et nous allons voir qu'il est difficile de la rendre exacte. Giusti écrit que

> La présentation d'une œuvre appartient toujours plus à la rhétorique qu'à la science, souvent la forme des définitions et des énoncés est choisie entre plusieurs options différentes ; parfois, encore que rarement, même les démonstrations conservent un certain caractère de libre choix entre plusieurs chemins possibles. [9, page 26].

Comme dans l'axiomatique d'Euclide, les objets fondamentaux sont donnés par des définitions de chose, c'est-à-dire des définitions auxquelles le discours mathématique ne fait jamais appel, mais qui permettent au lecteur de se former une intuition de l'objet. En analyse, ce sont les variables : "On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres." Les autres définitions de l'analyse sont toutes des définitions de nom basées sur la variable :

— "Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres."

— "On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroit indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro."

— "Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'entre elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable* *indépendante ;* et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable."

Cauchy ne conçoit donc pas la variable comme « symbole ou terme auquel on peut attribuer plusieurs valeurs distinctes, à l'intérieur d'un domaine défini » (*Le nouveau petit Robert de la langue française*). C'est-à-dire que la variable varie, et cette variabilité permet à la variable de parcourir les valeurs entre deux valeurs données. Comme le point et la droite en géométrie, les variables sont donc données par avance et non pas engendrées par le mathématicien.

Si on ne sait pas exactement quelles intuitions en avait Cauchy, et que la notion de variable garde sa part d'ombre comme le point et la droite chez Euclide, les raisonnements, eux, sont parfaitement rigoureux si on les lit avec bienveillance et si on homogénéise l'approche. Il faut surtout se garder, encore davantage pour un texte qui nous est proche par le style, de l'anachronisme qui consiste à lire un auteur du passé avec les conceptions du présent, ici Cauchy avec notre conception de Weierstrass en tête.

3. Paraphrase de la définition d'une fonction continue.

Cette définition apparait au chapitre II, immédiatement après la définition des variables infiniment petites, page 34 du *Cours d'analyse.*

[**Version originale.**] Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit. [3, pages 34-35]

[**Paraphrase.**] Considérons une quantité variable exprimée au moyen de la variable x entre deux valeurs données X_0 et X_1, notée $f(x)$, qui n'admette qu'une unique valeur finie pour chaque valeur de x entre ces deux valeurs. Exprimons l'accroissement que reçoit la fonction $f(x)$ de la variable x lorsqu'on attribue un accroissement à la variable x : pour cela, partons d'une valeur X de x entre X_0 et X_1 et accroissons X d'une variable α, qui converge vers la limite zéro, en $X+\alpha$. L'accroissement de la fonction en partant de X est la différence

$$f(X+\alpha)-f(X)$$

qui est une fonction de la nouvelle variable α. Ce calcul devant subsister quelle que soit la valeur de x, l'accroissement de la fonction $f(x)$ est la fonction $f(x+\alpha)-f(x)$ des variables x et α. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre X_0 et X_1, fonction continue de la variable x si, pour chaque valeur X de x entre ces valeurs,

$$|f(X+\alpha)-f(X)|$$

converge vers la limite zéro. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les valeurs données si, entre ces limites,*

$$|f(x+\alpha)-f(x)|$$

converge vers la limite zéro.

On dit encore que la fonction $f(x)$ est continue au voisinage d'une valeur X de la variable x s'il existe des valeurs X_0 et X_1 avec $X_0 < X < X_1$ telles que $f(x)$ est continue entre X_0 et X_1.

4. Commentaire.

La paraphrase que j'ai entreprise ici ne diffère notablement de l'original que par deux points que je vais discuter successivement.

4.1. Statut de la variable : x et X, intervalle et valeur. J'ai introduit la lettre X pour la valeur de x, qui est systématique dans la suite du *Cours d'analyse* et notamment dès la proposition qui suit [3, pages 37-38] ;

Le x de la formule est à la fois une lettre que l'on manipule selon les règles de l'algèbre et qui donne lieu à des calculs d'"algèbre générale", et une quantité qui prend des valeurs successives et donne lieu aux raisonnements de l'analyse. La validité de la formule peut alors dépendre de l'intervalle considéré et la vérification de la formule doit tenir compte de la nature des valeurs considérées : la région "intermédiaire entre deux valeurs données" peut être inhomogène.

4.2. L'accroissement est fonction de deux variables. J'ai distingué entre la fonction d'une seule variable $f(X+\alpha)-f(X)$ et la fonction de deux variables $f(x+\alpha)-f(x)$: cette distinction se retrouve au moins dans le *Résumé* [4, page 28]. La distinction entre valeur X et variable x permet d'expliciter le passage d'un énoncé vrai pour chaque valeur X à un énoncé vrai pour la variable x. C'est la réciproque au passage évoqué dans l'introduction du *Cours d'analyse* :

> et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. [3, pages iij-iv]

Cela permet de comparer la première formulation de la continuité, commençant par « Cela posé », et la deuxième commençant par « En d'autres termes ».

4.3. Comparaison des deux formulations Le problème principal est de comprendre le rapport entre les variables x et α : soit on considère que α est un infiniment petit donné et on considère alors $f(x+\alpha)-f(x)$ pour toutes les valeurs intermédiaires entre les deux limites données, soit on considère une valeur X de x donnée et on regarde alors l'effet de l'accroissement par un infiniment petit α. Regardons les deux formulations de la continuité pour en savoir davantage.

On peut lire la première formulation de deux manières :

1. comme on n'y choisit pas α, on peut estimer que α est donné d'avance et qu'on regarde, pour chaque valeur X de x, l'accroissement $f(X+\alpha)-f(X)$;
2. on peut aussi estimer que le choix de α est sous-entendu par l'expression "décroît indéfiniment avec celle de α" : on aboutit alors une lecture moderne, dans laquelle α ne serait plus une variable, mais un nombre réel : $\ldots\ \exists\eta\ \forall\alpha\in[-\eta,\eta]\ |f(x+\alpha)-f(x)|<\ldots$

La deuxième formulation est beaucoup plus succincte, mais elle exprime sans ambigüité que le choix de α se fait avant de considérer l'accroissement qu'il produit sur la fonction pour les différentes valeurs de x : elle incite donc à choisir la lecture 1.

Il y a deux raisons supplémentaires, déjà évoquées par Giusti et Lombardi, de choisir la lecture 1 : d'abord, le fait que Cauchy prend visiblement garde de considérer que la continuité d'une fonction s'observe au sujet d'un intervalle et non d'une valeur particulière ; ensuite, le fait que c'est cette lecture qui s'applique effectivement dans les démonstrations à commencer par celle du 1.$^{\text{er}}$ Théorème quatre pages plus loin.

La continuité est ici nécessairement conçue comme la propriété d'un intervalle, parce que c'est la propriété d'une fonction d'une variable, qui doit donc pouvoir varier sur un élément de grandeur, c'est-à-dire un intervalle.

5. L'alternance des quantificateurs : un problème pédagogique.

Les formulations de Cauchy ont l'avantage caractéristique d'éviter la double alternance des quantificateurs existentiel et universel, dont l'ordre détermine aujourd'hui la distinction entre continuité ponctuelle et uniforme : on distingue les suites de quantificateurs

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in[X_0,X_1]\ \ldots \quad \text{et} \quad \forall x\in[X_0,X_1]\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ldots .$$

Il s'agit d'une problématique qui constitue un écueil pédagogique notoire et qui sert de critère majeur de discrimination entre étudiants. Or cela se conçoit surtout dans une optique dans laquelle les deux continuités sont mises sur un même plan : *a contrario*, en mettant à part tout ce qui a trait au "ponctuel" et en se concentrant sur l'aspect "uniforme", l'accent mis sur cette alternance perd de sa pertinence.

6. L'epsilontique.

Une autre question en creux de l'approche de Cauchy est l'enjeu de rigueur que présente l'usage des infiniment petits et l'importance de la contribution de Weierstrass à la rigueur de l'analyse. En effet, selon Freudenthal [8, page 5] et van der Waerden [14, page 220], l'« epsilontique », c'est-à-dire l'usage du δ et de l'ε à peine travesti, fait depuis l'époque grecque partie intégrante du discours mathématique, ce qui invite à circonscrire l'apport de Weierstrass.

Les *Éléments* d'Euclide en témoignent au livre cinquième et douzième. La pensée mathématique était parfaitement capable d'exprimer l'approximation de la manière suivante : "si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, soit d' tel que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d'}$; alors $d' - d$ est positif et, suffisamment multiplié, dépassera toute grandeur donnée." La méthode d'exhaustion à l'œuvre dans la *Quadrature de la parabole* d'Archimède en témoigne aussi. Deux autres occurrences fameuses sont le *Traité de la roulette* de Pascal lorsqu'il montre que la méthode des indivisibles est aussi rigoureuse que la méthode des géomètres, ainsi que l'*Ars conjectandi* de Jakob Bernoulli dans sa deuxième démonstration de la loi des grands nombres.

Ce qui m'intrigue davantage est que je n'ai pas encore trouvé le texte qui indiquerait qu'une rupture de la rigueur aurait eu lieu ou qui critiquerait nettement ses prédécesseurs. Les textes de l'époque sont très mesurés, et ni Seidel ni Abel ne clouent Cauchy au pilori : ils ne relèvent pas d'erreur dans ses démonstrations, mais dans la formulation du théorème qui "souffre des exceptions".

Références

[1] Gilbert Arsac : *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes et la convergence uniforme : de la difficulté historique du raisonnement sur les limites.* Hermann, Paris, 2013.

[2] Bernard Bolzano : *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.* Gottlieb Haase, 1817.

[3] Augustin-Louis Cauchy : *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. I.re partie. Analyse algébrique.* Imprimerie royale chez Debure frères, 1821.

[4] Augustin-Louis Cauchy : *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal. Tome premier.* Imprimerie royale chez Debure frères, 1823.

[5] Pierre Dugac : Éléments d'analyse de Karl Weierstrass. *Arch. History Exact Sci.*, 10:41–176, 1973.

[6] Pierre Dugac : *Histoire de l'analyse : autour de la notion de limite et de ses voisinages.* Vuibert, Paris, 2003.

[7] Gordon M. Fisher : Cauchy and the infinitely small. *Historia Math.*, 5(3):313–331, 1978.

[8] Hans Freudenthal : *Mathematics as an educational task.* D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1973.

[9] Enrico Giusti : Gli "errori" di Cauchy e i fondamenti dell'analisi. *Boll. Storia Sci. Mat.*, 4(2):24–54, 1984.

[10] Imre Lakatos : *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique.* Hermann, Paris, 1984. Traduction de Nicolas Balacheff et Jean-Marie Laborde.

[11] Detlef Laugwitz : Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks. *Historia Math.*, 14(3):258–274, 1987.

[12] Henri Lombardi : L'uniformité, un concept implicite efficace chez Cauchy. *Repères IREM*, 5:112–126, octobre 1991.

[13] Detlef D. Spalt : *Vom Mythos der mathematischen Vernunft : eine Archäologie zum Grundlagenstreit der Analysis oder Dokumentation einer vergeblichen Suche nach der Einheit der mathematischen Vernunft.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1981.

[14] B. L. van der Waerden : *Science awakening.* 2nd ed. English translation by Arnold Dresden, with additions of the author. Oxford University Press, New York, 1961.