12/04/2024

Le cadre et la marge pour fonder les mathématiques.

Je suis parti d'une citation de Pascal sur le double infini des mathématiques :

- en tant que science déductive, les mathématiques sont infinies quant aux théorèmes qui peuvent être démontrés ; on peut imaginer cette potentialité comme une arborescence infinie, avec toujours de nouveaux embranchements ;
- en tant que science déductive, les mathématiques procèdent sur la base de principes : des concepts de base, des constructions de base, la base du raisonnement ; elles sont infinies dans la recherche et la compréhension de ces concepts, constructions, raisonnements, de tout ce qu'elles considèrent comme ses principes, et il y a ici positivement une régression à l'infini, qu'on peut imaginer comme l'arborescence infinie des racines, avec toujours de nouvelles radicelles.

Ce double infini relève autant de l'esprit de géométrie que de l'esprit de finesse : l'un pour garder la précision de l'horloger dans la conception des mécanismes, l'autre pour garder la simplicité, l'harmonie, la clarté du projet mathématique pris dans son ensemble.

Ce double infini n'exprime pas que les mathématiques seraient techniques et compliquées par nature. Lorsque Gödel propose, pour démontrer son théorème d'incomplétude une description précise d'une théorie axiomatique comme un objet formel, cette description est d'une grande technicité parce que la démonstration elle-même devient un objet formel, au point que cet objet formel peut être simulé à l'intérieur de l'arithmétique. Mais ce faisant, elle nous apprend précisément ce que les mathématiques ne sont pas : elles sont simples et intuitives, et non pas compliquées et formelles. En le réaffirmant, je veux aussi indiquer que quiconque est en mesure de comprendre pleinement l'objet des mathématiques et que cela peut se faire hors de tout cadre technique.

J'ai alors voulu partir d'un exemple, celui des nombres entiers. C'est l'exemple le plus simple parce qu'il est pleinement une création de l'esprit dont la nature ne dépend pas directement de considérations sur le monde dans lequel nous vivons, contrairement à la géométrie ; c'est aussi le premier objet qui renferme la notion d'infini et échappe de ce fait à une simple combinatoire.

Pour décrire le nombre entier, je suis parti de ces deux principes du comptage on commence à compter par 0 (pour ne rien compter) ou par 1 (un véritable début); lorsqu'on a compté jusqu'à un certain nombre n, cela donne lieu à un nombre successif, qu'on appelle son successeur, et pour lequel je ne veux pas introduire de notation. Les nombres, c'est donc 0, son successeur, 1, le successeur de 1, le successeur du successeur de 1, le « Le dire une fois revient à le dire sans cesse » (Zénon d'Élée), et partager le concept du nombre entier, c'est partager l'idée que le nombre entier ne « souffre pas de dernier » et qu'il y aura encore et toujours un successeur

J'ai alors demandé à l'audience si tout était dit pour que nous partagions pleinement le concept de nombre entier. Voici les réserves qui ont été formulées

- est-ce que le successeur d'un nombre peut dépendre de ce nombre, c'est-à-dire, est-ce que par exemple le successeur de 1 peut être 0 ?
- est-ce que ce discours explique que le nombre permet de dénombrer une collection d'objets, indépendamment de la manière dont on s'y prend?
- peut-on réellement concevoir le nombre autrement qu'à partir de systèmes de notation et de désignation (0,1,2,... ; I, II, ... ; zéro, un, deux, ... ; etc.) ?

Ces réserves m'ont amené à préciser que je nous crois capable de partager une conception du nombre entier dans cette salle de classe parce que nous sommes proches en termes de culture, que nous partageons une éducation similaire, et que cela conditionne notre possibilité de saisir pleinement le nombre par ces deux principes d'engendrement, zéro et successeur.

En ce qui concerne les deux premières réserves, je repère qu'elles ne prennent sens que comme investigation sur la base de cette compréhension pleine et entière du nombre et constituent une deuxième étape de compréhension de cette compréhension

La première étape témoigne de la manière que nous avons acquis la compréhension du nombre entier par abstraction, c'est-à-dire par saisie de ce qui est commun à toutes les notations des entiers.