Le Nullstellensatz de Hilbert dynamique, d'après Henri Lombardi

Le Nullstellensatz de Hilbert est un théorème qui sert de dictionnaire entre le monde géométrique des variétés algébriques et le monde algébrique des idéaux de polynômes. Voici le cadre : on considère un corps K et des polynômes $f_1, \dots, f_m$ en n indéterminées $X_1, \dots, X_n$: $f_i \in K[X_1, \dots, X_n]$; ils définissent un idéal I : $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle_{K[X_1, \dots, X_n]} = f_1 K[X_1, \dots, X_n] + \dots + f_m K[X_1, \dots, X_n]$. Le Nullstellensatz considère alors un corps algébriquement clos L contenant K et la variété algébrique $V = \{ \xi \in L^n : f_1(\xi) = \dots = f_m(\xi) = 0 \}$ et propose deux versions :

- version faible : V est vide si, et seulement si, I est $K[X_1, \dots, X_n]$ tout entier ;
- version forte : soit $g \in K[X_1, \dots, X_n]$: g s'annule sur la variété V si, et seulement si, il existe N tel que $g^N \in I$.

Du point de vue calculatoire, cet énoncé pose problème parce que le corps algébriquement clos L est en général inatteignable, c'est-à-dire que son existence est purement conceptuelle et non constructive. L'approche dynamique propose de remplacer L par un objet calculatoire parfaitement défini qu'on peut concevoir comme des approximations finies ad hoc de la clôture algébrique eu égard aux polynômes $f_1, \dots, f_m$. Cette approche remonte aux travaux de Jean Della Dora, Claire Dicrescenzo et Dominique Duval (1985, désignés par [D5]).

L'approche dynamique consiste à rendre compte de ces approximations dans des systèmes de calcul appelées « théories dynamiques » ou « théories cohérentes » : le corps K y est introduit par son diagramme (une présentation dans laquelle chaque élément de K donne lieu à une variable et chaque formule atomique vraie donne lieu à une relation) ; les polynômes $f_1, \dots, f_m$ sont introduits comme des relations ; la clôture algébrique est introduite comme un schéma d'axiome qui se rajoute aux axiomes de la théorie des corps : pour chaque $n \geq 1$, $\vdash \exists y\; y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \dots + x_1 y + x_0 = 0$.

Alors le Nullstellensatz peut être compris comme une caractérisation de l'effondrement de la théorie dynamique considérée : considérons la version faible. « Vest vide » veut dire que cette théorie s'effondre et qu'on a une démonstration de $0 = 1$ dans cette théorie. Or on sait caractériser les éléments dont on peut prouver qu'ils sont nuls dans cette théorie : les éléments de I. Donc un élément de I est égal à 1, ce qui veut dire que I est l'anneau de polynômes tout entier.

Voici une leçon à tirer de ces recherches : en précisant un contexte comme un système de calcul très élémentaire (« dynamique » ici), on peut suivre les calculs possibles étape par étape et expliquer la raison pour laquelle un calcul aboutit à un certain résultat, ici $0 = 1$.

Références : Michel Coste, Henri Lombardi, Marie-Françoise Roy, Dynamical method in algebra : effective Nullstellensätze, Annals of Pure and Applied Logic 111 (2001), 203-256.

[D5] Jean Della Dora, Claire Dicrescenzo, Dominique Duval, About a new method for computing in algebraic number fields, in EUROCAL '85, volume 2, édité par Bob F. Caviness, Lecture notes in computer science 204, Springer, Berlin, 1985, 289-290.