Lorenzen's reshaping of Krull's Fundamentalsatz for integral domains (1938–1953)

Stefan Neuwirth

Abstract

Krull's Fundamentalsatz, the generalisation of the main theorem of elementary number theory to integral domains, is the starting point of Lorenzen's career in mathematics. This article traces a conceptual history of Lorenzen's successive reformulations of the Fundamentalsatz on the basis of excerpts of his articles. An edition of the extant correspondence of Lorenzen with Hasse, Krull, and Aubert provides a better understanding of the context of these investigations.

Contents

1. Introduction.

In the period considered, Paul Lorenzen is a professional mathematician whose research in abstract algebra leads to new insights on the way algebraic objects are given to us. His genuine interest in mathematical logic certainly triggers these insights; conversely, they also influence his conception of a consistency proof for elementary number theory as the construction of an embedding of a preordered set into a σ-complete pseudocomplemented semilattice (see Coquand and Neuwirth 2020).

The broader framework in which this happens is that of lattice theory getting to the core of mathematical research, after the work of the precursors Dedekind, Schröder, and Skolem. The introduction of lattice theory into ideal theory is credited to Wolfgang Krull (1926), whose assistant Lorenzen is from 1939 until his habilitation in 1946.

Herbert Mehrtens (1979, page 146), in considering Steinitz' work, describes the development of modern algebra in the following terms: 1. the algebraic structure of concrete objects is unveiled; 2. it is given an abstract axiomatic formulation; 3. the abstract concepts are subjected to a detailed investigation of their structure. It is at this third stage that lattice theory becomes instrumental.

> After the first step, where the algebraic fundamental structures had emerged in the investigation of numbers, equations, and functions, and the second phase, where the abstract-axiomatic formulation had been achieved, now the abstract concepts became the base of a careful structural investigation.
>
> Seen in this way, the third phase in the development of abstract algebra, the "modern age", starts with Steinitz. Dedekind's work belongs to the first, concrete phase; it is part of this developmental stage by virtue of containing

> the germ of the further development. This is also attested by the fact that, in one detail, he himself carried out all three phases – in the investigation of the dual group [the lattice]. For abstract algebra, the third phase is marked by E. Noether, E. Artin, H. Hasse, W. Krull, and others, whose most productive time were the 20s and 30s.

This article proposes to follow Lorenzen's work in algebra by focusing on a specific theorem, Krull's Fundamentalsatz for integral domains. The theorem is introduced on the basis of excerpts of articles by Krull (1930, 1932, 1936a) with a short comment. Thus the starting point of Lorenzen's research is described. Then excerpts of each of his four articles on the subject (Lorenzen 1939a, 1950, 1952, 1953a) are given and commented on, in chronological order, so as to follow his enterprise of deepening the understanding of the Fundamentalsatz. In his letter to Krull dated 6 June 1944 (page 94), Lorenzen describes his goal as follows.

> And yet the simplification and clarification of the proof methods is precisely the proper main goal of my work. I have not tried to generalise the theorems of multiplicative ideal theory at any price, even at the price of complicating – on the contrary, I rather care only to discern the basic ideas of the proof methods in their ultimate simplicity. If e.g. I replace the concept of valuation by "homomorphism of a semilattice into a linearly preordered set", then I see therein a conceptual simplification instead of a complication. For the introduction of the concept of valuation (e.g. the prima facie arbitrary triangle inequality) is justified only by the subsequent success, whereas the concept of homomorphism bears its justification in itself. I would say that the homomorphism into a linear preorder is the "pure concept" that underlies the concept of valuation. And the underlying, pure concept seems to me to be undeniably the simpler one.
>
> If I am mistaken in this point, then I urge you to tell it to me, because it has to date always been my endeavour in my whole mathematical work to bring to light these underlying, pure concepts themselves in their simple and transparent clarity.
>
> In this tendency toward conceptual clarification, the paper [Lorenzen 1950] also differs from my dissertation [Lorenzen 1939a]. That this clarification, this understanding of the inner significance, as you call it once, is the most urgent duty has really become evident to me only in the last years.

This article allows for several different readings, according to the objectives of the readers and to their German language skills. Krull's formulation and analysis of his Fundamentalsatz and Lorenzen's reshaping of it are presented as a process that takes place in seven articles, of which the arguments relevant for our history are presented in a comprehensive way, sometimes accompanied by translations of selected paragraphs; then excerpts of the original article, chosen so as to allow for a direct and coherent reading and comparison with my presentation, are reproduced. The correspondence of Lorenzen with Hasse, Krull, and Aubert, together with a few documents, provides an insight into their respective conceptions as well as into the human and administrative component of this history.

2. Krull 1930: a first attempt at introducing valuations for an integral domain.

Krull (1930) describes the goal of a Fundamentalsatz for integral domains: it should generalise the "main theorem of elementary number theory" to the case of an integral domain $\mathfrak{O}$ with field of fractions $\mathfrak{K}$. The theorem to be generalised answers the question of when a nonzero element α of $\mathfrak{K} = \mathbb{Q}$ is divisible by another nonzero element β, i.e. of when the quotient $\alpha \cdot \beta^{-1}$ lies in $\mathfrak{O} = \mathbb{Z}$. It does so in terms of the difference between the exponents with which each prime number p appears in the numerator and the denominator of α (the *value of* α *at* p) and of β: the value of α must be greater than or equal to the value of β at each p.

Krull proposes an abstract version of these differences of exponents by defining valuations as functions $\mathfrak{K} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfying three properties 1, 2 and 3, and investigates when valuations decide divisibility.

Excerpt.

Our excerpt is from pages 531–532 of "Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern II", *Mathematische Zeitschrift* 31.

§ 1.

Bewertung; Begriff der Zahlentheorie.

Das Grundproblem und der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie kann folgendermaßen formuliert werden:

Frage: Wann ist das Element α aus dem Körper $\mathfrak{K}_r$ der rationalen Zahlen hinsichtlich der Ordnung $\mathfrak{O}_r$ der ganzen rationalen Zahlen durch das gleichfalls zu $\mathfrak{K}_r$ gehörige Element β teilbar, d. h. wann liegt der Quotient $\alpha \cdot \beta^{-1}$ in $\mathfrak{O}_r$?

Antwort: Man ordne jeder Primzahl p aus $\mathfrak{O}_r$ eine „Stelle" P zu und verstehe für beliebiges $\alpha \neq 0$ aus $\mathfrak{K}_r$ unter dem Wert von α in P die Differenz der Exponenten, mit denen die zu P gehörige Primzahl p bei einer Quotientendarstellung von α durch ganze Zahlen in Zähler und Nenner aufgeht. Dann gilt der Satz: α ist dann und nur dann durch β teilbar, wenn der Wert von α in bezug auf eine beliebige Stelle niemals kleiner ist als der Wert von β in bezug auf die gleiche Stelle.

Es bedeute von jetzt ab $\mathfrak{K}$ einen beliebigen Körper, unter einer *Ordnung* $\mathfrak{O}$ möge ein Unterring von $\mathfrak{K}$ verstanden werden, der das Einheitselement enthält, von $\mathfrak{K}$ selbst verschieden ist und die Eigenschaft besitzt, daß jedes Element aus $\mathfrak{K}$ als Quotient von Elementen aus $\mathfrak{O}$ geschrieben werden kann, daß also $\mathfrak{K}$ den Quotientenkörper von $\mathfrak{O}$ darstellt. Wir nennen das Körperelement α durch das Körperelement β *hinsichtlich* $\mathfrak{O}$ *teilbar*, wenn $\alpha \cdot \beta^{-1}$ zu $\mathfrak{O}$ gehört und fragen:

Welche Eigenschaften muß $\mathfrak{O}$ besitzen, damit über die Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente von $\mathfrak{K}$ hinsichtlich $\mathfrak{O}$ nach dem Vorbild der elementaren Zahlentheorie durch Einführung von „Stellen“ und zugehörigen „Bewertungen“ entschieden werden kann?

Um die aufgeworfene Frage zu präzisieren, haben wir vor allem genau festzulegen, was unter einer Stelle mit zugehöriger Bewertung verstanden werden soll. Von einer *Bewertung von* $\mathfrak{K}$ sprechen wir, wenn jedem Körperelement $\alpha \neq 0$ eindeutig eine reelle Zahl r, der Null das Symbol $+\infty$ als *Wert* zugeordnet ist, und wenn dabei die folgenden Bedingungen erfüllt sind: 1. *Der Wert von $\alpha \cdot \beta$ ist gleich der Summe der Werte von α und β*. 2. *Der Wert von $\alpha + \beta$ ist nie kleiner als der kleinere der Werte von α und β*. 3. *Nicht alle Elemente haben den Wert* 0.

3. Krull 1932: the Fundamentalsatz for integral domains.

Krull (1932) discovers that the concept of valuation in Krull 1930 is too narrow for deciding divisibility. He starts by redefining a valuation as a surjective function $w\colon \mathfrak{K}^* \to \Gamma$, with Γ an abelian linearly preordered group, not necessarily archimedean, such that

$$w(a \cdot b) = w(a) + w(b), \tag{1}$$
$$w(a + b) \geq \min(w(a), w(b)). \tag{2}$$

The former concept corresponds to subgroups Γ of the additive group $\mathbb{R}$ and is from now on called “special valuation”. A valuation defines the *valuation ring* $\mathfrak{B}$ formed by 0 together with the elements where it is nonnegative.

E.g. if $\mathfrak{K} = \mathbb{Q}$ and p is a prime number, then the value of $a \in \mathbb{Q}^*$ at p may be defined by writing $a = p^n a'$ with $n \in \mathbb{Z}$ and p dividing neither the numerator nor the denominator of a', and by letting $\Gamma = \mathbb{Z}$ and $w(a) = n$. Then $\mathfrak{B}$ is the ring of those fractions that can be written with a denominator not divisible by p.

Krull starts by proving two characterisations of a valuation ring $\mathfrak{B}$.

1. It is a subring of the field of fractions $\mathfrak{K}$ that preorders it linearly by divisibility: if $a \in \mathfrak{K}$, then $a \in \mathfrak{B}$ or $a^{-1} \in \mathfrak{B}$. It is here that he needs the freedom of constructing an arbitrary abelian linearly preordered group Γ.

2. It is a local ring (i.e. its nonunits form an ideal) such that every ring $\mathfrak{B}'$ with $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{K}$ contains the inverse of a nonunit of $\mathfrak{B}$. Note that this property gives rise to nonconstructive instantiations of such an inverse of nonunit in arguments by contradiction.

Then he focuses on the connection with integral closedness.

> As usual, the element p is to be called *integrally dependent on the ring* $\mathfrak{R}$ if it satisfies an equation $p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ with coefficients a_i in $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{R}$ will be termed *integrally closed* if every element in the field of fractions $\mathfrak{K}$ that is integrally dependent on $\mathfrak{R}$ already belongs to $\mathfrak{R}$.

He observes on the way that valuation rings are integrally closed. This proves one direction of the Fundamentalsatz for integral domains, viz.

> **Theorem 7.** *A proper subring $\mathfrak{R}$ of $\mathfrak{K}$ may be represented as intersection of (finitely or infinitely many) valuation rings if and only if it is integrally closed.*

The other direction follows from the fact that if $a \in \mathfrak{K} \setminus \mathfrak{R}$ with $\mathfrak{R}$ integrally closed, then a^{-1} is a nonunit of $\mathfrak{R}[a^{-1}]$: if a does not belong to $\mathfrak{R}$, then it is not integrally dependent on $\mathfrak{R}$ either, and this may be expressed as the absence of a relation of the form $a^{-1}(a_1 + a_2 a^{-1} + \cdots + a_n (a^{-1})^{n-1}) = 1$. Then Zorn's lemma provides a maximal subring $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{K}$ containing $\mathfrak{R}[a^{-1}]$ but not a; $\mathfrak{B}$ turns out to be a valuation ring by the second characterisation of a valuation ring.

Excerpt.

Our excerpt is from pages 163–165 and 168–169 of "Allgemeine Bewertungstheorie", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 167.

> **§ 1. Definition und Grundeigenschaften der allgemeinen Bewertungen.**
>
> $\mathfrak{K}$ bedeutet stets einen Körper, Γ eine Abelsche Gruppe mit der Addition als Verknüpfungsrelation und der 0 als Einheitselement. [...] Γ bzw. $\mathfrak{K}$

soll *linear geordnet* heißen, wenn zwischen den Elementen von Γ bzw. $\mathfrak{K}$ eine Ordnungsbeziehung definiert ist mit den üblichen charakteristischen Eigenschaften:

. . . .

Von einer *Bewertung B von $\mathfrak{K}$ mit der Wertgruppe Γ* soll gesprochen werden, wenn jedem Element $a \neq 0$ aus $\mathfrak{K}$ eindeutig ein Element $\alpha = w(a)$ aus Γ als *Wert* zugeordnet ist, und wenn dabei folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. $w(a \cdot b) = w(a) + w(b)$. – 2. $w(a + b) \geq \min(w(a), w(b))$. – 3. Zu jedem α aus Γ gibt es ein a aus $\mathfrak{K}$, so daß $\alpha = w(a)$.

. . . .

Die Gesamtheit der Elemente a, die in einer festen Bewertung B von $\mathfrak{K}$ nichtnegative Werte haben, bildet zusammen mit dem Nullelement einen echten Unterring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}$, den „*zu B gehörigen Bewertungsring*“.

. . . .

Satz 1. *Ein echter Unterring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann Bewertungsring, wenn $\mathfrak{B}$ den Körper $\mathfrak{K}$ zum Quotientenkörper hat und wenn in $\mathfrak{B}$ von zwei Elementen a_1 und a_2 stets (mindestens) eines durch das andre teilbar ist.*

. . . .

§ 3. Kennzeichnung der ganz abgeschlossenen Ringe.

Das Element p soll wie üblich *vom Ringe $\mathfrak{R}$ ganz abhängig* heißen, wenn es einer Gleichung $p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{R}$ genügt; $\mathfrak{R}$ wird *ganz abgeschlossen* genannt, wenn jedes von $\mathfrak{R}$ ganz abhängige Element aus dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ bereits zu $\mathfrak{R}$ selbst gehört. Bezeichnen wir für beliebiges a mit $\mathfrak{R}[a]$ stets den Ring aller Polynome in a mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$, so können wir die von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente auch folgendermaßen charakterisieren:

Das Element p hängt von $\mathfrak{R}$ dann und nur dann ganz ab, wenn p^{-1} in $\mathfrak{R}[p^{-1}]$ Einheit ist.

In der Tat, $p^n - a_1 p^{n-1} - \cdots - a_n = 0$ ist vollkommen gleichwertig mit $1 = p^{-1} \cdot (a_1 + a_2 p^{-1} + \cdots + a_n (p^{-1})^{n-1})$ und das Bestehen einer Gleichung der letzteren Form mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{R}$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß p^{-1} in $\mathfrak{R}[p^{-1}]$ Einheit ist. – Aus unserm Kriterium für ganz abhängige Elemente folgt sofort:

Ist a Nichteinheit in $\mathfrak{R}$, so kann a^{-1} niemals von $\mathfrak{R}$ ganz abhängen.

Wäre nämlich a^{-1} von $\mathfrak{R}$ ganz abhängig, so müßte $a = (a^{-1})^{-1}$ in $\mathfrak{R}[a] = \mathfrak{R}$ gegen Voraussetzung Einheit sein.

Satz 5. *Ein echter Unterring $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann Bewertungsring, wenn in $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit der Nichteinheiten ein Ideal bildet, und wenn* *in $\mathfrak{K}$ jeder echte Oberring von $\mathfrak{B}$ mindestens ein Reziprokes einer Nichteinheit von $\mathfrak{B}$ enthält.*

Daß jeder Bewertungsring die in Satz 5 angegebenen Eigenschaften besitzt, ist klar nach § 1. – Ist umgekehrt $\mathfrak{B}$ irgendein Ring mit diesen Eigenschaften, so muß zunächst $\mathfrak{B}$ ganz abgeschlossen sein. Denn der Ring $\mathfrak{B}^*$ aller von $\mathfrak{B}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{K}$ muß mit $\mathfrak{B}$ zusammenfallen, weil er sicher kein einziges Reziprokes einer Nichteinheit von $\mathfrak{B}$ enthält. Es seien ferner a_1 und a_2 zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{B}$, und es sei etwa a_2 nicht in $\mathfrak{B}$ durch a_1 teilbar, also $a_2 \cdot a_1^{-1} = p$ nicht Element von $\mathfrak{B}$. Bilden wir dann $\mathfrak{B}[p]$, so muß in $\mathfrak{B}[p]$ das Reziproke a^{-1} einer gewissen Nichteinheit a aus $\mathfrak{B}$ auftreten, es muß also eine Gleichung $a^{-1} = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n$ mit Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{B}$ gelten. Diese Gleichung kann aber in die Form $(a_0 \cdot a - 1) \cdot (p^{-1})^n + a_1 \cdot a \cdot (p^{-1})^{n-1} + \cdots + a_n \cdot a = 0$ gebracht werden, und hier muß wegen der besonderen Eigenschaften von $\mathfrak{B}$ der Koeffizient $a_0 \cdot a - 1$ als Differenz einer Nichteinheit und einer Einheit selbst Einheit sein. Es ist also p^{-1} von $\mathfrak{B}$ ganz abhängig und somit nach dem bereits Bewiesenen Element von $\mathfrak{B}$. – Wir haben jetzt gezeigt: Sind a_1 und a_2 zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{B}$, so ist in $\mathfrak{B}$ entweder a_1 durch a_2 oder a_2 durch a_1 teilbar. Nach Satz 1 muß $\mathfrak{B}$ daher Bewertungsring sein. – Mit Hilfe von Satz 5 beweisen wir weiter:

Satz 6. *Zu jedem echten Unterring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ gibt es (mindestens) einen Bewertungsring $\mathfrak{B}$, der $\mathfrak{R}$ enthält.*

Es sei a eine beliebige Nichteinheit aus $\mathfrak{R}$. Dann existiert, wie aus trivialen Wohlordnungsschlüssen zu ersehen, in $\mathfrak{K}$ mindestens ein Ring $\mathfrak{B}$, der $\mathfrak{R}$, aber nicht a^{-1} enthält, und der außerdem die Eigenschaft hat, daß a^{-1} in jedem echten Oberring von $\mathfrak{B}$ vorkommt. $\mathfrak{B}$ wird nach Satz 5 Bewertungsring sein, wenn die Gesamtheit der Nichteinheiten in $\mathfrak{B}$ ein Ideal bildet. Es sei nun $\mathfrak{p}$ irgendein Primidealteiler von a in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}$ bedeute den Ring aller der Elemente, die sich als Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{B}$ mit durch $\mathfrak{p}$ unteilbarem Nenner schreiben lassen. Dann enthält $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}$ das Element a^{-1} nicht, und es muß daher $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{B}$ sein. Das ist aber nur möglich, wenn $\mathfrak{p}$ gerade aus *allen* Nichteinheiten von $\mathfrak{B}$ besteht.

Satz 7. *Ein echter Unterring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ läßt sich dann und nur dann als Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) Bewertungsringen darstellen, wenn er ganz abgeschlossen ist.*

Daß alle Bewertungsringe und damit auch alle Durchschnitte von Bewertungsringen ganz abgeschlossen sind, wurde beim Beweise von Satz 5 mitbewiesen. Es sei jetzt umgekehrt $\mathfrak{R}$ irgendein ganz abgeschlossener Ring, a ein nicht in $\mathfrak{R}$ vorkommendes Element aus $\mathfrak{K}$. Dann haben wir nur zu zeigen, daß mindestens ein Bewertungsring $\mathfrak{B}$ existiert, der zwar $\mathfrak{R}$, aber nicht a enthält.

Wir bilden $\mathfrak{R}[a^{-1}]$; in diesem Ringe kann a nicht vorkommen, denn andernfalls wäre a^{-1} in $\mathfrak{R}[a^{-1}]$ Einheit, und es müßte daher a von $\mathfrak{R}$ ganz abhängen und damit gegen Voraussetzung in $\mathfrak{R}$ enthalten sein. Da also a^{-1} in $\mathfrak{R}[a^{-1}]$ Nichteinheit ist, gibt es nach dem Beweise von Satz 6 einen Bewertungsring $\mathfrak{B}$, der Obermenge von $\mathfrak{R}[a^{-1}]$ also erst recht auch von $\mathfrak{R}$ ist, in dem aber a nicht vorkommt. Damit ist schon alles bewiesen. – Um die Bedeutung von Satz 7 noch klarer hervortreten zu lassen, führen wir den Begriff der *Hauptordnung* ein. Der Ring $\mathfrak{R}$ soll Hauptordnung heißen, wenn in $\mathfrak{R}$ über die Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente durch Einführung von Bewertungen entschieden werden kann, d. h. wenn sich (endlich oder unendlich viele) Bewertungen $\mathfrak{B}_\tau$ des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ so definieren lassen, daß der folgende Satz gilt: In $\mathfrak{R}$ ist das Element a dann und nur dann durch das Element b teilbar, wenn a in keiner der Bewertungen $\mathfrak{B}_\tau$ einen kleineren Wert besitzt als b.

Man sieht ohne Schwierigkeit, daß der Ring $\mathfrak{R}$ dann und nur dann Hauptordnung ist, wenn er als Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) Bewertungsringen $\mathfrak{B}_\tau$ dargestellt werden kann. Aus Satz 7 ergibt sich daher:

Satz 7*. *Ein echter Unterring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann Hauptordnung, wenn er ganz abgeschlossen ist.*

Wie man in plausibler und naheliegender Weise zu dem Begriff der Hauptordnung gelangt, habe ich bereits früher ausführlich auseinandergesetzt. Doch konnte ich dort die Hauptordnungen nicht so einfach und befriedigend charakterisieren, wie es hier durch Satz 7* geschehen ist. Der Grund für diesen Mangel meiner früheren Arbeit lag einfach darin, daß ich damals nur Bewertungen mit archimedischer Wertgruppe in den Kreis der Betrachtung zog. Satz 7* zeigt also, daß die Einführung der allgemeinen Bewertungen nicht nur naheliegend, sondern auch für die naturgemäße Behandlung mancher arithmetischer Probleme schlechtweg notwendig ist.

4. Krull 1936a: the computational content of the Fundamentalsatz.

In the introduction to his 1936a, Krull explains that the Fundamentalsatz is the basis for a proof method: if a theorem is to be proved for an integrally closed integral domain, then it mostly suffices to prove it in a valuation ring, in which the property of linearity grants very simple computational arguments.

He also explains the defect of the Fundamentalsatz: its proof does not construct the valuation rings, and the example of polynomial rings shows that this goal is out of reach.

A. The valuation rings are characterised by the fact that in them, of two arbitrary elements, one is always divisible by the other. – B. Every integrally closed integral domain $\mathfrak{J}$ may be represented as intersection of valuation rings.

A and B form the basis of an important proof method: if a theorem on $\mathfrak{J}$ is to be derived which one knows to hold for the intersection of arbitrarily many rings provided that it holds for each individual component ring, then, according to B, the theorem concerned needs to be proved only for valuation rings, and in this latter case, on account of A, usually a quite elementary computation leads to the goal.

On the other hand, B serves as a connecting link for novel questions, whose fruitfulness is to be substantiated in this contribution. B is a pure existence theorem. For the "proof method", this does not constitute a drawback; nevertheless it seems theoretically desirable to go beyond the bare standpoint of existence. This goal would be reached if one were in a position to represent in some constructive manner, for an arbitrary given $\mathfrak{J}$, the set of all those valuation rings out of the field of fractions $\mathfrak{K}$ that contain the integral domain $\mathfrak{J}$. Yet even the consideration of quite elementary special cases, e.g. of polynomial rings, indicates that one is there confronted with an, at least so far, unsolvable task. – On the other hand, it becomes apparent that, surprisingly, already the attempt to turn the given task into the ideal-theoretic leads to very curious connexions with certain penetrating investigations by H. Prüfer that refer chiefly to Kronecker.

Excerpt.

Here is the source of our translation, from page 546 of "Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche I: Multiplikationsringe, ausgezeichnete Idealsysteme und Kroneckersche Funktionalringe", *Mathematische Zeitschrift* 41.

A. Die Bewertungsringe sind dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen von zwei beliebigen Elementen stets eines durch das andere teilbar ist. – B. Jeder ganz abgeschlossene Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ läßt sich als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellen.

A. und B. bilden die Grundlage für eine wichtige Beweismethode: Soll ein Satz über $\mathfrak{J}$ abgeleitet werden, von dem man weiß, daß er für den Durchschnitt beliebig vieler Ringe richtig ist, sobald er nur für jeden einzelnen Komponentenring gilt, so braucht der betreffende Satz nach B. nur für Bewertungsringe bewiesen zu werden, und in diesem letzteren Fall führt wegen A. meistens eine ganz einfache Rechnung zum Ziel.

Andererseits dient B. als Anknüpfungspunkt für neuartige Fragestellungen, deren Fruchtbarkeit in diesem Beitrag nachgewiesen werden soll. B. ist ein reines Existenztheorem. Für die „Beweismethode“ bedeutet das keinen Nachteil; trotzdem scheint es theoretisch wünschenswert, über den bloßen Existenzstandpunkt hinauszukommen. Dieses Ziel wäre erreicht, wenn man imstande wäre, bei beliebig gegebenem $\mathfrak{J}$ die Menge aller der Bewertungsringe aus dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, die den Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ umfassen, irgendwie konstruktiv darzustellen. Doch lehrt schon die Betrachtung ganz einfacher Spezialfälle, z. B. der Polynomringe, daß man da vor einer wenigstens vorläufig unlösbaren Aufgabe steht. – Dagegen zeigt es sich überraschenderweise, daß bereits der Versuch, die gestellte Aufgabe ins Idealtheoretische zu wenden, zu sehr merkwürdigen Zusammenhängen mit gewissen tiefeindringenden, vorwiegend an Kronecker anknüpfenden Untersuchungen von H. Prüfer führt.

5. Lorenzen 1939a: the Fundamentalsatz for preordered cancellative monoids.

Lorenzen 1939a is an “abstract foundation of multiplicative ideal theory” on the theory of preordered cancellative monoids. Lorenzen’s letter to Krull dated 22 March 1938 (page 52) provides a dictionary that translates the concepts of ring theory into a framework that takes into account only the multiplicative structure of an integral domain $\mathfrak{J}$: its nonzero elements form a cancellative monoid $\mathfrak{g}$, and the nonzero elements of its field of fractions form what is today called the Grothendieck group $\mathfrak{G}$ of $\mathfrak{g}$. Divisibility is the equivariant preorder $\preccurlyeq$ on $\mathfrak{G}$ whose positive cone is $\mathfrak{g}$: $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow \mathfrak{g} \ni b \cdot a^{-1}$.

Lorenzen’s analysis of Krull’s valuation theory proceeds in three steps: elaborating a theory of ideals that fits preordered monoids; making a valuation-theoretic analysis of lattice-preordered groups; establishing a transfer of valuations between a preordered monoid and the positive cone of the Grothendieck lattice-preordered group of its system of ideals.

Systems of ideals.

Prüfer (1932) proposes to define a system of r-ideals as an operation $\{a_1, \dots, a_n\} \mapsto \{a_1, \dots, a_n\}_r$ on finite subsets of the field of fractions of an integral domain. Lorenzen adapts this definition into an operation on finite or infinite bounded-from-below subsets $\mathfrak{a}$ of the group $\mathfrak{G}$ (i.e. subsets such that there is a $c \in \mathfrak{G}$ with $\mathfrak{g} \supseteq c\mathfrak{a}$; Lorenzen’s notation for this is $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$), taking values in subsets of $\mathfrak{G}$, and satisfying four conditions: 1. $\mathfrak{a}_r \supseteq \mathfrak{a}$; 2. $\mathfrak{b}_r \supseteq \mathfrak{a} \;\Rightarrow\; \mathfrak{b}_r \supseteq \mathfrak{a}_r$; 3. $\{a\}_r = a \cdot \mathfrak{g}$; 4. $a \cdot \mathfrak{a}_r = (a \cdot \mathfrak{a})_r$. The variable letter r stands for variable systems of ideals.

E.g. the system of t-ideals, used in Section 5, is defined by

$$\mathfrak{a}_t = \left\{ b \in \mathfrak{G} \mid \exists a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a} \ \forall a \in \mathfrak{G} \quad a \preccurlyeq a_1, \ldots, a \preccurlyeq a_n \;\Rightarrow\; a \preccurlyeq b \right\}$$

for finite or infinite bounded-from-below sets $\mathfrak{a}$ as the set of those elements b that are greater than or equal to every lower bound a of some finite subset $\{a_1, \ldots, a_n\}$ of $\mathfrak{a}$.

A system of ideals has the structure of a meet-semilattice-preordered monoid (a *meet-monoid* for short) for the multiplication $\mathfrak{a}_r \cdot \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})_r$ and the meet operation $\mathfrak{a}_r \wedge \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r$. Item 3 above means that the group $\mathfrak{G}$ may be embedded into this meet-monoid by identifying a with $a \cdot \mathfrak{g}$.

The system of Dedekind ideals corresponds to the operation that associates to $\mathfrak{a}$ the set $\mathfrak{a}_d$ of nonzero elements of the module generated by $\mathfrak{a}$ in the integral domain $\mathfrak{I}$ hidden behind $\mathfrak{g}$. The definition of this operation therefore takes into account the additive structure of $\mathfrak{I}$, but once the definition is done, it will be forgotten. Let us show how this works for the three following concepts: 1. valuation ring; 2. integral closedness; 3. integral dependence.

1. Lorenzen separately analyses Equality (1) and Inequality (2) of the definition of a valuation given on page 5.

- He says that a supermonoid $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{g}$) is *linear* if for $a \in \mathfrak{G}$ either $a \in \mathfrak{B}$ or $a^{-1} \in \mathfrak{B}$, i.e. if the preorder on $\mathfrak{G}$ having $\mathfrak{B}$ as its positive cone is linear.
- Inequality (2) expresses that a valuation ring is closed under addition. He observes that this is equivalent to $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \ldots, a_n\} \;\Rightarrow\; \mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \ldots, a_n\}_d$.

2. Prüfer (1932) shows that an integral domain is integrally closed if

$$\{a_1, \ldots, a_n\}_d \supseteq a \cdot \{a_1, \ldots, a_n\}_d \quad \text{implies} \quad \mathfrak{g} \supseteq a \cdot \mathfrak{g},$$

i.e. $1 \preccurlyeq a$. This means that $\{a_1, \ldots, a_n\}_d$ can be cancelled in the containment $\{a_1, \ldots, a_n\}_d \supseteq a \cdot \{a_1, \ldots, a_n\}_d$.

3. He further shows that an element a is integrally dependent on $\{a_1, \ldots, a_n\}_d$ if and only if there is $\{c_1, \ldots, c_p\}$ such that $\{a_1, \ldots, a_n\}_d \cdot \{c_1, \ldots, c_p\}_d \supseteq a \cdot \{c_1, \ldots, c_p\}_d$.

On the basis of these observations, Lorenzen proposes the following definitions in the multiplicative setting of a system of r-ideals for the cancellative monoid $\mathfrak{g}$.

1. The multiplicative counterpart of a valuation ring is a linear *r-supermonoid of* $\mathfrak{g}$, i.e. a linear supermonoid $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{g}$ such that $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \ldots, a_n\} \;\Rightarrow\; \mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \ldots, a_n\}_r$.
2. The monoid $\mathfrak{g}$ is *r-closed* if $\{a_1, \ldots, a_n\}_r \supseteq a \cdot \{a_1, \ldots, a_n\}_r \;\Rightarrow\; 1 \preccurlyeq a$.
3. The r_a-operation is given by setting $\{a_1, \ldots, a_n\}_{r_a}$ equal to

$$\left\{ a \in \mathfrak{G} \mid \exists \{c_1, \ldots, c_p\} \ \{a_1, \ldots, a_n\}_r \cdot \{c_1, \ldots, c_p\}_r \supseteq a \cdot \{c_1, \ldots, c_p\}_r \right\},$$

i.e. to the set of elements that are r-*dependent* on $\{a_1,\dots,a_n\}$. Note that the r_a-operation satisfies Item 3 of the definition of a system of ideals if and only if $\mathfrak{g}$ is r-closed.

Lorenzen observes that the arguments of Prüfer (1932, page 18) show that the cancellativity of the meet-monoid of r-ideals may be forced by passing to the meet-monoid of r_a-ideals. One may then construct the Grothendieck lattice-preordered group $\mathfrak{h}^*$ of this system of r_a-ideals (see Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2019, § 3A for this construction). Its positive cone $\mathfrak{h}$ is formed by the fractions $\frac{\{a_1,\dots,a_n\}_{r_a}}{\{b_1,\dots,b_m\}_{r_a}}$ such that $\{b_1,\dots,b_m\}_{r_a} \supseteq \{a_1,\dots,a_n\}_{r_a}$. The group $\mathfrak{G}$ may be embedded into $\mathfrak{h}^*$ by identifying a with $\frac{a\cdot\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}$.

Ideals in a lattice-preordered group.

For developing a "valuation theory" of $\mathfrak{g}$ when $\mathfrak{G}$ is a lattice-preordered group (an ℓ-*group* for short), Lorenzen uses the t-ideals, whose definition, thanks to the existence of finite meets, simplifies to

$$\mathfrak{a}_t = \left\{ b \in \mathfrak{G} \mid a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \preccurlyeq b \text{ for some } a_1,\dots,a_n \in \mathfrak{a} \right\}.$$

Clifford (1940, page 470) emphasises their similarity with the semilattice-theoretic ideals. A finite t-ideal $\{a_1,\dots,a_n\}_t$ is the set $(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n)\mathfrak{g}$ and may thus be thought of as $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$, and the set-theoretic clothing is needed only for an infinite t-ideal, which is a colimit of finite ones, in particular for a *prime* t-ideal, i.e. a t-ideal $\mathfrak{p}$ such that $ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ or $b \in \mathfrak{p}$.

Lorenzen shows that the linear t-supermonoids of $\mathfrak{g}$ are the localisations $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$, i.e. the monoids of fractions $\frac{a}{b}$ with $a \in \mathfrak{g}$ and $b \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{p}$, where $\mathfrak{p}$ is a prime t-ideal. In fact, the nonunits of $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ have the form $\frac{p}{s}$ with $p \in \mathfrak{p}$ and $s \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{p}$; if $\frac{p'}{s'}$ is another nonunit, then the meet $\frac{p}{s} \wedge \frac{p'}{s'} = \frac{s'p \wedge sp'}{ss'}$ is again a nonunit because $ss' \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{p}$ by primeness, $s'p, sp' \in \mathfrak{p}$ by Items 2 and 3 of the definition of a system of ideals, and $s'p \wedge sp' \in \mathfrak{p}$ by t-idealness. But this shows that $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ is linear, as every $a \in \mathfrak{G}$ satisfies $a = \frac{a_+}{a_-}$ with $a_-, a_+ \in \mathfrak{g}$ and $a_- \wedge a_+ = 1$, so that either a_- or a_+ is a unit of $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ and either a or $a^{-1} = \frac{a_-}{a_+}$ is in $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.

The Fundamentalsatz follows easily in this case, in the following two shapes.

Theorem 11. *Let N be a set of prime t-ideals of $\mathfrak{g}$ such that every nonunit of $\mathfrak{g}$ lies in at least one $\mathfrak{p} \in N$, then $\mathfrak{g}$ is the intersection of the linear supermonoids $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ $(\mathfrak{p} \in N)$*

$$\mathfrak{g} = \bigcap_N \mathfrak{g}_\mathfrak{p}.$$

For if $a \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{g}$, then a_- is a nonunit of $\mathfrak{g}$, so that it lies in some $\mathfrak{p} \in N$ and is a nonunit of $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$; therefore $a = \frac{a_+}{a_-} \notin \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.

Theorem 12. *If N contains all maximal prime t-ideals, then, for all t-ideals $\mathfrak{a}$ of $\mathfrak{g}$, the intersection representation $\mathfrak{a} = \bigcap_N \mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ holds.*

For if $a \notin \mathfrak{a}$, then $\mathfrak{g}$ contains properly the t-ideal $a^{-1}\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}$. Zorn's lemma provides a maximal prime t-ideal $\mathfrak{p}$ that contains it, so that its elements are nonunits of $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$. Therefore $a^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p} \not\ni 1$ and $\mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p} \not\ni a$.

Krull's well-ordering argument is confined to the proof of this last theorem.

Transfer to the system of t-ideals.

To consider a linear r-supermonoid $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{g}$) is to consider a linear t-supermonoid $\mathfrak{L}$ of the positive cone $\mathfrak{h}$ of the Grothendieck lattice-preordered group $\mathfrak{h}^*$ ($\mathfrak{h}^* \supseteq \mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{h}$).

1. If $\mathfrak{L}$ is given, then $\mathfrak{B} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{G}$ (using the identification of a with $\frac{a \cdot \mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}$) is a linear supermonoid of $\mathfrak{g}$. Furthermore, if $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}$, then $\mathfrak{L} \supseteq \{\frac{a_1 \cdot \mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}, \dots, \frac{a_n \cdot \mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\}$, so that by hypothesis $\mathfrak{L} \supseteq (\frac{a_1 \cdot \mathfrak{g}}{\mathfrak{g}} \wedge \cdots \wedge \frac{a_n \cdot \mathfrak{g}}{\mathfrak{g}})\mathfrak{h} = \frac{\{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}}{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ and $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_{r_a} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_r$. At this point of his argument, Lorenzen compares it to Krull 1936a, Satz 15.

2. Conversely, if $\mathfrak{B}$ is given, then $\mathfrak{B}$ is even an r_a-supermonoid: if $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ and $\{a_1, \dots, a_n\}_{r_a} \ni a$, consider $\{c_1, \dots, c_p\}$ such that $\{a_1, \dots, a_n\}_r \cdot \{c_1, \dots, c_p\}_r \supseteq a \cdot \{c_1, \dots, c_p\}_r$; one may suppose that c_1 is minimal w.r.t. the linear monoid $\mathfrak{B}$ among $c_1, \dots, c_p$, i.e. $\mathfrak{B} \supseteq \{1, \dots, c_1^{-1}c_p\}$, so that $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\} \cdot \{1, \dots, c_1^{-1}c_p\}$; by hypothesis, $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_r \cdot \{1, \dots, c_1^{-1}c_p\}_r \ni a$ and we conclude that $\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}$. For every finite subset $\{a_1, \dots, a_n\}$ of $\mathfrak{G}$, one may suppose that a_1 is minimal w.r.t. $\mathfrak{B}$ among $a_1, \dots, a_n$, i.e. $\mathfrak{B} \supseteq \{1, \dots, a_1^{-1}a_n\}$, and then $\mathfrak{B} \supseteq \{1, \dots, a_1^{-1}a_n\}_{r_a}$ and $a_1\mathfrak{B} = \{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}\mathfrak{B}$. Consider $\mathfrak{L} = \{\frac{\{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}}{\{b_1, \dots, b_m\}_{r_a}} \mid \{b_1, \dots, b_m\}_{r_a}\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}\mathfrak{B}\}$: as for all $a, b \in \mathfrak{G}$ either $b\mathfrak{B} \supseteq a\mathfrak{B}$ or vice versa, $\mathfrak{L}$ is a linear supermonoid of $\mathfrak{h}$; it is a linear t-supermonoid of $\mathfrak{h}$ because the meet of two elements of $\mathfrak{L}$ is in $\mathfrak{L}$: if $\{b_1, \dots, b_m\}_{r_a}\mathfrak{B} \supseteq \{a_1, \dots, a_n\}_{r_a}\mathfrak{B}$ and $\{d_1, \dots, d_q\}_{r_a}\mathfrak{B} \supseteq \{c_1, \dots, c_p\}_{r_a}\mathfrak{B}$, then $\{b_1d_1, \dots, b_md_q\}_{r_a}\mathfrak{B} \supseteq \{a_1d_1, \dots, a_nd_q, b_1c_1, \dots, b_mc_p\}_{r_a}\mathfrak{B}$. Finally, note that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{B}$.

This transfer proves at once

Theorem 14. *Every r-closed monoid is an intersection of linear r-supermonoids.*

Excerpt.

Our excerpt is from pages 535–537, 540, and 544–546 of "Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie", *Mathematische Zeitschrift* 45.

Note that in this article and in his 1938 letters to Krull, Lorenzen consistently makes a choice opposite to the now standard one: he considers $\mathfrak{g}$ as the cone of nonpositive elements of $\mathfrak{G}$, so that his preorder $\preccurlyeq$ satisfies $a \preccurlyeq b \;\Leftrightarrow\; a \cdot b^{-1} \in \mathfrak{g}$. Consistently, he writes $a \vee b$ and $\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r$ where we write $a \wedge b$ and $\mathfrak{a}_r \wedge \mathfrak{b}_r$, respectively. He probably does so to match the preorder relation $\subseteq$ between subsets of $\mathfrak{G}$.

§ 1.

Idealsysteme.

Wir wollen eine Menge $\mathfrak{g}$, für deren Elemente $a, b, c, \ldots$ eine kommutative und assoziative Multiplikation definiert ist, eine *Halbgruppe* nennen, wenn

1. aus $ac = bc$ stets $a = b$ folgt,
2. $\mathfrak{g}$ ein Einselement 1 enthält.

Zu jeder Halbgruppe $\mathfrak{g}$ gibt es eindeutig die Gruppe $\mathfrak{G}$, die aus den Quotienten $\frac{a}{b}$ besteht. $\mathfrak{G}$ heißt die Quotientengruppe von $\mathfrak{g}$. So ist z. B. die Menge der von Null verschiedenen Elemente eines Integritätsbereiches eine Halbgruppe, und die von Null verschiedenen Elemente des Quotientenkörpers bilden die Quotientengruppe.

Viele Definitionen der Teilbarkeitstheorie in Integritätsbereichen lassen sich unmittelbar auf Halbgruppen übertragen. Von den Elementen von $\mathfrak{G}$ nennen wir die Elemente von $\mathfrak{g}$ die ganzen Elemente, b heißt ein Teiler von a, und a heißt Vielfaches von b, wenn $\frac{a}{b}$ ganz ist. Das Hauptideal (a) besteht aus allen Vielfachen von a. Ist eine Verwechslung ausgeschlossen, dann wird das Hauptideal (a) einfach mit a bezeichnet. Ein ganzes Element a heißt Einheit, wenn a^{-1} ganz ist.

Die Dedekindsche Definition der Ideale in Integritätsbereichen läßt sich natürlich nicht übertragen, da in Halbgruppen ja keine Addition erklärt zu sein braucht. Dagegen ist der Begriff der Idealsysteme, wie er von Prüfer und Krull aufgestellt worden ist, fast unmittelbar auch in Halbgruppen anzuwenden. Zur Formulierung der Definition wollen wir, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beliebige Untermengen von $\mathfrak{G}$ sind, unter $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ die Menge der Elemente ab mit $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ und unter $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ die Menge der Elemente c mit $c\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ verstehen. Statt $(1) : \mathfrak{a}$ schreiben wir $\mathfrak{a}^{-1}$.

D e f i n i t i o n 1. Es seien zu jeder endlichen oder zu jeder beliebigen Untermenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{G}$, für die $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$ ist, eine Untermenge $\mathfrak{a}_r$ von $\mathfrak{G}$ so definiert, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_r$,

2. aus $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}_r$ folgt $\mathfrak{a}_r \subseteq \mathfrak{b}_r$,
3. für ein Element a ist $a_r = (a)$,
4. $a\mathfrak{a}_r = (a\mathfrak{a})_r$.

$\mathfrak{a}_r$ heißt dann das *aus* $\mathfrak{a}$ *erzeugte* r*-Ideal.* Ist $\mathfrak{a}$ endlich, so heißt $\mathfrak{a}_r$ ein endliches r-Ideal. Die Menge aller r-Ideale nennen wir das r*-Idealsystem.* Ist sogar für jede Untermenge $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$ ein r-Ideal definiert, so nennen wir die Menge aller r-Ideale das *totale* r*-Idealsystem.*

Die Summe zweier Ideale wird durch $\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_r$, das Produkt durch $\mathfrak{a}_r \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_r$ definiert. Diese Definitionen sind unabhängig von der Erzeugung der Ideale. Wegen 4. gilt das Distributivgesetz:

$$(\mathfrak{a}_r + \mathfrak{b}_r)\mathfrak{c}_r = \mathfrak{a}_r \mathfrak{c}_r + \mathfrak{b}_r \mathfrak{c}_r.$$

. . . .

Für beliebige Halbgruppen konstruieren wir jetzt zwei wichtige Idealsysteme. Wir setzen:

$$\mathfrak{a}_s = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} (a), \qquad \mathfrak{a}_v = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq (a)} (a).$$

. . . .

D e f i n i t i o n 2. Eine Halbgruppe heißt r*-abgeschlossen*, wenn $\mathfrak{c}_r : \mathfrak{c}_r = 1$ für jedes endliche r-Ideal $\mathfrak{c}_r$ gilt.

. . . .

Die Bedeutung der r-Abgeschlossenheit liegt darin, daß in jeder r-abgeschlossenen Halbgruppe die folgende Konstruktion eines neuen Idealsystems möglich ist [. . .]:

D e f i n i t i o n 3. Ist $\mathfrak{a}$ eine endliche Untermenge von $\mathfrak{G}$, und ist $\mathfrak{g}$ r-abgeschlossen, so soll $\mathfrak{a}_{r_a}$ aus den Elementen a bestehen, für die es ein endliches r-Ideal $\mathfrak{c}_r$ gibt mit $a\mathfrak{c}_r \subseteq \mathfrak{a}_r \mathfrak{c}_r$.

Die Mengen $\mathfrak{a}_{r_a}$ bilden dann ein Idealsystem, das System der r_a-Ideale.

Die r_a-Ideale haben nun die Eigenschaft, eine *Halbgruppe* zu bilden, d. h. für beliebige endliche r_a-Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ folgt aus $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ stets $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. [. . .]

. . . .

§ 2.

Totale Idealsysteme, Endlichartigkeit.

[. . .] Wir bezeichnen dazu mit $\mathfrak{e}$ stets Mengen aus endlich vielen Elementen von $\mathfrak{G}$. Ist dann $\mathfrak{a}$ eine beliebige Untermenge von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$, so setzen wir

$$\mathfrak{a}_{r_s} = \bigcup_{\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{e}_r, \quad \mathfrak{a}_{r_v} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{e}_r} \mathfrak{e}_r.$$

. . . .

Wir nennen das v_s-System kürzer das t-System.

. . . .

§ 3.

Vollständige Halbgruppen.

Im § 4 werden wir zeigen, wie der Idealbegriff dazu dienen kann, viele Fragen über Halbgruppen auf die Untersuchung der folgenden sehr speziellen Klasse von Halbgruppen zurückzuführen:

Definition 5. Eine Halbgruppe heißt *vollständig*, wenn je zwei Elemente a, b einen größten gemeinsamen Teiler $a \vee b$ besitzen.

. . . .

Außerdem müssen wir noch den Begriff der Quotientenringe eines Integritätsbereiches auf Halbgruppen übertragen. Sei dazu $\mathfrak{g}$ eine beliebige Halbgruppe, S eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{g}$, dann soll $\mathfrak{g}_S$ die Halbgruppe aller Quotienten $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathfrak{g},\ b \in S)$ sein. $\mathfrak{g}_S$ heißt eine *Quotientenhalbgruppe* von $\mathfrak{g}$ (vgl. Grell [1]).

Die Nichteinheiten von $\mathfrak{g}_S$, die gleichzeitig in $\mathfrak{g}$ liegen, bilden ein s-Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$. Bezeichnen wir dann mit $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ die Quotientenhalbgruppe der Elemente $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathfrak{g},\ b \in \mathfrak{g},\ b \notin \mathfrak{p})$ so wird $\mathfrak{g}_\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_S$. Die Quotientenhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den *s-Primidealen* von $\mathfrak{g}$.

Ist nun $\mathfrak{g}$ vollständig, so auch jede Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{g}_S$, denn sind s, s' Elemente von S, so liegt mit $\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'}$ auch

$$\frac{a}{s} \vee \frac{a'}{s'} = \frac{s'a \vee sa'}{ss'}$$

in $\mathfrak{g}_S$ und liefert gleichzeitig den größten gemeinsamen Teiler von $\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'}$ bezüglich der Teilbarkeit in $\mathfrak{g}_S$.

Umgekehrt ist aber auch jede Oberhalbgruppe $\overline{\mathfrak{g}}$ von $\mathfrak{g}$ (natürlich $\mathfrak{g} \subseteq \overline{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{G}$), die mit zwei Elementen a, b auch $a \vee b$ enthält, eine Quotientenhalbgruppe von $\mathfrak{g}$, denn für jedes Element a von $\mathfrak{G}$ gilt $a = \frac{a(1\vee a)^{-1}}{(1\vee a)^{-1}}$, wobei $a(1 \vee a)^{-1}$ und $(1 \vee a)^{-1}$ Elemente von $\mathfrak{g}$ sind. Ist $a \in \overline{\mathfrak{g}}$, so folgt $1 \vee a \in \overline{\mathfrak{g}}$ und damit $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_S$, wenn S aus den Einheiten von $\overline{\mathfrak{g}}$ besteht, die in $\mathfrak{g}$ liegen.

Die wichtigsten Quotientenhalbgruppen sind die Quotientenhalbgruppen $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$, bei denen $\mathfrak{p}$ ein t-Primideal von $\mathfrak{g}$ ist, denn es gilt:

Satz 10. *Jede Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ nach einem t-Primideal $\mathfrak{p}$ ist linear.*

Jede Nichteinheit von $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ läßt sich nämlich als Quotient $\frac{p}{s}$ $(p \in \mathfrak{p},\ s \notin \mathfrak{p})$ darstellen, und sind $\frac{p}{s}, \frac{p'}{s'}$ zwei Nichteinheiten, so ist auch

$$\frac{p}{s} \vee \frac{p'}{s'} = \frac{s'p \vee sp'}{ss'}$$

Nichteinheit, da $s'p \vee sp' \in \mathfrak{p}$. Für jedes $a \in \mathfrak{G}$ folgt also aus

$$\frac{1}{1 \vee a} \vee \frac{1}{1 \vee a^{-1}} = 1,$$

daß $\frac{1}{1 \vee a}$ oder $\frac{1}{1 \vee a^{-1}}$ Einheit von $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ ist, d. h. $a \in \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ oder $a^{-1} \in \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.

Satz 11. *Es sei N eine Menge von t-Primidealen von $\mathfrak{g}$ derart, daß jede Nichteinheit von $\mathfrak{g}$ in mindestens einem $\mathfrak{p} \in N$ liegt, dann ist $\mathfrak{g}$ Durchschnitt der linearen Oberhalbgruppen $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ $(\mathfrak{p} \in N)$*

$$\mathfrak{g} = \bigcap_N \mathfrak{g}_\mathfrak{p}.$$

Denn ist $a \notin \mathfrak{g}$, so ist $(1 \vee a)^{-1}$ Nichteinheit von $\mathfrak{g}$. Also gibt es ein $\mathfrak{p} \in N$ mit $(1 \vee a)^{-1} \in \mathfrak{p}$, und hieraus folgt $a \notin \mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.

Satz 12. *Enthält N alle maximalen t-Primideale, so gilt für alle t-Ideale $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}$ die Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{a} = \bigcap_N \mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$.*

Denn ist $a \notin \mathfrak{a}$, so ist $a^{-1}\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$. Es gibt also ein $\mathfrak{p} \in N$ mit $a^{-1}\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{p}$, woraus wieder $a \notin \mathfrak{a}\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ folgt.

Diese Sätze gestatten zunächst für vollständige Halbgruppen Fragen über die linearen Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ in rein idealtheoretische Fragen zu verwandeln. Diese Reduktion auch für allgemeinere Halbgruppen durchzuführen, ist das Ziel von § 4.

§ 4.

Idealbrüche.

Die Konstruktion der vollständigen Halbgruppe, auf die die Strukturuntersuchung allgemeinerer Halbgruppen zurückgeführt werden soll, ist z. B. für total abgeschlossene Halbgruppen $\mathfrak{g}$ leicht geschehen, denn dann bilden ja die sämtlichen ganzen v-Ideale von $\mathfrak{g}$ ihrerseits eine vollständige Halbgruppe. Ebenso, wenn $\mathfrak{g}$ eine Multiplikationshalbgruppe bezüglich irgendeines Idealsystems ist, d. h. also wenn jedes endliche Ideal umkehrbar ist, so bilden die ganzen Ideale der Form $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$, wobei $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ endliche Ideale sind, eine vollständige

Halbgruppe. Gehört nämlich noch $\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ dazu, so auch der größte gemeinsame Teiler von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$; denn dieser ist:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1} = (\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{d})^{-1}.$$

Aber wir brauchen von unserer Halbgruppe, in der etwa das System der r-Ideale gegeben sei, nur vorauszusetzen, daß sie r-abgeschlossen ist, um auf eine vollständige Halbgruppe zu kommen. Denn ist $\mathfrak{g}$ r-abgeschlossen, so bilden die endlichen r_a-Ideale eine Halbgruppe; wir können also deren Quotientengruppe bilden. Diese besteht aus den „*Idealbrüchen*“ $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, wobei $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ endliche r_a-Ideale sind. Wir definieren dann für zwei Idealbrüche $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \subseteq \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}$, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{b}\mathfrak{c}$. Es wird dadurch die Relation $\subseteq$ fortgesetzt in die Quotientengruppe.

Betrachten wir nun alle Idealbrüche $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \subseteq 1$. Diese bilden eine Halbgruppe $\mathfrak{h}$, und zwar eine vollständige Halbgruppe. Der größte gemeinsame Teiler von $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ und $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}$ ist natürlich durch $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$ gegeben. Ist $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \subseteq 1$, so nennen wir $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ einen „*ganzen Idealbruch*“. Die vollständige Halbgruppe der ganzen Idealbrüche ersetzt uns den Kroneckerschen Funktionalring, wie er in Prüfer [1] konstruiert worden ist. Das wichtige Ergebnis, das Krull [5] über den Funktionalring beweist, läßt sich auf $\mathfrak{h}$ übertragen. Es handelt sich dabei um die linearen Oberhalbgruppen von $\mathfrak{g}$ einerseits, $\mathfrak{h}$ andererseits. Ist $\mathfrak{L}$ eine lineare Oberhalbgruppe von $\mathfrak{h}$, so bilden die Elemente a von $\mathfrak{G}$, deren Hauptideal (a) in $\mathfrak{L}$ liegt, ersichtlich eine ebenfalls lineare Oberhalbgruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{g}$. Enthält $\mathfrak{L}$ mit endlich vielen Elementen auch deren größten gemeinsamen Teiler, so hat $\mathfrak{B}$ noch folgende Eigenschaft:

$\mathfrak{B}$ enthält mit endlich vielen Elementen $a_1, \ldots, a_n$ auch das r-Ideal $(a_1, \ldots, a_n)_r$.

Nennen wir Halbgruppen mit dieser Eigenschaft r-Halbgruppen, so können wir unser Ergebnis kurz so fassen:

Jede lineare t-Oberhalbgruppe von $\mathfrak{h}$ liefert eine lineare r-Oberhalbgruppe von $\mathfrak{g}$.

Dieser Satz läßt sich nun umkehren. Ist nämlich eine lineare r-Oberhalbgruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{g}$ gegeben, so zeigen wir zunächst, daß $\mathfrak{B}$ auch r_a-Oberhalbgruppe ist. Dazu sei $d \in (a_1, \ldots, a_n)_{r_a}$, $a_\nu \in \mathfrak{B}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, d. h. es gibt ein endliches r-Ideal $\mathfrak{c} = (c_1, \ldots, c_m)_r$, so daß $d\mathfrak{c} \subseteq (a_1, \ldots, a_n)_r\mathfrak{c}$. Da $\mathfrak{B}$ linear ist, gibt es unter den Elementen $c_1, \ldots, c_m$ eines – etwa c_1 –, so daß $c_1^{-1}c_\nu \in \mathfrak{B}$ $(\nu = 1, \ldots, m)$. Dann folgt wegen

$$d(1, c_1^{-1}c_2, \ldots, c_1^{-1}c_m)_r \subseteq (a_1, \ldots, a_n)_r(1, c_1^{-1}c_2, \ldots, c_1^{-1}c_m)_r,$$

daß d in einem endlichen r-Ideal liegt, das aus lauter Elementen von $\mathfrak{B}$ erzeugt wird, also muß d in $\mathfrak{B}$ liegen. $\mathfrak{B}$ ist somit lineare r_a-Oberhalbgruppe, woraus weiter folgt, daß für jedes endliche r_a-Ideal $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n)_{r_a}$ stets $\mathfrak{a}$ in dem aus $a_1, \dots, a_n$ erzeugten s-Ideal von $\mathfrak{B}$ enthalten ist. $\mathfrak{a}\mathfrak{B}$ ist also Hauptideal in $\mathfrak{B}$. Wir definieren jetzt eine lineare Oberhalbgruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{h}$ durch $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \in \mathfrak{L}$, wenn

$$\mathfrak{a}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{b}\mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{L}$ ist dann eine lineare t-Oberhalbgruppe von $\mathfrak{h}$ und enthält ein Hauptideal (a) genau dann, wenn a in $\mathfrak{B}$ liegt. Insgesamt erhalten wir unter Berücksichtigung von § 3:

Satz 13. *Die linearen r-Oberhalbgruppen einer r-abgeschlossenen Halbgruppe entsprechen umkehrbar eindeutig den linearen t-Oberhalbgruppen der Halbgruppe $\mathfrak{h}$ der ganzen Idealbrüche und damit den t-Primidealen von $\mathfrak{h}$.*

Als Folgerung dieses Satzes ergibt sich sofort:

Satz 14. *Jede r-abgeschlossene Halbgruppe ist Durchschnitt von linearen r-Oberhalbgruppen.*

. . . .

Literaturverzeichnis.

. . . .

H. Grell.
[1] Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, Math. Annalen **97** (1927).

. . . .

W. Krull.

. . . .

[5] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, Beitrag I, Math. Zeitschr. **41** (1936).

. . . .

H. Prüfer.
[1] Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften von Körpern, J. reine angew. Math. **168** (1932).

6. Lorenzen 1950: the Fundamentalsatz without valuations.

Lorenzen 1950 takes place in the framework of preordered noncommutative monoids. It proposes an analysis of a system of ideals as an embedding into a semilattice.

> In the commutative setting, the systems of ideals are always introduced as systems of certain subsets. But if one removes this set-theoretic clothing, then the concept of an ideal may be defined quite simply: a system of ideals of a preordered set is nothing but an embedding into a semilattice.

This enables Lorenzen to analyse the concept of r-supermonoid of Lorenzen 1939a as *r-allowable monoid* corresponding to an *r-allowable preorder*, i.e. a preorder that is the restriction of a homomorphic image of the system of r-ideals. The reader is invited to return to the part of the letter to Krull dated 6 June 1944 that is translated in the introduction (page 3), and to reflect upon the simplification and clarification w.r.t. Inequality (2) of the definition of a valuation.

In the letter to Krull dated 13 March 1944 (page 87), Lorenzen stresses the importance of these discoveries in his research.

> E.g. the insight that a system of ideals is intrinsically nothing but a super-semilattice, and a valuation nothing but a linear preorder, strikes me as the most essential result of my effort.

In the noncommutative framework, integral dependence cannot be captured anymore by passing from the r- to the r_a-system. Therefore Lorenzen devises a new construction that may be considered as the birth of dynamical algebra. In the introduction, he describes it for the system of Dedekind ideals.

> Let I be an arbitrary integral domain, $\mathfrak{a}$ a (finite or infinite) ideal of I, a an element of the field of fractions K. We ask ourselves under what circumstances $a \in \mathfrak{a}B$ holds for every valuation superring B of I. For arbitrary $z \in K^*$ and any valuation superring B of I, always
>
> $$z \in B \quad \text{or} \quad z^{-1} \in B.$$
>
> holds. Therefore, whenever $a \in \mathfrak{a}I[z]$ and $a \in \mathfrak{a}I[z^{-1}]$ holds, so does $a \in \mathfrak{a}B$. Likewise follows: if there are elements $z_1, \ldots, z_n \in K^*$ for which
>
> 3) $$a \in \mathfrak{a}I[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$$
>
> holds for each of the 2^n combinations of signs, then, for every valuation superring B of I, holds:
>
> $$a \in \mathfrak{a}B.$$

This condition 3) is also necessary. Namely, if 3) is not fulfilled for any $z_1, \dots, z_n$, then a simple well-ordering argument shows that there is a maximal superring $\overline{I}$ of I with the property that, for all $z_1, \dots, z_n \in K^*$,

$$a \notin \mathfrak{a}\overline{I}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$$

holds for at least one combination of signs. Therefore in particular $a \notin \mathfrak{a}\overline{I}$ holds. If this $\overline{I}$ were not a valuation ring, then there would be a $z \in K^*$ with $z \notin \overline{I}$ and $z^{-1} \notin \overline{I}$, therefore there would be elements $x_1, \dots, x_m$ and $y_1, \dots, y_n$ with

$$a \in \mathfrak{a}\overline{I}[z][x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}]$$
$$a \in \mathfrak{a}\overline{I}[z^{-1}][y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$$

for each combination of signs. But from this

$$a \in \mathfrak{a}\overline{I}[z^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}, y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$$

would follow, i.e. a contradiction. Therefore $\overline{I}$ is a valuation ring.

With that, the following new result is gained:

$a \in \mathfrak{a}B$ holds for every valuation superring B of I exactly when there are elements $z_1, \dots, z_n \in K^*$ for which

$$a \in \mathfrak{a}I[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$$

holds for each combination of signs.

. . . .

a is integrally dependent on I if there are elements $z_1, \dots, z_n$ of the field of fractions that fulfil $a \in I[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ for each combination of signs.

The gist of Lorenzen's new construction is that in a computation in an integral domain I, one may at any time open two branches concerning an element z: in one branch, one supposes that I contains z; in the other, that I contains z^{-1}. If a result may be obtained in each branch by a computation, then there is a computation that yields this result without opening the branches. This construction embodies the computational content of the proof method described by Krull (1936a): see page 9.

This leads to a reshaping of Krull's Fundamentalsatz for integral domains into Theorem 26. We postpone our discussion of this reshaping until the next section, on Lorenzen 1952, instead of dwelling on the 1950 version.

But let us stress another discovery reported in this article: the property of regularity (see Satz 8 on page 27). It consists in requiring of an ℓ-group that if

$a \wedge xax^{-1} = 1$, then $a = 1$. This property may be seen as specifying the amount of commutativity that must be granted in an ℓ-group in order to be allowed to open branches in computations as described above. For more on this, see Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2020.

Excerpt.

Our excerpt is from pages 483–490, 492–494, 496–500, 502–503, 506, 509–512, and 515–518 of "Über halbgeordnete Gruppen", *Mathematische Zeitschrift* 52.

Ein Integritätsbereich I definiert in der multiplikativen Gruppe K^* seines Quotientenkörpers K eine Teilbarkeitsrelation. [...]

. . . .

Wie man der Theorie der kommutativen Halbgruppen entnehmen kann, sind die Ordnungen, die einen Bewertungsring B bestimmen, der I umfaßt, dadurch gekennzeichnet, daß sie zugleich eine Ordnung der Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ von I ermöglichen, so daß stets gilt:

$$5) \qquad \mathfrak{c} \leq \mathfrak{a},\ \mathfrak{c} \leq \mathfrak{b} \ \Rightarrow\ \mathfrak{c} \leq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$$

Genauer gesagt: die Teilbarkeitsrelationen der Bewertungsoberringe von I sind die Ordnungen von K^*, die durch die Ordnungen des Idealsystems von I induziert werden, die 5) erfüllen. Die hier auftretenden Ordnungen des Idealsystems nennen wir die zulässigen Ordnungen.

Wir definieren in § 4 Idealsysteme für beliebige halbgeordnete Mengen und insbesondere für halbgeordnete Gruppen. Wir definieren auch für diesen allgemeinen Fall die zulässigen Ordnungen eines Idealsystems und dann weiter:

Eine Ordnung einer halbgeordneten Gruppe G, zu der ein Idealsystem H gegeben ist, heißt zulässig (bezgl. H), wenn sie durch eine zulässige Ordnung von H in G induziert wird. Die Teilbarkeitsrelationen der Bewertungsoberringe von I sind dann also genau die (bezgl. des Dedekindschen Idealsystems) zulässigen Ordnungen von K^*.

. . . .

Gegeben sei eine beliebige halbgeordnete Gruppe G und ein beliebiges Idealsystem H von G. Wann und wie ist die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar? [...]

. . . .

Wie läßt sich eine halbgeordnete Gruppe in eine Verbandsgruppe einbetten – vorausgesetzt, daß eine solche Einbettung möglich ist?

. . . .

Wir erhalten die Antwort auf unsere Frage durch eine genaue halbordnungstheoretische Analyse des Idealbegriffs. Im Kommutativen werden die Idealsysteme stets als Systeme von gewissen Untermengen eingeführt. Beseitigt man aber diese mengentheoretische Einkleidung, so läßt sich der Idealbegriff ganz einfach definieren: ein Idealsystem einer halbgeordneten Menge ist nichts anderes als eine Einbettung in einen Halbverband. (Ich bemerke ausdrücklich, daß man hier statt „Halbverband“ nicht „Verband“ setzen darf.)

. . . .

Ist die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar, so gibt es ein Idealsystem H' von G, dessen v-Ideale eine reguläre Verbandsgruppe bilden. [. . .]

Die hier auftretenden Idealsysteme H', die in der Arithmetik „arithmetisch brauchbar“ heißen, nennen wir auch im allgemeinen Fall „brauchbar“.

. . . .

Wie in der Arithmetik ergibt sich dann weiter, daß unter den brauchbaren Idealsystemen eines ausgezeichnet ist, zu dem alle anderen homomorph sind [. . .]

. . . .

Zur Beantwortung unserer Ausgangsfragestellung für halbgeordnete Gruppen bleibt uns jetzt vor allem folgende Frage:

Wie läßt sich das ausgezeichnete brauchbare Idealsystem einer halbgeordneten Gruppe G konstruieren – vorausgesetzt, daß es überhaupt existiert.

Wir setzen also voraus, daß die Halbordnung von G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar ist. Bei der Konstruktion des ausgezeichneten brauchbaren Idealsystems wollen wir aber die Kenntnis dieser Ordnungen nicht voraussetzen, weil wir gerade mit Hilfe des Idealsystems die zulässigen Ordnungen bestimmen wollen.

Diese Konstruktion wird in der Arithmetik geliefert durch den Prüferschen Begriff der Ganzabhängigkeit von einem Ideal $\mathfrak{a}$ des gegebenen Integritätsbereiches I.

Ein Element a des Quotientenkörpers K heißt ganz abhängig von $\mathfrak{a}$, wenn a einer Gleichung

$$1) \qquad a^n + a_1 a^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

mit $a_\nu \in \mathfrak{a}^\nu$ genügt.

In der Theorie der kommutativen Halbgruppen tritt an die Stelle von 1) die Bedingung, daß es ein endliches Ideal $\mathfrak{c}$ geben soll, so daß

$$2) \qquad a\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

gilt. Auch diese Bedingung 2) läßt sich jedoch nicht auf den nichtkommutativen Fall ausdehnen.

Um den Grundgedanken unserer neuen Konstruktion, die wir statt 1) oder 2) verwenden, deutlich zu machen, führe ich sie hier für den arithmetischen Spezialfall durch. § 6 des Textes bringt die Durchführung für beliebige halbgeordnete Gruppen.

I sei ein beliebiger Integritätsbereich, $\mathfrak{a}$ ein (endliches oder unendliches) Ideal von I, a ein Element des Quotientenkörpers K. Wir fragen uns, wann für jeden Bewertungsoberring B von I gilt: $a \in \mathfrak{a}B$. Für beliebiges $z \in K^*$ und jeden Bewertungsoberring B von I gilt stets

$$z \in B \quad \text{oder} \quad z^{-1} \in B.$$

Gilt also $a \in \mathfrak{a}I[z]$ und $a \in \mathfrak{a}I[z^{-1}]$, so gilt stets $a \in \mathfrak{a}B$. Ebenso folgt: Gibt es Elemente $z_1, \ldots, z_n \in K^*$, für die

3) $$a \in \mathfrak{a}I[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$$

für jede der 2^n Vorzeichenkombinationen gilt, so gilt für jeden Bewertungsoberring B von I:

$$a \in \mathfrak{a}B.$$

Diese Bedingung 3) ist auch notwendig. Ist nämlich 3) für kein $z_1, \ldots, z_n$ erfüllt, so zeigt ein einfacher Wohlordnungsschluß, daß es einen maximalen Oberring $\overline{I}$ von I gibt, mit der Eigenschaft, daß für jedes $z_1, \ldots, z_n \in K^*$

$$a \notin \mathfrak{a}\overline{I}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$$

für mindestens eine Vorzeichenkombination gilt. Insbesondere gilt also $a \notin \mathfrak{a}\overline{I}$. Wäre dieses $\overline{I}$ kein Bewertungsring, so gäbe es ein $z \in K^*$ mit $z \notin \overline{I}$ und $z^{-1} \notin \overline{I}$, also gäbe es Elemente $x_1, \ldots, x_m$ und $y_1, \ldots, y_n$ mit

$$a \in \mathfrak{a}\overline{I}[z][x_1^{\pm 1}, \ldots, x_m^{\pm 1}]$$
$$a \in \mathfrak{a}\overline{I}[z^{-1}][y_1^{\pm 1}, \ldots, y_n^{\pm 1}]$$

für jede Vorzeichenkombination. Hieraus würde aber

$$a \in \mathfrak{a}\overline{I}[z^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \ldots, x_m^{\pm 1}, y_1^{\pm 1}, \ldots, y_n^{\pm 1}]$$

folgen, d. h. ein Widerspruch. Also ist $\overline{I}$ Bewertungsring.

Damit ist das folgende neue Ergebnis gewonnen:

Es gilt genau dann $a \in \mathfrak{a}B$ für jeden Bewertungsoberring B von I, wenn es Elemente $z_1, \ldots, z_n \in K^*$ gibt, für die

$$a \in \mathfrak{a}I[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$$

für jede Vorzeichenkombination gilt.

Der Beweis ist so einfach, daß er sich ohne weiteres in beliebigen halbgeordneten Gruppen durchführen läßt und hier sowohl eine Konstruktion des ausgezeichneten brauchbaren Idealsystems liefert (vorausgesetzt, daß es existiert), als auch die folgende Frage beantwortet:

Wann ist die Halbordnung einer halbgeordneten Gruppe G als Konjunktion zulässiger Ordnungen von G darstellbar?

Zum Schluß zeigen wir, daß sich diese Ergebnisse mit den bekannten Ergebnissen im Kommutativen in Übereinstimmung befinden. [...] Ferner erhält man für den grundlegenden Begriff der Ganzabhängigkeit eines Elementes a von einem Integritätsbereich I einen neuen gleichwertigen Ausdruck:

a ist genau dann ganz abhängig von I, wenn es Elemente $z_1, \ldots, z_n$ des Quotientenkörpers gibt, die $a \in I[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$ für jede Vorzeichenkombination erfüllen.

§ 1.

Halbordnungen.

....

Für jede Halbordnung benutzen wir außerdem zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} &a \geq b, \text{ wenn } b \leq a \text{ gilt,} \\ &a \equiv b, \text{ wenn } a \leq b \text{ und } a \geq b \text{ gilt,} \end{aligned}$$

....

Die ganzen Elemente einer halbgeordneten Gruppe G bilden eine invariante Unterhalbgruppe $\mathfrak{g}$ von G. Es gilt nämlich

$$1 \geq 1,$$

für jedes $a, b \in G$:

$$a \geq 1,\ b \geq 1 \ \Rightarrow \ ab \geq 1,$$

für jedes $a, x \in G$:

$$a \geq 1 \ \Rightarrow \ xax^{-1} \geq 1.$$

Dies bedeutet für die Menge $\mathfrak{g}$ der ganzen Elemente

$$1 \in \mathfrak{g},$$

für jedes $a, b \in G$:

$$a \in \mathfrak{g},\ b \in \mathfrak{g} \ \Rightarrow\ ab \in \mathfrak{g},$$

für jedes $a, x \in G$:

$$a \in \mathfrak{g} \ \Rightarrow\ xax^{-1} \in \mathfrak{g}.$$

Wir nennen die invariante Unterhalbgruppe der ganzen Elemente kurz die (zu $\leq$) zugehörige Halbgruppe.

S a t z 1. Die Halbordnungen einer Gruppe G entsprechen eineindeutig den invarianten Unterhalbgruppen von G.

. . . .

§ 2.
Verbandsgruppen.

. . . .

Wir nennen zwei Elemente a und b einer Verbandsgruppe teilerfremd, wenn $a \wedge b \equiv 1$ gilt, und schreiben hierfür $a \parallel b$. [...]

. . . .

§ 3.
Hauptgruppen.

. . . .

Wir nennen diese direkten Produkte von geordneten Gruppen Vektorgruppen. [...]

S a t z 8. In einer Vektorgruppe G gilt für jedes $a, x \in G$

$$a \parallel xax^{-1} \ \Rightarrow\ a \equiv 1.$$

B e w e i s. Wir haben nur nachzuweisen, daß diese Bedingung für geordnete Gruppen gilt. Aus $a > 1 \ \Rightarrow\ xax^{-1} > 1$ folgt aber sofort $a > 1 \ \Rightarrow\ \min(a, xax^{-1}) > 1$.

Wir nennen jede Verbandsgruppe, die die Bedingung des Satzes 8 erfüllt, regulär. Also ist jede Vektorgruppe eine reguläre Verbandsgruppe.

Dieser Satz läßt sich nicht umkehren, wohl aber gilt, daß jede reguläre Verbandsgruppe Untergruppe einer Vektorgruppe ist. Dieses wollen wir im Folgenden beweisen.

Wir definieren zunächst: Jede Untergruppe einer Vektorgruppe heißt eine Hauptgruppe.

. . . .

Es seien H und H' Halbverbandshalbgruppen und $\to$ eine Abbildung von H in H', die für jedes $a, b \in H$, $a', b' \in H'$ mit $a \to a'$ und $b \to b'$ erfüllt:

1) $$a \leq b \;\Rightarrow\; a' \leq b'$$

2) $$a \wedge b \;\to\; a' \wedge b'$$

3) $$ab \;\to\; a'b'.$$

Eine solche Abbildung nennen wir einen Homomorphismus von H.

Jeder Homomorphismus definiert eine Relation $\dot{\leq}$ in H auf folgende Weise. Wir setzen fest, daß $a \dot{\leq} b$ in H genau dann gelten soll, wenn $a' \leq b'$ in H' gilt. H ist bzgl. dieser Relation wieder eine Halbverbandshalbgruppe und die Relation $\dot{\leq}$ erfüllt:

I) $$a \leq b \;\Rightarrow\; a \dot{\leq} b$$

II) $$x \dot{\leq} a,\; x \dot{\leq} b \;\Rightarrow\; x \dot{\leq} a \wedge b.$$

Es gilt auch die Umkehrung: Ist $\dot{\leq}$ eine Halbordnung von H, die I) und II) erfüllt, so ist H bzgl. $\dot{\leq}$ eine Halbverbandshalbgruppe (wir wollen diese mit H' bezeichnen) und die Abbildung $a \to a$ von H auf H' ist ein Homomorphismus.

. . . .

Aufgrund dieser Gleichwertigkeit betrachten wir statt der Homomorphismen von H nur die Halbordnungen von H, die I) und II) erfüllen. Wir nennen diese Halbordnungen kurz die zulässigen Halbordnungen von H.

Zwei Homomorphismen von H, die dieselbe zulässige Halbordnung definieren, nennen wir äquivalent. Es entsprechen dann also die Homomorphismen von H bis auf Äquivalenz eineindeutig den zulässigen Halbordnungen von H.

Für eine Verbandsgruppe G entsprechen die zulässigen Halbordnungen von G aber auch eineindeutig gewissen Unterhalbgruppen von G. Aus Satz 1 folgt nämlich sofort:

Ist $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe einer Verbandsgruppe G, so entsprechen die zulässigen Halbordnungen von G eineindeutig den invarianten Unterhalbgruppen $\dot{\mathfrak{g}}$ von G, die für jedes $a, b \in G$

$$\text{I)}\quad \mathfrak{g} \subseteq \dot{\mathfrak{g}} \qquad\qquad \text{II)}\quad a \in \dot{\mathfrak{g}},\; b \in \dot{\mathfrak{g}} \;\Rightarrow\; a \wedge b \in \dot{\mathfrak{g}}$$

erfüllen.

Diese Halbgruppen $\dot{\mathfrak{g}}$ nennen wir die zulässigen Halbgruppen von G. Die Homomorphismen einer Verbandsgruppe G entsprechen also bis auf Äquivalenz eineindeutig den zulässigen Halbgruppen von G.

Die zulässigen Halbgruppen einer Verbandsgruppe lassen sich nun durch „Quotientenbildung“ aus der zugehörigen Halbgruppe $\mathfrak{g}$ gewinnen. Dazu haben wir invariante Unterhalbgruppen S von $\mathfrak{g}$ zu betrachten. Gilt für jedes $a, b \in \mathfrak{g}$

$$a \leq b,\ b \in S \ \Rightarrow\ a \in S,$$

so nennen wir S vollständig.

Satz 9. Die Homomorphismen einer Verbandsgruppe G entsprechen bis auf Äquivalenz eineindeutig den vollständigen, invarianten Unterhalbgruppen der zugehörigen Halbgruppe $\mathfrak{g}$.

. . . .

Satz 13. Jede reguläre Verbandsgruppe ist Hauptgruppe.

. . . .

Zusammengefaßt erhalten wir also eine Kennzeichnung der Hauptgruppen, die unabhängig ist vom Ordnungsbegriff. Die Bedeutung dieser Kennzeichnung liegt darin, daß sich die Ordnungen einer Gruppe im allgemeinen nur mit Wohlordnungsschlüssen konstruieren lassen – die Oberverbandsgruppen dagegen lassen sich auch ohne Wohlordnung konstruieren mit Hilfe des Idealbegriffs.

§ 4.

Idealsysteme.

Wir definieren den Idealbegriff zunächst für beliebige halbgeordnete Mengen.

Unter einem Idealsystem $\mathfrak{S}$ einer halbgeordneten Menge M verstehen wir einen minimalen Oberhalbverband von M. Ein Oberhalbverband von M enthält zu endlich vielen Elementen a_μ von M $(\mu = 1, \ldots, m)$ stets den g. g. T. $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$. Er heißt minimal, wenn er nur aus Elementen dieser Form besteht. Es gibt dann nämlich keinen echten Unterhalbverband, der auch noch M umfaßt.

. . . .

Der Idealbegriff ist für halbgeordnete Gruppen in dieser Form noch zu unbestimmt. Als Idealsystem einer halbgeordneten Halbgruppe H wollen wir nur diejenigen Idealsysteme der halbgeordneten Menge H bezeichnen, in denen durch die Festsetzung

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_m)(b_1 \wedge \ldots \wedge b_n) \equiv a_1 b_1 \wedge \ldots \wedge a_m b_n$$

eine Multiplikation definiert werden kann.

. . . .

Die Einführung der Idealsysteme geschieht, um mit ihrer Hilfe die Einbettung einer Hauptgruppe G in eine reguläre Verbandsgruppe konstruktiv ohne Benutzung der Ordnungen von G zu ermöglichen.

. . . .

§ 5.

r-Gruppen.

. . . .

Damit unsere Untersuchung der halbgeordneten Gruppen auch die speziellen Fragen der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche umfaßt, legen wir daher von jetzt ab eine halbgeordnete Gruppe zugrunde, zu der von vornherein ein festes Idealsystem gegeben ist. Ist dies das System der r-Ideale, so nennen wir die halbgeordnete Gruppe kurz eine r-Gruppe.

In einer r-Gruppe erklären wir nur diejenigen Halbordnungen als r-zulässig, die durch eine zulässige Halbordnung des r-Idealsystems induziert werden.

Die r-zulässigen Halbordnungen lassen sich unabhängig von dem Begriff der zulässigen Halbordnung eines Halbverbandes kennzeichnen. Ist nämlich eine beliebige halbgeordnete Gruppe G gegeben, und ist H ein Idealsystem von G, so gilt

Satz 17. Eine Halbordnung $\dot{\leq}$ von G wird genau dann durch eine zulässige Halbordnung von H induziert, wenn

1) $a \leq b \;\Rightarrow\; a \mathrel{\dot{\leq}} b$

erfüllt ist und wenn aus $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \leq a$ in H für jedes $x \in G$ folgt

2) $x \mathrel{\dot{\leq}} a_1, \ldots, x \mathrel{\dot{\leq}} a_m \;\Rightarrow\; x \mathrel{\dot{\leq}} a.$

. . . .

Für die Ordnungen von G gilt darüber hinaus

Satz 18. Die zulässigen Ordnungen von H entsprechen eineindeutig den Ordnungen von G, die 1) und 2) erfüllen.

. . . .

Ist G eine r-Gruppe und $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe, so entsprechen die r-zulässigen Halbordnungen bzw. Ordnungen von G den invarianten Unterhalbgruppen bzw. den linearen, invarianten Unterhalbgruppen $\dot{\mathfrak{g}}$ die

1) $\mathfrak{g} \subseteq \dot{\mathfrak{g}}$

erfüllen, und für die aus $a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \underset{r}{\leq} a$ folgt:

2) $a_1 \in \dot{\mathfrak{g}}, \ldots, a_m \in \dot{\mathfrak{g}} \;\Rightarrow\; a \in \dot{\mathfrak{g}}$.

Statt 2) läßt sich auch schreiben:

$$a_1 \in \dot{\mathfrak{g}}, \ldots, a_m \in \dot{\mathfrak{g}} \;\Rightarrow\; (a_1, \ldots, a_m)_r \subseteq \dot{\mathfrak{g}}.$$

Wir nennen die invarianten Unterhalbgruppen von G, die 1) und 2) erfüllen, die r-zulässigen Halbgruppen von G.

Eine r-Gruppe G heißt r-Hauptgruppe, wenn die Halbordnung von G nicht nur Konjunktion von Ordnungen von G ist, sondern sogar Konjunktion von r-zulässigen Ordnungen ist. Das ist also genau dann der Fall, wenn die zugehörige Halbgruppe Durchschnitt von linearen r-zulässigen Halbgruppen ist.

. . . .

§ 6.

Die r-Abschließung.

Wir wollen in diesem § nachweisen, daß sich das ausgezeichnete r-brauchbare Idealsystem, das r_a-System, einer r-Hauptgruppe unabhängig von den Begriffen der vorhergehenden §§ kennzeichnen läßt.

Es sei G eine beliebige r-Gruppe, $\mathfrak{g}$ die zugehörige Halbgruppe, $\dot{\mathfrak{g}}$ eine r-zulässige Halbgruppe, $\mathfrak{a} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ eine endliche Untermenge von G und $a \in G$.

Wir bezeichnen das r-Ideal $(a_1, \ldots, a_m)_r$ mit $\mathfrak{a}_r$.

Wir definieren das Produkt $\mathfrak{a}_r \,.\, \dot{\mathfrak{g}}$ als die kleinste Untermenge von G, die sämtliche Elemente $a\dot{g}$ mit $a \in \mathfrak{a}_r$ und $\dot{g} \in \dot{\mathfrak{g}}$ enthält und außerdem für jedes $x_1, \ldots, x_n \in G$ die Bedingung

$$x_1 \in \mathfrak{a}_r \,.\, \dot{\mathfrak{g}}, \ldots, x_n \in \mathfrak{a}_r \,.\, \dot{\mathfrak{g}} \;\Rightarrow\; (x_1, \ldots, x_n)_r \subseteq \mathfrak{a}_r \,.\, \dot{\mathfrak{g}}$$

erfüllt.

. . . .

[...] bezeichnen wir für jedes $x \in G$ mit $\dot{\mathfrak{g}}(x)_r$ den Durchschnitt aller r-zulässigen Halbgruppen, die $\dot{\mathfrak{g}}$ umfassen und außerdem x enthalten. $\dot{\mathfrak{g}}(x)_r$ ist wieder eine r-zulässige Halbgruppe, die „r-Erweiterung" von $\dot{\mathfrak{g}}$ mit x.

....

Wir definieren dazu eine Relation α_r zwischen den Elementen a und den Produkten $\mathfrak{a}_r \,.\, \dot{\mathfrak{g}}$.

Wir setzen $a \;\alpha_r\; \mathfrak{a}_r \,.\, \dot{\mathfrak{g}}$, wenn es Elemente $x_1, \ldots, x_n$ von G gibt mit $a \in \mathfrak{a}_r \,.\, \dot{\mathfrak{g}}(x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1})_r$ für jede der 2^n möglichen Vorzeichenkombinationen.

Satz 24. *a ist genau dann r-abhängig von $\mathfrak{a}_r$ in $\dot{\mathfrak{g}}$, wenn $a \;\alpha_r\; \mathfrak{a}_r \,.\, \dot{\mathfrak{g}}$ gilt.*

....

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, daß es jetzt möglich ist, für jede r-Hauptgruppe eine direkte Konstruktion des r_a-Idealsystems anzugeben.

....

[...] Gilt $a \;\alpha_r\; (1) \,.\, \dot{\mathfrak{g}}$, so nennen wir a r-abhängig von $\dot{\mathfrak{g}}$, da $(1) \,.\, \dot{\mathfrak{g}} = \dot{\mathfrak{g}}$ ist.

Liegt jedes von $\dot{\mathfrak{g}}$ r-abhängige Element in $\dot{\mathfrak{g}}$, so nennen wir $\dot{\mathfrak{g}}$ r-abgeschlossen.

....

Satz 26. Eine r-Gruppe ist genau dann r-Hauptgruppe, wenn die zugehörige Halbgruppe r-abgeschlossen ist.

7. Lorenzen 1952: the Fundamentalsatz for semilattice domains.

The first three sections of Lorenzen 1952 propose a streamlined version of Lorenzen 1950 in the more general framework of a *domain* $(B, \preccurlyeq_B, G)$, i.e. of a preordered set $(B, \preccurlyeq_B)$ with a monoid G of preorder-preserving operators on B. $(H, \preccurlyeq_H, G)$ is a *semilattice domain* if $(H, \preccurlyeq_H)$ is a semilattice and if the action of G preserves meets. A preorder $\preccurlyeq$ on a semilattice domain H is *$\preccurlyeq_H$-allowable* if it is coarser than $\preccurlyeq_H$ and if meets (w.r.t. $\preccurlyeq_H$) are also meets w.r.t. $\preccurlyeq$. One can similarly define lattice domains and the corresponding allowability.

A *domain of ideals* H_r for a domain B is a minimal supersemilattice domain. A preorder $\preccurlyeq$ on B is *r-allowable* if it is induced by an allowable preorder of H_r. B is an *r-principal domain* if its preorder is a conjunction of r-allowable linear preorders.

Krull's Fundamentalsatz for integral domains becomes a characterisation of an r-principal domain as a domain B in which behaving as if it were linearly preordered, i.e. in which assuming that certain pairs of elements $\alpha_1, \ldots, \alpha_e \in B \times B$ are linearly preordered, does not add new preordered pairs to the preorder. His formulation of this "as if" goes as follows: it is the simultaneous consideration of 2^e different preorders corresponding to preordering each pair one way or the other (a way described by a combination of signs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_e = \pm 1$), and each of these preorders is the conjunction $R[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_e^{\varepsilon_e}]_r$ of all the r-allowable preorders coarser than $\preccurlyeq_B$ in which the pairs are preordered in the described way (here below, R is Lorenzen's notation for the preorder $\preccurlyeq_B$).

Theorem 1. *An r-domain B (w.r.t. R and G) is an r-principal domain if, and only if, for all pairs $\alpha_1, \ldots, \alpha_e$ from B, holds:*

$$\bigcap_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_e \\ \varepsilon=\pm 1}} R[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_e^{\varepsilon_e}]_r \subset R.$$

This final shape of the Fundamentalsatz corresponds to Satz 26 of Lorenzen 1950 (see above) and is obtained by the arguments developed there. The characterisation given in Theorem 1 is but a formulation of *r-closedness*: compare the formulation of integral dependence at the end of the introduction of Lorenzen 1950 (page 26, translated on page 22).

Note that the article Lorenzen 1951 shows that Lorenzen had the means of a considerably simpler formulation of this "as if" by starting from the logic-free and set-theory-free formal system given by H_r and by adding the e axioms corresponding to preordering the pairs (see, in this respect, Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2019, 2020). He may have refrained from doing so in order to stick to a purely algebraic framework that would suit his potential readers.

In the last section, the property of regularity introduced in Lorenzen 1950 is given the following symmetrical form for a distributive lattice domain $(V, \preccurlyeq_V, G)$: that $xa \wedge yb \preccurlyeq_V xb \vee ya$ for $a, b \in V$ and $x, y \in G$.

Excerpt.

Our excerpt is from pages 269–274 of "Teilbarkeitstheorie in Bereichen", *Mathematische Zeitschrift* 55.

§ 1.

Bereiche.

B sei eine Menge (Elemente $a, b, \ldots$), R eine zweistellige Relation in B und G eine Menge von Operatoren $x, y, \ldots$ von B.

Definition 1. B heißt ein *Bereich* (bezügl. R und G), wenn für alle a, b, c und x gilt

$$a \; R \; a \tag{1.1}$$

$$a \; R \; b, b \; R \; c \rightarrow a \; R \; c \tag{1.2}$$

$$a \; R \; b \rightarrow xa \; R \; xb. \tag{1.3}$$

Da (1.3) für den Operator 1 (definiert durch $1 \cdot a = a$) und für xy (definiert durch $(xy)a = x(ya)$) gilt, falls für x und y, sei im Folgenden stets angenommen, daß G eine Halbgruppe mit Einselement ist.

R heißt die Halbordnung von B. Statt $a \; R \; b$ werde $a < b$ oder $b > a$ geschrieben. $a = b$ bedeute $a < b$ und $b < a$ (= braucht nicht die Identität zu sein).

Gilt $a < b$ oder $a > b$ für alle a und b, dann heißt R eine *Ordnung*.

Definition 2. Ein Bereich B heißt ein *Halbverbandsbereich*, wenn für alle a, b ein größter gemeinsamer Teiler $a \wedge b$ existiert, so daß für alle c und x gilt

$$c < a \wedge b \longleftrightarrow c < a, c < b \tag{1.4}$$

$$x(a \wedge b) = xa \wedge xb. \tag{1.5}$$

. . . .

Definition 3. Eine Halbordnung S eines Halbverbandsbereiches B (bezügl. R und G) heißt *zulässig*, wenn für alle a, b, c und x gilt

$$R \subset S \tag{1.6}$$

$$a \; S \; b \rightarrow xa \; S \; xb \tag{1.7}$$

$$c \; S \; a, c \; S \; b \rightarrow c \; S \; a \wedge b. \tag{1.8}$$

. . . .

Die Halbordnung R eines Bereichs B induziert in jeder Untermenge B_0 von B eine Halbordnung R_0 von B_0. R heißt eine *Fortsetzung* von R_0 auf B. Ist B_0 zulässig bezügl. G (d. h. $xB_0 \subset B_0$ für alle x), dann induziert G eine Operatorenhalbgruppe G_0 von B_0. B heißt dann ein *Oberbereich* von B_0 (bezügl. R_0 und G_0).

§ 2.

Ideale.

B sei ein Bereich (bezügl. R und G).

Definition 4. Ein minimaler Halbverbandsoberbereich H von B heißt ein *Idealbereich* von B.

. . . .

Die Idealbereiche H werden durch einen Kennbuchstaben unterschieden. r sei eine Variable für diese Kennbuchstaben.

Ein Bereich B mit einem Idealbereich H_r heiße ein *r-Bereich*.

Definition 5. Eine Halbordnung S eines r-Bereiches B heiße *r-zulässig*, wenn S durch eine zulässige Halbordnung von H_r induziert wird.

. . . .

Definition 6. Ein r-Bereich B heißt *r-Hauptbereich*, wenn die Halbordnung R von B Konjunktion r-zulässiger Ordnungen von B ist.

. . . .

werde für jede r-zulässige Halbordnung S und jedes Paar $\alpha = a_1, a_2$ aus B die r-Erweiterung $S[\alpha]_r$ als Konjunktion aller r-zulässigen Halbordnungen $\overline{S}$ von B mit

$$S \subset \overline{S} \tag{2.1}$$

$$a_1 \, \overline{S} \, a_2 \tag{2.2}$$

definiert. Zur bequemeren Formulierung sei ferner gesetzt

. . . .

$$\alpha^{+1} = a_1, a_2, \quad \alpha^{-1} = a_2, a_1.$$

. . . .

Satz 1. *Ein r-Bereich B (bezügl. R und G) ist genau dann ein r-Hauptbereich, wenn für alle Paare $\alpha_1, \ldots, \alpha_e$ aus B gilt:*

$$\bigcap_{\substack{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_e \\ \varepsilon = \pm 1}} R[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \ldots, \alpha_e^{\varepsilon_e}]_r \subset R.$$

. . . .

§ 4.
Reguläre Verbandsbereiche.

Definition 9. Ein Verbandsbereich V heißt *regulär*, wenn V distributiv ist und für a, b und x, y gilt: $xa \wedge yb < xb \vee ya$.

. . . .

Satz 3. *Die Halbordnung eines Verbandsbereiches V ist genau dann Konjunktion zulässiger Ordnungen von V, wenn V regulär ist.*

8. Lorenzen 1953a: the Fundamentalsatz for integral domains as an embedding into a super-ℓ-group.

The introduction of Lorenzen 1953a describes his state of the art on Krull's Fundamentalsatz for integral domains:

- Lorenzen 1950 shows that the problem of representing an integral domain I as intersection of valuation rings may be reduced to the problem of constructing a super-ℓ-group of the divisibility group G of I such that the meets of elements of G form a homomorphic image of the system of Dedekind ideals.
- In fact, Satz 3 of Lorenzen 1952 (see above) establishes that the preorder of a regular lattice domain may be represented as a conjunction of allowable linear preorders, and this corresponds to an intersection of valuation rings in the case of an integral domain.

> According to the Fundamentalsatz, the integral domains I that are representable as intersection of valuation rings are characterised by being integrally closed. On the other hand, the representability of I as an intersection of valuation rings is equivalent to the existence of a lattice-preordered supergroup V of the multiplicative group G of the field of fractions K of I – where V must satisfy the condition that the domain of ideals H (which consists of all g.c.d.s $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ with $a_\nu \in G$) contained in V is a homomorphic image of the domain of Dedekind ideals H_d of I.
>
> This last equivalence results from the more general domain-theoretic theorem that the preorder of every regular lattice-preordered domain is a conjunction of allowable total orders – if one adds that every commutative lattice-preordered group is trivially regular. Therefore two routes to the proof of Krull's Fundamentalsatz are available: one has to construct, for an integrally closed integral domain, either an intersection representation through valuations or a lattice-preordered supergroup. Both proof possibilities are carried out for commutative groups – for noncommutative groups, however, and more generally for domains, only the first route has been hitherto practicable.
>
> The present work describes the second proof course also in the general case. If afterwards one specialises the general method to divisibility in commutative fields K, then the following results. For the construction of a lattice-preordered supergroup it is required only to define when, for arbitrary elements a_μ, b_ν out of the multiplicative group G of K,
>
> $$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \prec b_1 \vee \cdots \vee b_n$$
>
> is to hold ($\prec$ stands for "divides", $\wedge$ denotes the g.c.d., $\vee$ the l.c.m.).

For every integrally closed integral domain I, one obtains a lattice-preordered supergroup of G if one defines

$$(1)\quad a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \prec b_1 \vee \cdots \vee b_n \longleftrightarrow 1 \in \sum_{1} {}_{\varkappa}(a_1 b_1^{-1}, \ldots, a_\mu b_\nu^{-1}, \ldots, a_m b_n^{-1})^{\varkappa}.$$

For $n = 1$, $b_1 = b$, this definition changes into the prüferian definition of integral dependence of b on $(a_1, \ldots, a_m)$

$$(2)\quad a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \prec b \longleftrightarrow b^k + c_1 b^{k-1} + \cdots + c_k = 0 \qquad [c_\varkappa \in (a_1, \ldots, a_m)^\varkappa].$$

Therefore (1) describes a suitable enlargement of the concept of integral dependence.

In this last article on the subject, Lorenzen proposes the construction of an ℓ-group from a preordered group G and a semilattice of ideals H_r; G embeds into this ℓ-group if and only if it is r-closed. He does so by first constructing the distributive lattice generated by an “entailment relation” associated with H_r (see Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2020) and then proving that it is a lattice-preordered group.

Excerpt.

Our excerpt is from page 15 of “Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen”, *Mathematische Zeitschrift* 58.

Nach dem KRULLschen Fundamentalsatz [*1*] sind die Integritätsbereiche I, die als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellbar sind, dadurch charakterisiert, daß sie ganz abgeschlossen sind. Die Darstellbarkeit von I als Durchschnitt von Bewertungsringen ist andererseits äquivalent [*3*] mit der Existenz einer Verbandsobergruppe V der multiplikativen Gruppe G des Quotientenkörpers K von I – wobei V der Bedingung genügen muß, daß der in V enthaltene Idealbereich H (der aus allen g.g.T. $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$ mit $a_\nu \in G$ besteht) ein homomorphes Bild des DEDEKINDschen Idealbereichs H_d von I ist.

Diese letztere Äquivalenz ergibt sich aus dem allgemeineren bereichstheoretischen [*4*] Satz, daß die Halbordnung jedes regulären Verbandsbereiches Konjunktion von zulässigen Ordnungen ist – wenn man hinzufügt, daß jede kommutative Verbandsgruppe trivialerweise regulär ist. Daher stehen zum Beweis des KRULLschen Fundamentalsatzes zwei Wege zur Verfügung: Man hat für einen ganz abgeschlossenen Integritätsbereich entweder eine Durchschnittsdarstellung durch Bewertungen oder eine Verbandsobergruppe zu konstruieren.

Beide Beweismöglichkeiten sind für kommutative Gruppen durchgeführt – für nichtkommutative Gruppen und allgemeiner für Bereiche ist bisher jedoch nur der erste Weg gangbar.

Die vorliegende Arbeit stellt den zweiten Beweisgang auch im allgemeinen Falle dar. Spezialisiert man anschließend die allgemeine Methode auf die Teilbarkeit in kommutativen Körpern K, so ergibt sich folgendes. Zur Konstruktion einer Verbandsobergruppe braucht nur definiert zu werden, wann für beliebige Elemente a_μ, b_ν aus der multiplikativen Gruppe G von K gelten soll [*5*]

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \prec b_1 \vee \ldots \vee b_n$$

($\prec$ steht für „teilt", $\wedge$ bezeichnet den g.g.T., $\vee$ das k.g.V.).

Für jeden ganz abgeschlossenen Integritätsbereich I erhält man eine Verbandsobergruppe von G, wenn man definiert

$$(1)\quad a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \prec b_1 \vee \ldots \vee b_n \longleftrightarrow 1 \in \sum_{1} {}_{\varkappa} (a_1 b_1^{-1}, \ldots, a_\mu b_\nu^{-1}, \ldots, a_m b_n^{-1})^{\varkappa}.$$

Für $n = 1$, $b_1 = b$ geht diese Definition über in die Prüfersche Definition der Ganzabhängigkeit von b von $(a_1, \ldots, a_m)$

$$(2)\quad a_1 \wedge \ldots \wedge a_m \prec b \longleftrightarrow b^k + c_1 b^{k-1} + \cdots + c_k = 0 \qquad [c_\varkappa \in (a_1, \ldots, a_m)^\varkappa].$$

Daher stellt (1) eine zweckmäßige Ausdehnung des Begriffes der Ganzabhängigkeit dar.

. . . .

Literatur.

[*1*] Krull, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167**, 160–196 (1931). – [. . .] [*3*] Lorenzen, P.: Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z. **52**, 483–526 (1949). – [*4*] Lorenzen, P.: Teilbarkeitstheorie in Bereichen. Math. Z. **55**, 269–275 (1952). – [*5*] Lorenzen, P.: Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände. J. Symb. Log. **16**, 81–106 (1951).

9. A letter from Krull to Scholz from 1953: the well-ordering theorem.

Extract.

We translate an extract from the letter that Krull sent to Scholz on 18 April 1953 (Heinrich Scholz Archive at University and State Library of Münster), edited on page 103. Heinrich-Scholz-Archiv at Universitäts- und Landesbibliothek Münster.

> In working with the uncountable, in particular with the well-ordering theorem, I always had the feeling that one uses fictions there that need to be replaced some day by more reasonable concepts. But I was not getting upset over it, because I was convinced that in a careful application of the common "fictions" nothing false comes out, and because I was firmly counting on the man who would some day put all in order. Lorenzen has now found according to my conviction the right way [...].

Well-ordering arguments and constructions.

In his articles, Lorenzen uses well-ordering arguments in several places:

- in Lorenzen 1939a for the proof of Satz 4 (spelled out in our comment on the proof of Theorem 12 on page 14);
- in Lorenzen 1950 for the proof of Satz 24 (stated in the introduction for the case of integral domains, see page 25 and the translation on page 22); for the proof of Satz 13 and of Satz 1 in Teil II;
- in Lorenzen 1952 for the proof of his lemma to Theorem 1, a version of Lorenzen 1950, Satz 24; for the proof of Satz 3, a version of Lorenzen 1950, Satz 13.
- However, no well-ordering argument appears in Lorenzen 1953a.

Three kinds of uses may be distinguished.

- Lorenzen 1939a, Satz 4: Zorn's lemma is used in order to obtain a maximal prime ideal.
- Lorenzen 1950, Satz 24; Lorenzen 1952, lemma to Theorem 1: a "more reasonable concept", which amounts to behaving as if the domain were linearly preordered, is introduced to replace the "fiction" of valuations.
- Lorenzen 1950, Satz 13; Lorenzen 1952, Satz 3: Zorn's lemma is used to obtain linear preorders. These are "fictions" which are replaced by the "more reasonable concept" of an ℓ-group, in which one may compute as if it were linearly preordered.

We can retrace Lorenzen's position w.r.t. well-ordering arguments through his use of the word *construction* and related words. Let us gather the relevant passages.

1. In Lorenzen's correspondence edited in the appendix, these words appear only in his letter to Krull, dated 25 April 1944 (page 90), in which he provides a detailed description of his habilitation, and in his last two letters to Hasse, dated July and September 1963.
2. In the introduction to Lorenzen 1950, he writes the following (see page 24).

How can a preordered group be embedded into a lattice-preordered group – assuming that such an embedding is possible?

. . . .

How can the distinguished brauchbar[1] system of ideals of a preordered group G be constructed – assuming that it actually exists?

We thus assume that the preorder of G is representable as conjunction of allowable linear preorders of G. But we do not want to use the knowledge of these linear preorders, because the allowable linear preorders are just what we want to determine by the aid of the system of ideals.

In arithmetic, This construction is provided by the prüferian concept of integral dependence on an ideal $\mathfrak{a}$ of the given integral domain I.

3. After presenting his "new construction", he adds the following (see page 26).

The proof is so easy that it may be carried out in arbitrary preordered groups and here provides a construction of the distinguished brauchbar system of ideals (assuming that it exists), and also answers the following question:

When is the preorder of a preordered group G representable as conjunction of allowable preorders of G?

4. After having proved Satz 13, he makes the following comment (see page 29).

The significance of this characterisation lies in the fact that, in general, the linear preorders of a group can be constructed only with well-ordering arguments – whereas the super-lattice-preordered groups can also be constructed without a well-ordering by the aid of the concept of ideal.

5. He repeats this a few pages later (see page 30).

Systems of ideals are introduced in order to make possible by their aid the embedding of a principal group G into a regular lattice-preordered group constructively, without use of the linear preorders of G.

6. Satz 24 is accompanied by the following comment (see page 32).

The significance of this theorem lies in the fact that it is now possible to state, for every r-principal group, a direct construction of the system of r_a-ideals.

7. Lorenzen (1952, page 273) uses the following wording, which is the most

[1]In Lorenzen's approach, the distinguished brauchbar system of ideals is the system of r_a-ideals.

explicit in the articles studied here.

> For ϱ-principal domains B, Theorem 2 provides a "constructive" definition of the domain of ϱ_a-superideals V_{ϱ_a} of B, i.e. a definition without use of the ϱ-allowable linear preorders of B.

8. Finally, Lorenzen (1953a) uses the following formulation (see page 36).

> [...] one has to construct for an integrally closed integral domain either an intersection representation through valuations or a lattice-preordered supergroup.

As these passages show, Lorenzen holds that a well-ordering argument provides a construction, but he makes distinctions: such an argument avers *that* something is possible, but not *how*; other strategies have to be developed in order to gain knowledge of the thing over and above its bare existence. He also specifies for each construction whether it relies on a well-ordering argument or not, in which latter case it is "direct", or "constructive". This adjective and the adverb "constructively" have a more restricted use than the word "construction" and mean that the well-ordering argument or the "fiction" of a linear preorder have been avoided.

The distinctions he makes show that, like Krull (1936a), he thinks that well-ordering arguments provide only the "mere existence" of the thing constructed. He therefore devises new constructions that bypass them: systems of ideals, super-lattice-preordered groups, the right to compute as if everything were linearly preordered. However, we have not found any passage in which he explains the problem as clearly and simply as Krull does, or in which he motivates his work along the lines of Krull's letter to Scholz.

* * *

Lorenzen's reshaping of Krull's Fundamentalsatz for integral domains can be presented as a process in three steps.

1. Lorenzen 1939a generalises Krull's well-ordering argument from integral domains to preordered cancellative monoids; valuation rings become linear r-supermonoids.

2. Lorenzen 1950 and 1952 successively generalise the well-ordering argument to preordered noncommutative monoids and to domains, so that valuations correspond to r-allowable linear preorders; the right to compute as if the monoid were linearly preordered is embodied in the relation α_r, which is shown to yield finite approximations of them on the proviso that they exist; Lorenzen describes a direct construction of an embedding into a lattice-preordered group on the proviso that it exists.

3. Lorenzen 1953a provides the construction of the free lattice-preordered group generated by a regular noncommutative monoid without this proviso by applying

Satz 7 of Lorenzen 1951, nowadays called the *fundamental theorem of entailment relations* (see Coquand, Lombardi, and Neuwirth 2019, § 2B).

Let us state a further step forward, which Lorenzen does not make.

4. The condition of integral closedness for an integral domain consists in the admissibility of the axiom that divisibility is linear for the formal system generated by the integral domain. The condition of r-closedness for a regular noncommutative monoid consists in the admissibility of the axiom that the preorder is linear.

In the articles discussed here, Lorenzen does not question the existence of a thing provided by a well-ordering argument, but the nonconstructive nature of its existence fails to provide the mathematical clarity needed for extending his work to a noncommutative setting.

The three steps made by Lorenzen are thus genuinely motivated by his endeavour to clarify mathematics, as he writes in his letter to Krull dated 6 June 1944 (page 94, partly translated on page 3), rather than philosophically: viz.,

1. to unveil the order-theoretic nature of the Fundamentalsatz;
2. to devise a counterpart of valuations that works in a noncommutative setting;
3. to bypass valuations by the direct construction of the free lattice-preordered group.

With Step 4 above, dynamical algebra is taking up this process of clarification: see Lombardi (in progress).

Lorenzen's correspondence with Hasse, Krull, and Aubert, together with some relevant documents.

This appendix proposes an edition of the reports on Lorenzen's Ph.D. thesis by Helmut Hasse and Carl Ludwig Siegel, of the known correspondence of Lorenzen with Hasse, Wolfgang Krull, and Karl Egil Aubert, and of a relevant letter from Krull to Heinrich Scholz. It provides evidence for the circumstances in which Lorenzen comes to his insights during the studied period of time.

The reports on Lorenzen's Ph.D. thesis, the letters from Lorenzen to Hasse, and the carbon copies of the letters from Hasse to Lorenzen are in the Universitätsarchiv Göttingen. The letters from 1938 are in the Wolfgang-Krull-Nachlass at Archiv der Universitäts- und Landesbibliothek of Universität Bonn. The letters from Krull and Aubert to Lorenzen, the carbon copies of the letters from Lorenzen to Krull from 1943–1944, to Scholz dated 26 May and 2 June 1944, and to Aubert, as well as the "Bescheinigung" from 1942, are in the Paul-Lorenzen-Nachlass at

Philosophisches Archiv of Universität Konstanz. The request of statement to and statement from the Dozentenbundsführer, the Military government of Germany Fragebogen, the report and certificates on Lorenzen's political attitude under national socialism, as well as the notification on Lorenzen's inaugural lecture are in the Universitätsarchiv Bonn. The other letters from Lorenzen to Scholz, the letter from Krull to Scholz, and the carbon copies of the letters from Scholz to Lorenzen are in the Heinrich-Scholz-Archiv at Universitäts- und Landesbibliothek Münster.

A. Synopsis.

Let us start with a diachronic synopsis of Lorenzen's (L) correspondence with Hasse (H), Krull (K), and Karl Egil Aubert, together with the relevant correspondence between Hasse and Krull edited by Roquette (2004) (whose dates appear slanted below), of some relevant letters from Lorenzen to Heinrich Scholz, and of some related documents.

14.02.1938 H suggests to K that L spend some time with K in Erlangen to discuss ideal theory.
19.02.1938 L pays a visit to K.
02.03.1938 K expresses his satisfaction with L.
07.03.1938 H joins in this expression of satisfaction.
08.03.1938 L corrects certain points concerning v-ideals and total closedness.
13.03.1938 L finds the proof method of Lorenzen 1939a, § 3.
18.03.1938 L reports a success that will turn out to be spurious.
22.03.1938 L provides a glossary for his multiplicative ideal theory.
03.05.1938 H sends K the carbon copy of L's Ph.D. thesis and asks for a brief report.
22.05.1938 K sends H a very positive report on L's Ph.D. thesis.
24.05.1938 H writes a very positive report on L's Ph.D. thesis.
31.05.1938 H thanks K for his report and joins in his criticism of L's laconic style.
02.06.1938 Carl Ludwig Siegel writes a vacuous report on L's Ph.D. thesis.
09.06.1938 L pays a second visit to K.
21.06.1938 H emphasises his agreement with K on their appreciation of L.
30.06.1938 H tells L that he must meet the Dozentenbundsführer [leader of the union of lecturers] and asks a mathematical question.
06.07.1938 L answers H's question from Erlangen. He reports that he is also working on lattice theory with Gottfried Köthe.
01.09.1938 K reports to H that he and L have not been able to repair the defective proofs in L's Ph.D. thesis.
12.03.1939 K has L in mind for a position as assistant in Bonn and asks H whether he would agree to let L leave Göttingen.

17.03.1939 H agrees, but expresses some apprehension about how to replace L in Göttingen.
27.03.1939 K weighs at length the pros and cons of L leaving Göttingen for Bonn.
30.03.1939 H agrees with K that L should leave Göttingen for Bonn.
19.07.1939 K asks H for L's military address in order to tell him that he will be appointed in Bonn from 1 August on.
21.07.1939 H answers that he knows only L's home address in Bad Pyrmont.
09.08.1939 L thanks H for his years of supervision.
11.08.1939 H acknowledges L's thanks.
06.09.1939 War has been declared and L is waiting for his incorporation. He asks H for help in finding a position as a mathematician in the army.
28.09.1939 H suggests to K that L help him by composing a manuscript according to his drafts for a projected volume of *Crelles Journal* on groups.
11.10.1939 L thanks H again on the occasion of the printing of his Ph.D. thesis as an offprint of *Mathematische Zeitschrift*.
10.11.1939 L submits the manuscript of Lorenzen 1940 to H as editor of *Crelles Journal*.
16.11.1939 H acknowledges receipt of L's manuscript and asks a mathematical question.
17.11.1939 H spells out in detail his question from the day before.
13.12.1939 L answers H's question.
04.01.1940 H acknowledges receipt of L's announcement of marriage with Käthe and proposes that L apply for a military position under Alwin Walther by the Baltic sea.
09.01.1940 L thanks H and tells him that he is waiting for K's permission to apply.
10.01.1940 L applies for this military position.
01.02.1940 K informs H that L has been incorporated.
03.02.1940 Käthe Lorenzen does so too.
04.02.1940 L does so himself.
06.02.1940 H answers K and tells him that the process of L's candidature sent to Walther might take some time.
06.02.1940 H answers Käthe Lorenzen along the same lines.
09.02.1940 L asks H as treasurer of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung to waive his member fee.
21.04.1940 L sends an offprint to H and complains about his soul-killing service.
05.05.1940 L tells H that his candidature is still on the way and gratefully accepts a proposition by H to join him at the Oberkommando der Kriegsmarine (OKM, Supreme Command of the Navy).
09.05.1940 H answers that there is a misunderstanding: his proposition concerns a position as a cryptographer under Achim Teubner.
21.05.1940 L thanks H and tells him that he applies for the position under Teubner.
11.06.1940 L sends H some news of his application.

30.06.1940 L reports on his participation in the Battle of France.

23.10.1940 K greets L via H.

14.11.1940 H tells K that he has not seen L for a while and that he hopes to meet him on 30 November.

26.04.1941 L reports on his problems with the military hierarchy and on a little progress in group axiomatics made during a three-days arrest.

07.05.1941 H tells L what he thinks of his insubordination, stubbornness and unmilitariness, and presents Oswald Teichmüller as the example of a correct attitude. He warns L that he will also be judged in his scientific career according to his military attitude. He will not help L anymore, who should now prove his value as a soldier.

07.05.1941 Käthe Lorenzen asks H for a good advice regarding her husband's difficulties.

17.05.1941 L explains to H his attitude towards the military and asks for permission to write to him about his future assignment.

02.01.1942 K attests that L fulfils the requirements for being admitted to habilitation.

18.03.1942 L thanks H for his congratulations on the occasion of the birth of L's daughter Jutta and for his indication of Jean Dieudonné's interest in multiplicative ideal theory. He expresses satisfaction with his work as a teacher.

02.04.1942 H asks L for advice on a manuscript by Hans R. Weber.

07.04.1942 L answers that Weber's results are already known and can be found in Huntington's work.

12.05.1942 The director of the Mathematical seminar in Bonn requests a statement of the leader of the union of lecturers on L's ideological and moral prerequisites for being appointed as assistant.

01.06.1942 Ernst Klapp, the representing leader of the union of lecturers, states that his political attitude is unobjectionable, but that he presents certains deficiencies of character that make his admission to lecturership undesirable: a self-conceit that has also prejudiced his career in the army.

07.05.1943 On the occasion of a review of Krull 1943, L makes an analysis of the axiomatics of the star-operation.

20.09.1943 L finds the proof method of Lorenzen 1950, the dynamical method in algebra.

04.01.1944 K discusses the details of the habilitation process with L and projects that it take place at the beginning of the summer term.

06.02.1944 K acknowledges receipt of a letter from H dated 23 January 1944, which must contain a strong criticism of the person and the work of L. He defends L's work in lattice theory, but reckons that L deserves a repeated lesson, so that he proposes to suspend the process of L's habilitation.

06.02.1944 In this letter to L, K expounds several obstacles to his habilitation.

19.02.1944 K acknowledges receipt of a postcard by H that enables him to treat L's habilitation in agreement with H.

19.02.1944 K writes to L that according to H his scientific publications do not suffice for letting him habilitate.

13.03.1944 L answers that he should be judged on his habilitation manuscript and advocates his research in logic as stemming from the same motivation as in algebra.

01.04.1944 K has begun to read L's habilitation manuscript and asks a question related to the condition of regularity (see page 22).

16.04.1944 Upon having received a postcard by L, K denounces the lattice-ordered groups as being "commutatively infected" and expresses his disappointment that the scope of L's work does therefore not cover the full noncommutative generality. He uses this for reiterating his judgment that L's work is not sufficient for a habilitation.

25.04.1944 L describes precisely his achievements, emphasises that his proof method is completely different from that of his Ph.D. thesis, and appends another manuscript in the hope of convincing K to change his mind.

05.05.1944 L writes Scholz an account of his letter to K.

26.05.1944 L accepts Scholz's proposal to contact Köthe.

29.05.1944 K praises the clearness of L's letter and expresses the suspicion that the intricate style of his manuscripts might hide their relevance. He does not, however, change his mind.

02.06.1944 L asks Scholz to send Köthe a copy of his manuscript.

06.06.1944 L motivates his research as a quest for simplicity and conceptual clarification. He also describes the difficult conditions of his work and career.

06.1944 L thanks Scholz for his intercession with Köthe.

22.06.1944 K writes that L's manuscript is a thorough failure and repeats his point with a reference to the requirement of high scientific quality.

28.06.1944 L writes Scholz an account of K's letter.

09.07.1944 L thanks Scholz for his encouragement; Köthe has written to him that he is willing to report on his habilitation; however, L sees no way to change K's negative judgment and to proceed with his project of habilitating.

16.07.1944 K expresses his sympathy with L after the bombing of Wesermünde.

01.10.1944 Although he is still not satisfied, K admits that L has improved his manuscript. He nevertheless suspects that L has not yet settled the noncommutative case, dealing only with a "semi-commutative" one.

25.07.1945 L asks H whether he has some news on the whereabouts of K, Scholz, Ackermann, and Gentzen.

02.09.1945 L reports on his political attitude under national socialism.

03.09.1945 L fills out the Military government of Germany *Fragebogen*, providing a "chronological record of full-time employment and military service".

06.09.1945 Ernst Peschl certifies L's political attitude.

14.09.1945 A board of examiners (Hellmuth von Weber, Hans Fitting, and Carl Troll) certifies L's political attitude.

07.06.1946 L writes to Scholz that K agrees that he habilitate at once.

08.06.1946 L writes to Scholz about his perspectives in Bonn.

09.08.1946 L is habilitated by giving his inaugural lecture "On the concept of lattice".

15.08.1946 K writes H on the occasion of L's habilitation and expresses his disagreement with H on the scientific value of L's works in lattice theory and logic. But he shares H's objections to L as person.

10.09.1946 K distances himself from "the conception of mathematics as a pure 'theory of structure' in the sense of L (whom [he] tries otherwise to influence vigorously in the opposite direction)".

18.04.1953 K praises L in a letter to Scholz.

14.05.1953 L writes to H on the occasion of his talk on mathematics as science, art, and power (Hasse 1952), and asks him to which extent he considers formalisation as a danger. An annotation shows that H discusses this with L on 3 July 1953.

05.06.1953 H thanks L for his interest and announces that he will shortly pay a visit to Bonn and postpones his answer to that occasion.

09.06.1953 L invites H to his home in anticipation of the latter's visit to Bonn.

07.1959 L gives a sketch of proof of the assertion that the theory of commutative fields is undecidable.

01.08.1959 H has checked L's sketch but for the logical conclusion.

07.03.1960 H thanks L for sending a copy of Lorenzen 1960.

27.06.1961 H thanks L for sending an offprint of Lorenzen 1961 and invites him to give a couple of colloquia in Hamburg about his results on the foundations of mathematics.

04.07.1961 L gratefully accepts and proposes to question how the "assertions used as 'axioms' are to be *proved*".

08.07.1961 H organises L's visit to Hamburg.

11.07.1961 L fixes a last detail of his visit to Hamburg.

09.10.1962 H congratulates L on his appointment as professor in Erlangen and thanks him for the copy of Lorenzen 1962, expressing the hope of finding the time to read it up to the consistency proof for arithmetic.

07.1963 L thanks H for sending him a copy of Hasse 1963b. He considers H's construction of the completion of a valuated field as a flaw.

09.1963 L thanks H for his postcard from Notre Dame. Even though he did not want H to justify himself, he is happy that H agrees that "when one invokes 'all' sequences (e.g. of rational numbers), one always means only 'sufficiently many'". L illustrates his statement that "controlling that everywhere really always only 'sufficiently many' are used, however, is in [his] opinion not trivial" with Lorenzen 1953b.

21.02.1978 Aubert writes to L with an inquiry about K's attitude toward t-ideals (see page 12), which he considers "building blocks of general arithmetics. They seem to form the true arithmetical divisors [. . .]".

06.03.1978 L answers that he had almost no contact with K in Bonn for "political reasons (K had prevented [his] habilitation during war)" and because of his "foundation-theoretic works that K did not acknowledge as 'mathematical' achievements"; he lost track of t-ideals when he focussed on divisibility theory in domains. He asks Aubert in return whether this latter theory has been developed by some algebraist.

10.04.1978 Aubert expands on the importance of t-ideals as universal objects and points out the only reference to Lorenzen 1952 that he is aware of.

18.06.1979 L thanks Aubert for sending him his article on divisibility theory and points out that it deals only with commutative groups: "Was the enlargement to noncommutative groups perhaps only an intellectual luxury?"

B. The correspondence between Krull and Lorenzen, 1938.

19.02.1938. Letter from Lorenzen to Krull.

Göttingen, 19.2.

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich danke Ihnen für Ihr freundliches Interesse, das Sie meiner Arbeit entgegenbringen,[2] und besonders für die Erlaubnis mit Ihnen persönlich darüber sprechen zu dürfen.

Da ich aus verschiedenen Gründen erst am Mittwoch von hier fahren kann, würde ich mir gestatten, Sie am Donnerstag, dem 24.2., morgens aufzusuchen. Falls Ihnen diese Zeit ungelegen sein sollte, können Sie mir ja dann eine andere Zeit sagen.

Ich freue mich sehr, Sie befragen zu dürfen, und hoffe mir, daß ich Ihnen nicht allzu lästig fallen werde.

[2]This interest is subsequent to a letter from Hasse to Krull dated 14 February 1938 (Roquette 2004, § 1.31).

Ihr sehr ergebener
Lorenzen.

08.03.1938. Letter from Lorenzen to Krull.

Gött., 8.3.
Feuerschanzengraben 20a

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich möchte Ihnen zunächst noch einmal herzlichst danken für die so sehr freundliche Aufnahme, die ich bei Ihnen gefunden habe.[3] Ich danke auch besonders Ihrer Frau Gemahlin. Es war für mich eine große Freude mit Ihnen über meine Arbeit sprechen zu können.

Was diese anbetrifft, so muß ich leider folgendes richtigstellen:

Sei $\mathfrak{J}$ eine v-abg[eschlossene] Halbgruppe, $\mathfrak{c}$ ein endliches v-Ideal, so folgt ($\mathfrak{J} = (1) = 1$)

$$1 : \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{c} = (1 : \mathfrak{c}^{-1}) : \mathfrak{c} = \mathfrak{c} : \mathfrak{c} = 1$$

D. h. $\mathfrak{c}$ ist v-umkehrbar, aber $\mathfrak{c}^{-1}$ braucht nicht endlich zu sein.[4] Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ endliche v-Ideale so folgt $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{-1} + \mathfrak{b}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{-1} = 1$ (v-Summe).

Damit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ folgt, muß in $\mathfrak{J}$ die v-Summe zweier echter v-Ideale wieder echt sein. Ist $\mathfrak{J}$ primär,[5] so folgt dies nur für endliche v-Ideale. Wenn etwa gelten würde $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_v = (\mathfrak{a}_v \cup \mathfrak{b}_v)_{v_e}$ für beliebiges $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ käme man auch durch. Aber so ohne weiteres nicht.

Übrigens sind die v_e-Ideale schon in der Arnold schen Arbeit[6] definiert, wie ich jetzt gesehen habe.

Für weitergehende Sätze besteht die Schwierigkeit, daß man aus der v-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{J}$ nicht auch die von $\mathfrak{J}_S$ schließen kann, da aus $\alpha \in (\mathfrak{c}\mathfrak{J}_S)_v$ nicht $\alpha s \in (\mathfrak{c}\mathfrak{J})_v \quad s \in S$ folgt (auch nicht bei endlichem $\mathfrak{c}$!).

Darf ich hier mir vielleicht eine Frage erlauben: Ist in einer speziellen Hauptordnung, stets auch $\mathfrak{J}_S$ spezielle H.?

Auf Ihre Anregung hin, habe ich mir die Arbeit von Akizuki[7] noch einmal angesehen, und habe die Kettensätze für v-Ideale untersucht. Es zeigt sich sofort: die v-Maximalbedingung ist stets mit der schwachen v-Min.bed. gleichwertig, denn sind $\mathfrak{a}_n \quad n = 1, \ldots$ irgendwelche Ideale mit $(a) \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq 1$ so folgt zunächst $(a) \subseteq (a)\mathfrak{a}_n^{-1} \subseteq 1$ und für v-Ideale folgt aus $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{n+1}$ bzw. $\mathfrak{a}_n \supset \mathfrak{a}_{n+1}$ sofort $a\mathfrak{a}_n^{-1} \supset$

[3]This is corroborated by the correspondence between Krull and Hasse dated 2 and 7 March 1938 (Roquette 2004, §§ 1.32, 1.33).
[4]See Lorenzen 1938, p. 15; Lorenzen 1939a, p. 538.
[5]See Lorenzen 1938, p. 32; Lorenzen 1939a, p. 550.
[6]Arnold 1929.
[7]Most likely Akizuki 1935.

$a\mathfrak{a}_{n+1}^{-1}$ bzw. $a\mathfrak{a}_n^{-1} \subset a\mathfrak{a}_{n+1}^{-1}$. q.e.d. Weiter folgt aus der v-Max.bed., daß kein v-Id[eal] eine unendliche Basis hat und umgekehrt. (Es kann allgemein aber sein, daß ein Ideal gleichzeitig eine endliche und eine unendliche Basis hat.)

Hieraus ergibt sich ein neuer, in allen Schritten trivialer, Beweis für den Z. P. I.[8] aus der schw. Min.bed. und der totalen Abgeschlossenheit.

Denn jedes Primideal ist minimal, also v_e-Ideal, also v-Ideal wegen der v-Max.bed. Aus $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset 1$ würde also $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})_v \subset 1$ folgen. q.e.d.

Umgekehrt folgt sofort die tot. Abg. und die Max.bed.; da jedes Ideal v-Ideal ist also auch die schw. Min.bed.[9]

Ich bitte um Entschuldigung, daß dieser Brief so lang ist, aber ich dachte, es würde Sie interessieren, denn noch einfacher kann der Beweis jetzt wohl nicht mehr gemacht werden.

Ich bitte um eine Empfehlung an Ihre Frau Gemahlin und um einen freundlichen Gruß an die beiden Kleinen.

Ihr

sehr ergebener

Paul Lorenzen.

13.03.1938. Letter from Lorenzen to Krull.

Göttingen, 13.3.38
Feuerschanzengraben 20a

Sehr geehrter Herr Professor!

Diesmal muß ich wirklich um Entschuldigung bitten, daß ich Sie schon wieder belästige. Aber es hat sich eine wesentliche Vereinfachung ergeben, die ich Ihnen gerne mitteilen möchte.

Definition: Ein Ideal heißt $\overline{v}$-Ideal, wenn es mit zwei v-Idealen auch deren v-Summe enthält.

Satz: Es gibt stets maximale $\overline{v}$-Ideale.

Definition: Eine Halbgruppe $\mathfrak{g}$ (Quotientengruppe $\mathfrak{G}$) heißt primär, wenn es keine Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{g}_S$ mit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_S \subset \mathfrak{G}$ gibt.

Satz: Eine primäre total abgeschlossene Halbgruppe ist linear.

Die Beweise sind ganz einfach, da mit den $\overline{v}$-Idealen jetzt wohl die zweckentsprechenden gefunden sind.

Besonders bemerkenswert finde ich, daß alle drei Begriffe des Satzes, primär, total abgeschlossen, linear ohne Benutzung eines speziellen Idealsystemes definiert sind. Es würde allerdings genügen die v-Abgeschlossenheit zu fordern.

[8]"Zerlegungssatz in Primideale", see Krull 1935, 12.
[9]See Lorenzen 1938, § 5; Lorenzen 1939a, § 2.

Mit freundlichem Gruß
Ihr
sehr ergebener
Paul Lorenzen.

18.03.1938. Letter from Lorenzen to Krull.

Göttingen, 18.3.
Feuerschanzengraben 20a

Sehr geehrter Herr Professor!

Endlich kann ich Ihnen mitteilen, daß jede total abgeschlossene Halbgruppe spezielle Hauptordnung ist.[10]

Sei $\mathfrak{g}$ eine Halbgruppe, $a, b, \cdots$ Elemente der Quotientengruppe $\mathfrak{G}$.

Statt $\frac{a}{b} \in \mathfrak{g}$ schreibe ich $a \leqslant b$.

Definition: Eine Halbgruppe heißt vollständig, wenn es zu zwei Elementen a, b einen g.g.T. $a \vee b$ gibt.[11]

Die Existenz des k.g.V. $a \wedge b = \frac{ab}{a \vee b}$ folgt.

Definition: Eine Untermenge $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{G}$ heißt g-Modul, wenn sie zu jedem Element a alle Elemente $b \leq a$ und zu zwei Elementen a, b stets $a \vee b$ enthält. Ein g-Modul $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$ heißt g-Ideal.

Die Ideale $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ heißen ganz, die Ideale $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ echt. Ein ganzes Ideal $\mathfrak{p}$ heißt Primideal, wenn die nicht in $\mathfrak{p}$ liegenden Elemente von $\mathfrak{g}$ eine Halbgruppe bilden.

Satz: Jedes echte Ideal besitzt ein Primoberideal.[12]

Satz: Die Primidealquotientenhalbgruppen sind linear.[13]

Satz: $\mathfrak{g}$ ist Hauptordnung.

$$\mathfrak{g} = \bigcap_{\tau} \mathfrak{L}_\tau \quad \mathfrak{L}_\tau \text{ linear}$$

Ich bezeichne mit a_τ das Element a als Element von $\mathfrak{L}_\tau$ (den „Wert“ von a). Statt 1_τ einfach 1.

Darf $\mathfrak{L}_\tau$ bei der Darstellung von $\mathfrak{g}$ nicht weggelassen werden, so gibt es ein Element a mit $a_\tau > 1$, $a_\lambda \leq 1$ für $\lambda \neq \tau$. Und zwar gibt es ein solches Element, derart, daß a_τ^{-1} nur ein Primoberideal hat, da man sonst statt $\mathfrak{L}_\tau$ eine Primidealquotientenhalbgruppe $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}_\tau$ von $\mathfrak{L}_\tau$ nehmen könnte.

[10] The argument for this assertion, which one can also find in Lorenzen 1938, is not conclusive. Tadasi Nakayama (1942a,b, 1946) shows that the assertion does not hold in general.
[11] See Lorenzen 1939a, Definition 5, reproduced on page 17.
[12] See Lorenzen 1939a, Satz 4.
[13] See Lorenzen 1939a, Satz 10, reproduced on page 17.

Besitzt $\mathfrak{L}_\tau$ mehrere Primideale, so gibt es auch ein Element b mit $b_\tau \leq 1$, das mehrere Primoberideale hat. Dann wird

$$(1 \wedge b)(1 \vee a)^n \text{ ganz für alle } n$$

$1 \vee a$ nicht ganz.

Satz: Jede vollständige total abgeschlossene Halbgruppe ist spezielle Hauptordnung.

Ist $\mathfrak{g}$ beliebig total abgeschlossen, so bilden die ganzen v-Ideale eine vollständige total abgeschlossene Halbgruppe womit alles bewiesen ist.

Ich möchte Ihnen, gerade nachdem dieser Beweis jetzt geglückt ist, nochmals herzlichst danken für die schönen Tage in Erlangen, und die ausführlichen, für mich so wertvollen Besprechungen mit Ihnen.

Mit freundlichem Gruß
Ihr sehr ergebener
Paul Lorenzen.

22.03.1938. Letter from Lorenzen to Krull.

Göttingen, 22.3.
Feuerschanzengraben 20a

Sehr geehrter Herr Professor!

Vielen Dank für Ihre Karte. Anschließend das gewünschte Lexikon:

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Halbgruppe, $\mathfrak{G}$ die Quotientengruppe, $a, b, \dots \in \mathfrak{G}$.

Definitionen: a ganz, wenn $a \in \mathfrak{g}$

a Nichteinheit, wenn a ganz
a^{-1} nicht ganz

$a \leq b$, wenn $\frac{a}{b}$ ganz

$\mathfrak{g}$ linear, wenn stets $a \leq b$ oder $a \geq b$

$\mathfrak{g}$ einstufig linear, wenn $\mathfrak{g}$ linear und es zu jedem ganzen a und jeder Nichteinheit b einen Exponenten n mit

$$b^n \leq a \quad \text{gibt.}$$

$\mathfrak{g}$ Hauptordnung, wenn $\mathfrak{g}$ Durchschnitt von linearen Oberhalbgruppen ist.

$\mathfrak{g}$ spezielle Hauptordnung, wenn $\mathfrak{g}$ Durchschnitt von einstufig linearen Oberhalbgruppen ist.

$\mathfrak{g}$ vollständig, wenn jedes endliche v-Ideal Hauptideal ist, d. h., wenn es zu je zwei Elementen a, b stets einen g. g. T. $a \vee b$ gibt.

$\mathfrak{g}$ total abgeschlossen, wenn aus ca^n ganz für alle n, folgt a ganz.

Für Integritätsbereiche entspricht

linear	—	Bewertungsring
einstufig linear	—	spezieller Bewertungsring
total abgeschlossen	—	vollständig ganz abgeschlossen

Das Prinzip, das dem Beweis des Satzes:

Jede total abgeschlossene Halbgruppe $\mathfrak{g}$ ist spezielle Hauptordnung.

zu Grunde liegt, ist der Übergang von der gegebenen Halbgruppe $\mathfrak{g}$ zur Halbgruppe G der ganzen v-Ideale von $\mathfrak{g}$. G muß ebenfalls total abgeschlossen sein, und da G vollständig ist, erweist sie sich leicht als spezielle Hauptordnung. Aus der Durchschnittsdarstellung von G folgt dann die Darstellung v[on] $\mathfrak{g}$ als spezielle Hauptordnung. Ist $\mathfrak{g}$ ein Integritätsbereich so sind die linearen Oberhalbgruppen der Durchschnittsdarstellung von $\mathfrak{g}$, sogar Bewertungsringe. In Ihrer Terminologie, sind es gerade die Bewertungsringe, die zum v-Idealsyst., als arithmetisch brauchbarem System gehören.

Das Unglück der verschiedenen Terminologien liegt vor allem in „vollständig" „total abgeschlossen" und „vollständig ganz abgeschlossen".

Mit freundlichem Gruß
Ihr sehr ergebener
Paul Lorenzen.

09.06.1938. Letter from Lorenzen to Krull.

Göttingen, 9.6.

Sehr geehrter Herr Professor!

Für Ihren Brief danke ich Ihnen vielmals. Etwas Besseres konnte ich mir ja gar nicht wünschen, als daß ich Sie noch einmal besuchen darf. Daß die Arbeit so knapp gefaßt ist,[14] lag z. T. auch am Zeitmangel, da ich ja dieses Semester Examen machen wollte. Wenn dieses nun vorbei ist, werde ich hoffentlich klarer, ausführlicher und deutlicher beschreiben können, was ich meine.

Ehe ich komme, gebe ich Ihnen noch Nachricht.

Mit Ihrem Diskriminantenkriterium[15] ist es mir in der Tat genau so ergangen, wie Sie vermuten. Ich wußte nur noch, daß es den allgemeinst-möglichen Fall enthielt, wußte aber nicht mehr die genaue Formulierung. Ob sich der Hassesche Beweis verallgemeinern läßt, weiß ich nicht, ist ja aber auch nicht so wichtig, da Ihr Resultat vorliegt.

Ich freue mich schon sehr darauf, Sie besuchen zu dürfen.

[14] Compare the criticism in Hasse's letter to Krull dated 31 May 1938 (Roquette 2004, § 1.36).

[15] This probably refers to the "Allgemeiner Diskriminantensatz" of Krull 1939a.

Mit freundlichem Gruß
Ihr sehr ergebener
Paul Lorenzen.

C. The reports on Lorenzen's thesis.

[24.05.1938. Report by Hasse.]

Mathematisches Institut
der Universität
Prof. Dr. Hasse.

Göttingen, den 24. Mai 1938.
Bunsenstraße 3/5

Siegel

Gutachten über die Dissertation Lorenzen.[16]

Seitdem Dedekind den Idealbegriff in die Arithmetik und Algebra eingeführt hat, sind vielfach Verallgemeinerungen dieses Begriffes vorgenommen worden, mit dem Ziel die Struktur beliebiger Integritätsbereiche ebenso einfach zu übersehen, wie man die ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers durch die Dedekindschen Ideale übersieht. Lorenzen entwickelt eine zusammenfassende Theorie aller dieser Idealbegriffe von einem neuen einheitlichen Gesichtspunkt aus. Es erscheint dem Kenner fast paradox, dass dabei die Addition, auf der doch der Dedekindsche Idealbegriff wesentlich beruht, vollständig ausser Betracht gelassen wird, und nur die Multiplikation gebraucht wird. Erst durch diese Lorenzensche Auffassung des Idealbegriffs kommen die Zusammenhänge zwischen der idealtheoretischen und der bewertungstheoretischen Behandlung des Strukturproblems allgemeiner Integritätsbereiche klar und abgerundet heraus. Lorenzen gibt neue verblüffend einfache Beweise für die in dieser Richtung liegenden Sätze von Krull, Prüfer u. a.

Es gelingt ihm ferner, die Identität des Prüferschen mit dem Krullschen Idealsystem zu zeigen und dem Krullschen Hauptsatz über Durchschnitte von allgemeinen Bewertungsringen (beliebige nicht-archimedische Wertgruppe) einen entsprechenden Hauptsatz über spezielle Bewertungsringe (archimedische Wertgruppe) an die Seite zu stellen. Dieser Satz[17] gibt also eine idealtheoretische Charakterisierung derjenigen Integritätsbereiche, die bewertungstheoretisch durch das Positivsein von Exponentenbewertungen mit archimedischer Wertgruppe charakterisiert sind.

[16] This report is written on the basis of a description given in a letter from Krull to Hasse dated 22 May 1938 as proposed by Hasse in a letter dated 2 March 1938 and gratefully accepted by Hasse in letters dated 7 March and 3 May 1938 (Roquette 2004, §§ 1.32–1.35).

[17] The proofs of this and of the next assertion, which one can find in Lorenzen 1938, are not conclusive: see Krull's letter to Hasse dated 1 September 1938 (Roquette 2004, § 1.38). As for this assertion, see footnote 10 on page 51. As for the next assertion, see the counterexample provided by Masayoshi Nagata (1952, 1955).

Ferner gibt Lorenzen auch eine idealtheoretische Charakterisierung der diskreten Bewertungsringe. Diese beiden Charakterisierungen wurden von den Algebraikern lange gesucht. Sie stellen wertvolle wissenschaftliche Ergebnisse dar. Auch sonst finden sich in der Arbeit zahlreiche neue Einblicke in die Beziehungen zwischen den verschiedenen in der Idealtheorie studierten Begriffen.

Die Darstellung ist streng axiomatisch und leider von äusserster Knappheit. Für den Druck erscheint mir eine etwas ausführlichere Darstellung erwünscht und ausserdem auch eine stärkere Anlehnung an die Literatur durch Verweise.

Da die Arbeit wesentlich neue und originelle Gedanken enthält und wichtige Ergebnisse bringt, schlage ich die Annahme mit dem Prädikat

ausgezeichnet

vor.

Hasse

[02.06.1938. Report by Siegel.]

Eine sorgfältige Nachprüfung der Abhandlung hätte für mich eine Arbeit von mehreren Monaten bedeutet, da der Text an vielen Stellen kaum zu verstehen ist und sich wegen der mangelnden Literaturangaben auch nur schwer ergänzen lässt. Ich muss mich deshalb eines genaueren Urteils über den Wert der Abhandlung enthalten. Das wenige, was ich mit Mühe habe verstehen können, macht den Eindruck, als ob der Verfasser jedenfalls über gute mathematische Fähigkeiten verfügt.

Siegel 1938 VI 2

D. The correspondence between Hasse and Lorenzen, 1938–1942.

30.06.1938. Letter from Hasse to Lorenzen.

30. Juni 1938.

Prof. Dr. Hasse.

Herrn

Dr. Paul Lorenzen

z. Zt. Erlangen.
per Adresse Herrn Prof. Krull
Burgbergstr. 53.

Lieber Herr Lorenzen,

wie ich eben sehe, ist es erwünscht, wenn Sie sich wegen Ihres Antrages an das Reichsdozentenwerk hier dem Dozentenbundsführer vorstellen. Diesen müssen Sie dann auch fragen, ob Sie sich auch sonst noch bei einem Referenten des Dozentenbundes vorzustellen haben. Die Sache ist nämlich die, dass in den Richtlinien von der Vorstellung bei dem Referenten die Rede ist. So viel ich weiss, ist aber hier in Göttingen gerade ein Wechsel eingetreten. Prof. Schriel, der dieses Amt bisher hatte, gibt es an Prof. Mattiat ab. Ich weiss aber nicht genau, zu welchem Zeitpunkt dieser Übergang erfolgt. Auch ist mir bekannt, dass Prof. Blume, der Dozentenbundsführer, stets Wert auf persönliche Vorstellung der Leute legt, über die er zu berichten hat. Es hat natürlich Zeit, wenn Sie dies nach Ihrer Rückkehr aus Erlangen tun, allerdings bleibt Ihr Gesuch dann so lange liegen.
Im Anschluss an meine letzten Bemerkungen im Seminar habe ich eine Bitte an Sie. Könnten Sie mir wohl mit Hilfe Ihrer idealtheoretischen Fähigkeiten bestimmen, welches die maximalen Primideale des folgenden Integritätsbereiches sind: k sei ein algebraischer Zahlkörper, K ein Funktionenkörper einer Unbestimmten über k als Konstantenkörper, $\mathfrak{O}$ ein Primdivisor ersten Grades von K bez. k und I sei die ganzalgebraisch abgeschlossene Hülle von $i[x]$ in K, wo i die Maximalordnung von k ist. Dieser Integritätsbereich I hängt ersichtlich nur von $\mathfrak{O}$ ab. Mit Bestimmung der maximalen Primideale meine ich eine vollständige Übersicht über diese, von den Primidealen von k und den Primdivisoren von K bez. k aus.

Für Ihre Arbeit mit Herrn Krull die besten Wünsche.

Ich bitte diesen und sich selbst recht herzlich zu grüssen

Ihr [Hasse]

06.07.1938. Letter from Lorenzen to Hasse.

Erlangen, 6.7.38.

Sehr geehrter Herr Professor!

Für Ihre beiden Briefe herzlichen Dank. Da ich erst seit gestern hier in Erlangen bin, konnte ich nicht eher antworten.

Die Referate über die Arbeiten von Krull will ich gern übernehmen, wenn dies noch Zeit bis Ende Juli, Anfang August hat, da ich nicht eher zurück sein werde. [Ich möchte nämlich erst eine Reise durch Bayern anschließen, das ich gar nicht kenne.]

Falls dies zu spät ist, müßten Sie mir schon die Formblätter hierherschicken.

Zu Ihrer mathematischen Anfrage, kann ich Ihnen – nach Besprechung mit Herrn Prof. Krull – nur folgendes mitteilen: Sei – nur der Einfachheit halber – Γ der ganz rationale Zahlring, x eine Unbestimmte. Die maximalen Primideale von $\Gamma[x]$ bestimmen sich dann eindeutig durch eine Primzahl p und ein Primelement von $P_p[x]$. Eine eindeutige Bestimmung aus den Primzahlen und den Primelementen von $P[x]$ ist dagegen nicht möglich: z. B. $(2, x) = (2, x-2)$.

Ich danke Ihnen für die Mitteilung, dass ich mich zunächst bei Herrn Prof. Blume vorstellen muß. Nach meiner Rückkehr werde ich dies sofort tun.

An meiner Arbeit gibt's hier viel zu tun. Augenblicklich bin ich dabei, für Köthe[18] einen verbandstheoretischen Exzerpt zu machen.

Mit freundlichem Gruß, auch von Herrn Prof. Krull

Ihr

sehr ergebener

Paul Lorenzen.

09.08.1939. Letter from Lorenzen to Hasse.

Bonn, 9.8.39.
Luisenstr. 3

Sehr geehrter Herr Professor!

Es hat mir sehr leid getan, Sie am 6.8. nicht angetroffen zu haben. Ich hätte Ihnen so gern nochmal persönlich gedankt für die Fürsorge und das große Wohlwollen, das Sie mir während meiner Lehrjahre bei Ihnen stets erwiesen haben.

Aber ich hoffe sehr, daß dazu später einmal Gelegenheit sein wird.

Mit den ergebensten Grüßen
Ihr
Lorenzen.

11.08.1939. Letter from Hasse to Lorenzen.

11.8.1939.

Herrn
Dr. Lorenzen

Bonn a. Rh.
Luisenstrasse 3

Lieber Herr Lorenzen!

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief. Es hat mir sehr leid getan, dass ich Sie vor Ihrer endgültigen Übersiedlung nach Bonn nicht mehr hier sah. Ich wünsche Ihnen alles Gute für Ihre neue Stelle. Ich darf ja sicher sein, dass Sie sich

[18]Gottfried Köthe (1905–1989) is professor in Münster from 1937 to 1943, and then until 1946 in Gießen.

dort sehr wohlfühlen und viele Anregungen für weitere Arbeit bekommen werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass wir uns immer mal wiedersehen, ist zum Glück gross, denn die mathematische Welt ist doch recht klein. Sehr dankbar wäre ich Ihnen, wenn Sie mir gelegentlich aus Ihrem mathematischen Schaffen etwas für Crelles Journal geben könnten.

Indem ich Sie bitte, Herrn Krull bestens von mir zu grüssen,

bin ich stets in bester Erinnerung an die Zeiten gemeinsamer Arbeit,

Ihr [Hasse]

06.09.1939. Letter from Lorenzen to Hasse.

Bonn, 6.9.39.
Luisenstr. 3

Sehr geehrter Herr Professor!

Zunächst möchte ich Ihnen herzlichst danken für Ihren freundlichen Brief. Meine Tätigkeit in Bonn, die ich mit soviel Hoffnung aufgenommen habe, erfährt jetzt ein schnelles Ende. Bisher bin ich zwar noch nicht einberufen, sondern warte darauf.

Um diese Wartezeit zu verkürzen, schreibe ich an Sie. Nun weiß ich allerdings nicht, wo Sie augenblicklich sind, aber wäre es Ihnen nicht möglich, für mich eine meine mathematische Ausbildung ausnützende Verwendung zu erreichen? Es ist doch offensichtlich, daß eine Verwendung der Mathematiker als Mathematiker nutzbringender für die Gesamtheit ist als jede andere. Natürlich liegt diese Verwendung auch sehr in meinem eigenen Interesse, hier fallen eben beide Interessen zusammen.

Welche Institute, Werke oder militärische Dienststellen in Frage kommen, weiß ich nicht, aber das aerodynamische Institut z. B. wird doch sicherlich Bedarf an Mathematikern haben.

Es erscheint mir als eine zu billige Phrase, wollte ich Ihnen meine Dankbarkeit im Falle Ihrer Hilfe in dieser Angelegenheit versichern. Habe ich Ihnen doch schon für so vieles zu danken. Ich schreibe daher lieber ganz offen, daß mir sehr viel drangelegen ist und daß ich mich an Sie wende, da ich die Überzeugung habe, daß Sie mir helfen werden.

Mit den ergebensten Grüßen an Ihre Frau Gemahlin und Sie bin ich stets

Ihr

Lorenzen.

11.10.1939. Letter from Lorenzen to Hasse.

Bonn, 11.10.39.

Sehr geehrter Herr Professor!

Meine Dissertation ist jetzt endlich gedruckt worden. Ich möchte dies zum Anlaß nehmen, Ihnen nochmals meinen Dank auszudrücken für die lange und schöne Zeit, die ich in Göttingen war.

Mit den ergebensten Grüßen an Ihre Frau Gemahlin und Sie

Ihr

Lorenzen.

10.11.1939. Letter from Lorenzen to Hasse.

Bonn, 10.11.39.

Sehr geehrter Herr Professor,

Im Zusammenhang mit den gruppenaxiomatischen Untersuchungen für Herrn Professor Scholz bin ich auf ein Axiomensystem gekommen, das ersichtlich einfacher ist als die bisher bekannten Systeme. Da dies Ergebnis jedoch völlig aus dem Rahmen der übrigen Untersuchungen fällt, würde ich es gern für sich veröffentlichen und möchte Sie daher fragen, ob eine Veröffentlichung[19] in Crelles Journal möglich ist.

Mit den ergebensten Grüßen

Ihr

Lorenzen

16.11.1939. Letter from Hasse to Lorenzen.

16. Nov. 1939.

Herrn

Dr. P. Lorenzen

Bonn a. Rh.

Luisenstr. 3.

Lieber Herr Lorenzen!

Herzlichen Dank für Ihre kleine Note über Gruppenaxiome. Ich nehme sie gern in Crelles Journal auf, sie scheint ja auf demselben Gedanken zu beruhen, der auch bei der Idealdefinition vorkommt, wo man nur die Subtraktion zu fordern braucht.

[19] Lorenzen 1940.

Ich habe noch eine kleine Frage zur algebraischen Funktionentheorie. Es handelt sich um die Darstellung der ganzen Divisoren eines Funktionenkörpers durch ganze homogene Ideale eines Integritätsbereichs. Es sei $x_1, \ldots, x_m$ ein Erzeugenden-System des Integritätsbereichs der für x ganzen Elemente des Körpers, wo x ein beliebiges nicht konstantes Element ist. Unter welchen Bedingungen entsprechen dann die ganzen Divisoren des Körpers umkehrbar eindeutig den ganzen Idealen des durch Homogenisierung der $x_1, \ldots, x_m$ entstehenden Integritätsbereichs? Ich kann zeigen, dass dies richtig ist, wenn man $x_1, \ldots, x_m$ als die von 1 verschiedenen Elemente der Basis eines Moduls $(\frac{1}{\mathfrak{o}^m})$ nimmt, wo $m \geqq 3g$ ist. Ich wüsste aber gern, welcher allgemeine Satz dahintersteckt. Die Bedingung $m \geqq 3g$ garantiert dafür, dass der Modul eine Normalbasis für $\mathfrak{o}$ enthält.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr [Hasse]

17.11.1939. Letter from Hasse to Lorenzen.

Mathematisches Institut der Universität — **Göttingen, den** 17.11.39, **Bunsenstraße 3/5**

Lieber Herr Lorenzen!

Die Frage in meinem gestrigen Brief war etwas knapp formuliert – ich diktierte einer nicht-mathematischen Dame in die Maschine! Ich will daher etwas klarer auseinandersetzen, was ich meine.

Sei K algebr. Funktionenkörper einer Unbestimmten über Konstantenkörper Ω vom Geschlecht g ($\geqq 1$), mit einem Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{o}$. Sei $K^{\mathfrak{o}}$ der Integritätsbereich der für alle $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ ganzen Elemente aus K. Man folgert dann leicht aus Riemann-Roch, daß der Ω-Modul $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^m}\right)$ (der Vielfachen von $\frac{1}{\mathfrak{o}^m}$ aus K) für $m \geqq 3g$ den Integritätsbereich $K^{\mathfrak{o}}$ ergänzt, d. h. daß eine Ω-Basis von $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^m}\right)$ ein Erzeugendensystem für $K^{\mathfrak{o}}/\Omega$ ist.

Beweis. Sei x ein nicht-konst. Element aus K mit einer möglichst niedrigen Potenz $\mathfrak{o}^n$ im Nenner, so ist $K^{\mathfrak{o}}$ die ganzalg.-abgeschl. Hülle von $\Omega[x]$ in K. Eine $\Omega[x]$-Basis von $K^{\mathfrak{o}}$ erhält man, indem man zu jeder Restklasse i mod. n ein Element y_i aus K wählt, dessen Nenner eine möglichst niedrige Potenz $\mathfrak{o}^{e_i}$ mit $e_i \geqq 0$, $e_i \equiv i \bmod n$ wählt ($y_0 = 1$). Da $\dim \mathfrak{o}^e = \dim \mathfrak{o}^{e-1} + 1$ für $e \geqq 2g$ gilt, und $n \leqq g + 1$ ist (wegen $\dim \mathfrak{o}^e \geqq 2$ für $e \geqq g + 1$), folgt $e_i \leqq 3g$. Für $m \geqq 3g$ enthält also $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^m}\right)$ das Erzeugendensystem $x; y_i$ von $K^{\mathfrak{o}}/\Omega$.

Sei jetzt $1, x_1, \ldots, x_r$ ($r = m - g$) eine Basis von $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^m}\right)$ ($m \geqq 3g$). Ist dann $\overline{\mathfrak{x}} \neq 0$ ein algebr. Punkt von K/Ω (Primdiv. der algebr.-abgeschl. Konstantenerweiterung $\overline{K}/\overline{\Omega}$), so seien

$$x_1(\overline{\mathfrak{x}}) = \overline{a}_1, \ \ldots, \ x_r(\overline{\mathfrak{x}}) = \overline{a}_r$$

als die Koordinaten von $\bar{\mathfrak{x}}$ bezeichnet. Sie beschreiben $\bar{\mathfrak{x}}$ eindeutig, und es gilt

$$\frac{\bar{\mathfrak{x}}}{\mathfrak{o}^m} = (x_1 - \overline{a}_1, \ldots, x_r - \overline{a}_r),$$

wo die Klammer rechts nicht etwa ein Ideal bedeuten soll, sondern nur den g. g. T. der eingeschlossenen Hauptdivisoren (definiert durch Minima der Exponenten in der Primdivisorzerlegung in $\overline{K}/\overline{\Omega}$). Entsprechend hat man auch

$$\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}^m} = (1, x_1, \ldots, x_{r-1}),$$

wenn etwa das Basiselement x_r (als einziges) den genauen Nenner $\mathfrak{o}^m$ hat (d. h. $1, x_1, \ldots, x_{r-1}$ Basis von $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{m-1}}\right)$ ist). $|^2$

Ferner gilt: Ist u ein Element aus $K^{\mathfrak{o}}$, so stellt sich u als Polynom in $x_1, \ldots, x_r$ über Ω dar, dessen Grad $\leqq h$ ist, wenn u in $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{mh}}\right)$ liegt.

Beweis. Es genügt $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{mh}}\right) = \left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{m}}\right)^h$ zu zeigen. Der Beweis durch vollst. Induktion nach h läuft auf die Feststellung $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{m(h+1)}}\right) = \left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{mh}}\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{m}}\right)$ zurück. Nun zerfallen die natürlichen Zahlen e in Nennerzahlen und Lückenzahlen, je nachdem es in K ein Element mit dem Nenner $\mathfrak{o}^e$ gibt oder nicht ($\dim \mathfrak{o}^e = \dim \mathfrak{o}^{e-1} + 1$ oder $= \dim \mathfrak{o}^{e-1}$ ist). Es gibt genau g Lückenzahlen, und diese gehören der Reihe $1, \ldots, 2g-1$ an. Eine Basis von $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{m(h+1)}}\right)$ mod. $\left(\frac{1}{\mathfrak{o}^{mh}}\right)$ erhält man, wenn man zu jeder natürlichen Zahl $e = mh + \mu$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ ein Element aus K mit dem Nenner $\mathfrak{o}^e$ bestimmt. Es genügt dann zu zeigen, daß jedes solche e eine Darstellung als Summe einer Nennerzahl $\leqq mh$ und einer Nennerzahl $\leqq m$ hat. Dies leistet aber eine der $g+1$ Zerlegungen $e = (mh - \gamma) + (\mu + \gamma)$ $\ (\gamma = 0, 1, \ldots, g)$. Ist nämlich μ Lückenzahl, so ist $\mu + \gamma \leqq 3g - 1 < m$, und unter den $g+1$ Zahlen $\mu + \gamma$ ist mindestens eine Nennerzahl, während die Zahlen $mh - \gamma \geqq m - \gamma \geqq 2g$ sämtlich Nennerzahlen sind. Ist aber μ Nennerzahl, so genügt $\gamma = 0$.

Ich setze nun

$$x_1 = \frac{X_1}{X_0}, \ \ldots, \ x_r = \frac{X_r}{X_0}. \tag{1.}$$

Dabei sei X_0 ein beliebiges Element $\neq 0$ aus K, wodurch dann $X_1, \ldots, X_r$ bestimmt sind. Man kann dann die obigen Darstellungen der alg. Punkte $\bar{\mathfrak{x}}$ von K/Ω als g. g. T. auch so schreiben:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \frac{(0, X_1 - \overline{a}_1 X_0, \ldots, X_r - \overline{a}_r X_0)}{(X_0, X_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_r)} \qquad (\bar{\mathfrak{x}} \neq 0)$$
$$\mathfrak{o} = \frac{(X_0, X_1, \ldots, X_{r-1}, 0)}{(X_0, X_1, \ldots, X_{r-1}, X_r)},$$

unabhängig von der Wahl der Quotientendarstellung (1.). Nach dem Gaußschen Satz multiplizieren sich die Klammersymbole $(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k)$ für den g. g. T.

von Elementen $\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_1, \dots, \mathscr{U}_k$ aus K formal wie die Polynome $\mathscr{U}_0 t^k + \mathscr{U}_1 t^{k-1} + \dots + \mathscr{U}_k$ einer Unbestimmten t. Unter Anwendung dieser Multiplikation folgt durch Zusammensetzung der ganzen Divisoren $\mathfrak{a}$ von K/Ω aus algebr. Punkten $\bar{\mathfrak{x}}$ von K/Ω (vollst. Systeme Konjugierter!), daß jeder ganze Divisor $\mathfrak{a}$ von K/Ω eine Darstellung der folgenden Form besitzt:

$$(2.) \qquad \mathfrak{a} = \frac{(\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \dots, \mathscr{A}_{ra})}{(X_0, X_1, \dots, X_r)^a}, \,|^3$$

wo a der Grad von $\mathfrak{a}$ ist, ferner $\mathscr{A}_0, \dots, \mathscr{A}_{ra}$ homogene Polynome a-ten Grades über Ω in $X_0, \dots, X_r$ sind.

Von diesen Darstellungen (2.) aus kann man eindeutig die Distributionen $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ erklären. Man wähle dazu für jeden Primdivisor $\mathfrak{x}$ von K/Ω eine besondere Quotientendarstellung (1.), nämlich so, daß $\mathfrak{x}$ zu $(X_0, X_1, \dots, X_r)$ den Beitrag $\mathfrak{x}^0$ liefert (primitiv für $\mathfrak{x}$). Dann liefert die Festsetzung

$$(3.) \qquad \mathfrak{a}(\mathfrak{x}) = \frac{(\mathscr{A}_0(\mathfrak{x}), \dots, \mathscr{A}_{ra}(\mathfrak{x}))}{(X_0(\mathfrak{x}), \dots, X_r(\mathfrak{x}))^a}$$

ein bestimmtes Ideal $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ aus dem Restklassenkörper $K(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{x}$, und zwar unabh. von der Wahl der für $\mathfrak{x}$ primitiven Quotientendarstellung (1.). Man sieht sofort, daß $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ distributionsganz ist, daß nämlich der Nenner von $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ im Hauptnenner der Koeffizienten von $\mathscr{A}_0, \dots, \mathscr{A}_{ra}$ aufgeht. Ferner gilt die Regel:

$$\text{aus } \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{a}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}_1(\mathfrak{x})\, \mathfrak{a}_2(\mathfrak{x}),$$

einfach auf Grund der Gültigkeit des Gaußschen Satzes sowohl für die Multipl. der g. g. T. von Hauptdivisoren als auch für die Multipl. der g. g. Teiler von Hauptidealen.

Um den Weilschen Hauptsatz zu beweisen, muß man dann noch wissen, daß die Definition (3.) im Sinne der Distributionsgleichheit von der Wahl der besonderen zuvor konstruierten Darstellung (2.) unabhängig ist, daß nämlich folgendes gilt: Ist

$$(2'.) \qquad \mathfrak{a} = \frac{(\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_1, \dots, \mathscr{U}_s)}{(X_0, X_1, \dots, X_r)^k}$$

irgendeine Darstellung von $\mathfrak{a}$, wo $\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_1, \dots, \mathscr{U}_s$ homog. Polynome in $X_0, X_1, \dots, X_r$ vom Grade k sind, so ist auch

$$(3'.) \qquad \mathfrak{a}(\mathfrak{x}) \doteq \frac{(\mathscr{U}_0(\mathfrak{x}), \dots, \mathscr{U}_s(\mathfrak{x}))}{(X_0(\mathfrak{x}), \dots, X_r(\mathfrak{x}))^k} \qquad \text{(distributionsgleich!)}$$

Ich kann das zwar beweisen, indem ich den alten Schluß mit der algebraischen Gleichung (Charakt. der Nenner durch ganzalgebraische Abhängigkeiten) anwende;

dazu brauche ich den Satz auf S. 2 oben. Besser würde mir jedoch der Weilsche Schluß aus *Actualités*[20] gefallen, der darauf beruht, daß die Klammersymbole in diesen Darstellungen auch als Ideale (lineare Komposita!) aufgefaßt werden dürfen, daß also die Gesamtheit der $\mathcal{U}$ mit $(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_s) \mid \mathcal{U}$ durch eine homogene lineare Darstellung $\mathcal{U} = \mathcal{F}_0\mathcal{U}_0 + \cdots + \mathcal{F}_s\mathcal{U}_s$ gekennzeichnet ist. Wie ist das genau zu formulieren? Und wie ist es zu beweisen? Das sind meine Fragen. $|^4$

Natürlich wüßte ich gerne eine möglichst allgemeine Regel über die Zuordnung der ganzen Divisoren $\mathfrak{a}$ von K/Ω zu homogenen Idealen, möglichst unabhängig von der besonderen Wahl meiner Erzeugenden $x_1, \ldots, x_r$.

Können Sie mir da helfen?

Herzlichst Ihr
Hasse

13.12.1939. Letter from Lorenzen to Hasse.

Bonn, 13.12.39.

Sehr geehrter Herr Professor,

Ich muß Sie sehr um Entschuldigung bitten, daß ich Ihnen jetzt erst antworte. Da ich nämlich gerade stark in anderen Fragen drin war, wollte mir durchaus nichts einfallen zu Ihrer Frage. So hab ich schließlich aus der Not eine Tugend gemacht und glaube jetzt Ihre Frage dahin beantworten zu müssen, daß eine Zurückführung der Divisorenteilbarkeit in K 1) auf die Idealteilbarkeit in $\Omega[X_0, \ldots, X_r]$ nicht möglich ist mit einem $X_0 \in K$. Denn die ganzen homogenen Polynome in $X_0, \ldots, X_r$ sind dann keine ganzen Divisoren, sondern gebrochene Hauptdivisoren.

Wenn man dagegen X_0 als neue Unbestimmte einführt, so gilt zunächst für rationale Funktionenkörper einer Unbestimmten

1) Die homogenen Elemente von $\Omega[X_0, X_1]$ entsprechen umkehrbar eindeutig den ganzen Divisoren von K,

2) Die Idealsummenbildung entspricht der Bildung des g. g. T. von Divisoren.

Für algebraische Funktionenkörper sind in 1) die Elemente durch homogene Ideale (im Sinne der Weilschen Äquivalenz) zu ersetzen, während 2) ungeändert bleibt. Für Funktionenkörper mehrerer Unbestimmten sind in 1) und 2) die Ideale durch v-Ideale zu ersetzen (und außerdem eine Transzendenzbasis von K auszuzeichnen!)

Gleichzeitig übersende ich Ihnen die Korrektur des „Axiomensystems für Gruppen“,[21] für dessen Aufnahme in Ihr Journal ich Ihnen nochmals herzlichst danken möchte.

[20] Weil 1935.
[21] See Lorenzen's letter to Hasse dated 10 November 1939 on page 59.

Mit den ergebensten Grüßen

Ihr

Lorenzen

1) Ich nehme die Bezeichnungen aus Ihrem Brief, den ich beifüge.

04.01.1940. Letter from Hasse to Lorenzen.

4.1.1940.

Herrn
Dr. Paul Lorenzen

Bonn a. Rh.
Luisenstr. 3.

Lieber Herr Lorenzen!

Ganz überraschend kam mir heute Ihre Vermählungsanzeige nicht. Man spricht in Göttingen schon davon. Nehmen Sie meinen herzlichsten Glückwunsch zu diesem, für Ihr ferneres Leben so bedeutsamen Schritt.

Auch unabhängig von diesem freudigen Anlass wollte ich Ihnen dieser Tage schreiben, und zwar in Verfolg Ihrer damaligen Anfrage nach einer kriegerischen Betätigung. Ich erhielt nämlich kürzlich eine Anfrage von Professor Walther (Darmstadt).[22] Dieser hat den Auftrag, Mathematiker für eine militärische Dienststelle an der Ostsee namhaft zu machen, für die er selbst tätig ist. Die Anstellung dort ist mit der Reklamation vom Heeresdienst verbunden. Die Bezahlung ist gut, Sie würden in Ihrem Falle, unter Berücksichtigung Ihres jetzigen verheirateten Standes – nach Abzug der Kürzungen – RM 418.74 im Monat erhalten. Falls Sie sich dafür zur Verfügung stellen wollen, bitte ich Sie, mir den beiliegenden Bogen ausgefüllt zurückzusenden, anderenfalls leer.

Mit besten Grüssen und Wünschen

Ihr [Hasse]

Anlage.

09.01.1940. Letter from Lorenzen to Hasse.

Dr. Paul Lorenzen

Bonn, den 9. Januar 1940
Luisenstr. 3

Sehr geehrter Herr Professor,

[22] Alwin Walther (1898–1967) is a mathematician and engineer at Universität Darmstadt who participates in the V2 program at Peenemünde.

diesesmal habe ich Ihnen wiederum für vieles zu danken. Und zwar zunächst für Ihren schönen Brief vom 18.12. Ich wünschte, ich fände die Zeit, um alles völlig zu verstehen. (Dazu brauche ich ja oft leider sehr viel Zeit!)
Dann danke ich Ihnen herzlichst auch im Namen meiner Frau für Ihre Glückwünsche zu unserer Hochzeit. Augenblicklich wohnen wir in einer möblierten Wohnung, wobei zur Vervollkommnung unseres Glückes eigentlich nur fehlt, daß der Krieg aufhört.
Damit komme ich zum dritten, für das ich Ihnen danken möchte, nämlich für die Übersendung des Fragebogens von Herrn Professor Walther. Da Herr Professor Krull zurzeit in Bonn ist, habe ich ihn zunächst gefragt, ob es mir – als Assistent – überhaupt möglich sei, zuzusagen. Herr Professor Krull hat sich die Antwort für einige Tage vorbehalten, da er der Meinung ist, es sei evtl. zunächst der Kurator zu fragen.

Ich rechne aber damit, sehr bald zusagen zu können und verbleibe bis dahin mit den ergebensten Grüßen

Ihr
Paul Lorenzen

10.01.1940. Letter from Lorenzen to Hasse.

Dr. Paul Lorenzen — Bonn, den 10. Januar 1940
Luisenstr. 3

Sehr geehrter Herr Professor,

nach erneuter Rücksprache mit Herrn Prof. Krull habe ich die Erlaubnis bekommen, Ihnen den Fragebogen zuzusenden.
Allerdings würde mich das Math. Seminar hier nur sehr ungern gehen lassen, da – zumindestens für das laufende Trimester – ziemlich dringend zwei Assistenten benötigt werden. Falls Herr Prof. Walther mich also für seine Dienststelle gebrauchen könnte, möchte ich ihn bitten, sich dazu an Herrn Prof. Krull als den Direktor des Math. Seminars zu wenden. Da mit meiner Einberufung zum Wehrdienst doch wohl bald zu rechnen ist, würde Herr Prof. Krull in diesem Fall wahrscheinlich zustimmen, falls nicht meine Reklamation für die hiesige Universität sich inzwischen ermöglichen läßt.
Indem ich Ihnen für die viele Mühe, die Sie sich schon wieder für mich gemacht haben (ich hoffe nur, daß es nicht noch mehr wird) nochmals herzlichst danke, verbleibe ich mit den ergebensten Grüßen

Ihr
Paul Lorenzen

03.02.1940. Postcard from Käthe Lorenzen to Hasse.

Lorenzen
Bonn, Luisenstr. 3

Herrn
Professor Hasse,
Göttingen
Bunsenstr. 2
Math. Institut

Bonn, 3.II.40

Sehr geehrter Herr Professor,

da ich nicht weiß, ob mein Mann Ihnen schon geschrieben hat, daß er seit dem 19.I. als Soldat eingezogen ist u. gestern die Beitragsrechnung für die Deutsche Mathematiker Vereinigung kam, möchte ich Ihnen doch noch einmal hiervon Mitteilung machen. Wahrscheinlich wird Ihnen mein Mann aber selbst noch davon schreiben, da der Transport jetzt beendet ist.

Mit ergebenen Grüßen

Frau K. Lorenzen.

06.02.1940. Letter from Hasse to Käthe Lorenzen.

6.2.40.

Frau
Dr. Lorenzen
Bonn a. Rh.
Luisenstr. 3.

Sehr verehrte Frau Lorenzen!

Von der Einberufung Ihres Mannes erfuhr ich auch durch einen Brief von Professor Krull.[23] Es bleibt nun abzuwarten, ob die Heeresdienststelle an der Ostsee, für die sich Ihr Mann gemeldet hatte, seine Anstellung weiter betreibt und eine Freistellung erreicht. Jedenfalls scheint diese Stelle es nicht sehr eilig zu haben. Herr Eichler,[24] ein Assistent von hier, der sich kurz vor Ihrem Mann dort meldete, und der auch schon persönlich in Berlin mit dem Leiter der Stelle verhandelte, sollte an sich zum 1. Februar eingestellt werden, hat aber bis heute keine Nachricht erhalten. Von Ihrem Mann direkt habe ich noch nichts gehört.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr sehr ergebener [Hasse]

[23] Letter dated 1 February 1940 (Roquette 2004, § 1.72).
[24] The mathematician Martin Eichler (1912–1992) will join Walther's team in Peenemünde.

04.02.1940. Letter from Lorenzen to Hasse.

Alsheim, 4.2.

Sehr geehrter Herr Professor,

So leid es mir tut, muß ich Sie – da Sie damals so liebenswürdig waren, bei der Anfrage an Herrn Prof. Walther an mich zu denken – nochmals in dieser Sache belästigen. Ich bin nämlich mittlerweile eingezogen worden. (Wahrscheinlich war das Wehrmeldeamt der Meinung, daß es mir nach meiner Heirat entschieden zu gut ging – – ich muß gestehen, daß diese Meinung nahe lag.)

Alsheim ist ein kleines Nest in der Nähe von Worms. Wir sind recht gut in Privatquartieren untergebracht und beschäftigen uns meist mit Schneeschaufeln. Ich finde das zwar nicht schön, aber es wird nun einmal gerade dieser „Einsatz" von mir gefordert.

Ich möchte Sie nun bitten, falls es nötig sein sollte, Herrn Prof. Walther mitzuteilen, daß ich am 19.1.40 einberufen bin und jetzt unter der Feldpostnummer 38503 c zu erreichen bin.

Mit den ergebensten Grüßen an Ihre Frau Gemahlin und Sie verbleibe ich

Ihr

Paul Lorenzen

09.02.1940. Postcard from Lorenzen to Hasse.

Gefr. Lorenzen
38503 c

Herrn
Prof. Dr. H. Hasse
Göttingen
Bunsenstr. 3 - 5

9.2.

Sehr geehrter Herr Professor,

Diesmal wende ich mich an Sie als Schatzmeister der D. M. V. und bitte Sie mir den Beitrag für 1940 zu erlassen.

Heil Hitler!

Ihr

sehr ergebener

Paul Lorenzen.

21.04.1940. Letter from Lorenzen to Hasse.

21.4.

Sehr geehrter Herr Professor,

ich freue mich sehr Ihnen aus dem kriegerischen Westen mal etwas so Unpolitisches wie dieses Separatulum[25] zusenden zu können. Für Ihre Vermittlung an Herrn Prof. Walther bin ich Ihnen noch täglich von Herzen dankbar. Es hat sich zwar noch nichts entschieden, ist aber meine einzige Hoffnung in meinem augenblicklichen geisttötenden Zustand, dessen evtl. lange Dauer ja das Schlimmste ist.

Mit den ergebensten Grüßen an Ihre Frau Gemahlin und Sie verbleibe ich

Ihr

Paul Lorenzen.

05.05.1940. Letter from Lorenzen to Hasse.

Hamburg, 5.5.40.

Sehr geehrter Herr Professor,

vorgestern bekam ich Ihren freundlichen Brief, über den ich mich sehr gefreut habe und für den ich mich vielmals bei Ihnen bedanken möchte.

Muß ich Ihnen doch so dankbar dafür sein, daß Sie auch in Ihrer neuen Tätigkeit gleich wieder an mich gedacht haben, der ich mich hier mit Pferden, Stiefeln, Karabinern u. ä. herumzuquälen habe.

Ich hoffe, daß Sie sich allmählich in Ihre jetzige Beschäftigung hineinfinden und sich die Reminiszenzen an Ihre Staatsexamensängste dabei verlieren werden. Wenn Ihnen genügend freie Zeit bliebe (was aber wohl kaum zu hoffen ist?) könnten Sie ja mit Herrn Rohrbach und Herrn Kochendörffer beinah eine „Filiale" des math. Seminars Göttingen aufrechterhalten.

Bezgl. meiner Bewerbung für die „Dienststelle an der Ostsee", die sich in Peenemünde befindet, hat sich noch nichts weiter ereignet. Auf eine direkte Anfrage von mir habe ich noch keine Antwort.

Daher gehe ich mit Freuden auf Ihre Anregung ein. Sie fragen, ob mir die Beschäftigung mit reichlich kniffligen Fragen der praktischen Physik liegen würde. Nun wage ich es natürlich nicht, zu entscheiden, in wieweit ich in Ihrer Forschungsgruppe zu gebrauchen wäre und muß es Ihnen daher überlassen, darüber zu urteilen.

Aber ich darf vielleicht soweit gehn und behaupten, daß mir jede theoretische Tätigkeit ausgesprochen mehr liegt als das, was ich augenblicklich zu tun habe.

Sie werden daher ermessen können, wie sehr froh ich wäre, wenn Sie eine Anforderung des A. A. erreichen könnten.

Zum Schluß erlaube ich mir noch, Sie um Grüße an die Herrn Rohrbach, Köthe und Kochendörffer zu bitten und verbleibe

[25] The only candidate for this offprint seems to be Lorenzen 1939b.

mit den ergebensten Grüßen an Sie
Ihr
Paul Lorenzen.

09.05.1940. Letter from Hasse to Lorenzen.

Oberkommando der Kriegsmarine Berlin, 9.5.1940
M Wa Stb F
Berlin W 35, Tirpitzufer 60-62

Lieber Herr Lorenzen,

Besten Dank für Ihren freundlichen Brief vom 5.5.40. Ich verstehe daraus, dass ich mich wohl nicht genügend klar ausgedrückt habe. In meiner Forschungsgruppe habe ich leider für Sie keinen Platz. Das Referat „Mathematik" ist bereits besetzt, übrigens auch durch einen früheren Göttinger (Schüler von Münzner). Dagegen hatte ich an eine Verwendung entsprechender Art innerhalb der Marine gedacht, wie sie Rohrbach und Kochendörffer im Auswärtigen Amt haben. Es handelt sich dabei um eine besondere Tätigkeit, die mathematische Fähigkeiten voraussetzt, und die etwa dem Lösen von Kreuzworträtseln vergleichbar ist. Sie können sich danach wohl ungefähr denken, was verlangt wird. Wie ich nun heute erfahren habe, hat die Marine in der Tat Verwendung für einen Mathematiker in dieser Stelle. Wenn Sie sich dafür interessieren, so bewerben Sie sich doch bitte unter Berufung auf mich (hinter meinen Namen OKM, M Wa Stb F setzen!) bei Herrn Korvettenkapitän Teubner,[26] Oberkommando der Kriegsmarine, Berlin W 35, Skl(B). Bei dieser Bewerbung müssen Sie sich als Mathematiker für den Dienst in der Dienststelle dieses Kapitäns anbieten, ohne näher auf die Art des Dienstes selbst einzugehen. Sie müssen ferner genau mitteilen, welchem Truppenteil Sie jetzt angehören.

Ob es dann gelingt, Sie dort freizubekommen, ist allerdings eine besondere Frage. Ich habe jedenfalls Kapt. Teubner ein ausführliches Gutachten über Sie gegeben und Ihre besondere Geeignetheit für diese Verwendung hervorgehoben. In der Tat glaube ich, dass von allen Gebieten der Mathematik die Algebra am besten für die fragliche Arbeit zu gebrauchen ist. Bitte lassen Sie mich laufend wissen, was in dieser Sache geschieht, damit ich gegebenenfalls von meiner zentralen Stelle aus helfend eingreifen kann.

Mit bestem Gruss und in der Hoffnung, Sie demnächst hier zu sehen, Ihr [Hasse]

21.05.1940. Letter from Lorenzen to Hasse.

Gefr. Lorenzen 21.5.40
38503 C

[26] Achim Teubner (1905–1945) is officer at the Marinenachrichtendienst (Naval intelligence service).

Sehr geehrter Herr Professor,

Ihr liebenswürdiger und für mich so erfreuliche Brief erreichte mich mitten in meiner ersten Schlacht, bei der unsre Batterie aber keine Verluste erlitten hat.

Augenblicklich sind wir – für wenige Tage – in Ruhestellung, in der aber leider uns der Dienst nicht das schöne Wetter genießen läßt.

Herrn Korvettenkapitän Teubner habe ich geschrieben und mich für seine Dienststelle als Mathematiker beworben.

Wie sehr ich mich freuen würde, wieder mich mathematisch betätigen zu können, ist wohl überflüssig zu betonen.

Aber ich kann ja leider nichts dazu tun als zu warten.

Von meiner Truppe habe ich nur die Feldpostnummer angegeben, da alles weitere verboten ist. Das O K M wird daraus ja sicherlich auch alles andere ermitteln können.

Indem ich Ihnen von ganzem Herzen danke für Ihre Bemühungen verbleibe ich mit den ergebensten Grüßen

Ihr

Paul Lorenzen.

11.06.1940. Letter from Lorenzen to Hasse.

Gefr. Lorenzen
38503 C

Leutnant z. See
Prof. Dr. Hasse
O K M M Wa Stb F
Berlin W 35
Tirpitzufer 60-62

11.6.

Sehr geehrter Herr Professor,

vor wenigen Tagen habe ich vom O K M (3. Abt. Skl.) schon die Aufforderung erhalten meinen ausführlichen Lebenslauf einzuweisen. Mein jetziger Batteriechef wäre mit meiner Abkommandierung einverstanden. Diese beiden Tatsachen zusammen erleichtern mir augenblicklich meinen ziemlich ungemütlichen Aufenthalt in einem selbst gegrabenen Erdloch von 0,8 · 1,5 m (hoch 1,5 m) Aber man darf sich dadurch (d. h. durch dieses dauernde Granatenkrachen) nicht erschüttern lassen – hoffentlich kann ich mich ja bald sinnvoller beschäftigen.

Mit den ergebensten Grüßen

Ihr

Paul Lorenzen

30.06.1940. Letter from Lorenzen to Hasse.

Fxx Vogesen, 30.6.

Sehr geehrter Herr Professor,

darf ich Ihnen, nachdem wir „unsern" Feldzug siegreich beendet haben, von hier, aus ruhiger Stellung, die ergebensten Grüße übermitteln.

Falls mit dieser Besatzungszeit, die hoffentlich nicht lange andauert, der Krieg für uns tatsächlich beendet sein sollte, so wird man nicht sagen können, daß es irgendwie schlimm gewesen sei. Der Durchbruch durch die Maginotlinie hat sich innerhalb zweier Tage vollzogen und danach hatten wir dauernd zu marschieren um hinter den Franzosen herzukommen, bis sie sich dann kampflos schließlich in den Vogesen ergeben haben.

Ich vermute aber stark, daß sich dieser geringe Widerstand hauptsächlich aus den vorangegangenen deutschen Erfolgen erklärt.

Von Herrn Korvettenkapitän Teubner habe ich, nachdem ich meinen Lebenslauf eingereicht habe, nichts mehr gehört. Ich würde mich über meine Abkommandierung natürlich – so lange dieser Krieg dauert (und der kann ja immer noch sehr lange sein) – immer noch sehr freuen, da ich mich sehr nach einer „geistigeren" Beschäftigung sehne, als es hier die Besetzung eines winzigen französischen Dorfes ist.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich stets

Ihr

Paul Lorenzen.

26.04.1941. Letter from Lorenzen to Hasse.

Gotenhafen, 26/4

Sehr geehrter Herr Professor,

Wie sich jetzt herausgestellt hat, war meine unglückliche Stimmung, in der ich Sie in Berlin verlassen habe, vollauf berechtigt – obwohl doch alles so günstig aussah.

Ich empfinde es eigentlich als aufdringlich, Sie dauernd mit klagenden Berichten über mein Ergehen zu behelligen – ich kann mich nur damit entschuldigen, daß Sie sich bisher so wohlwollend meiner angenommen haben, und daß es eine menschliche Schwäche ist, ein solches Wohlwollen zu benutzen.

Ehe ich meinen Bericht fortsetze, bitte ich zunächst diese „offene Bemerkung" zu entschuldigen.

Der Kommandeur der Steuermannschule hat entschieden, daß ich aus militärischen Gründen als Lehrer an seiner Schule ungeeignet bin. Dazu hat ihn im wesentlichen die Beurteilung veranlaßt, die meine letzte Dienststelle über mich geschrieben hat, in der nämlich steht, daß ich – kurz und gut – unmilitärisch sei. Hinzu kam noch persönliches Pech, das mich veranlaßt hat, mich nichtsahnend hier am Montag morgen zum Dienst zu melden, was in Berlin völlig korrekt gewesen wäre, hier aber dazu führte, daß ich 3 Tage Arrest bekam, da ich schon seit Sonnabend im Standort war.

Ich darf an dieser Stelle in meinem Bericht etwas Mathematisches einschalten, worüber nachzudenken ich erfreulicherweise während der 3 Tage endlich Gelegenheit hatte:

Nach meiner Notiz über Gruppenaxiomatik, die Sie in Crelle aufgenommen haben, ist eine Menge $\mathfrak{G}$, in der eine stets ausführbare Verknüpfung $a : b$ definiert ist, eine Gruppe, wenn

1) $(a : c) : (b : c) = a : b$

2) Es gibt ein a, zu dem für alle c ein b existiert mit $a : b = c$

erfüllt sind. Es war zu vermuten, daß sich 1), 2) zusammenfassen lassen zu einer – naturgemäß komplizierten – Formel. Dies hat sich bestätigt:

Nennt man die Elemente x und $(x : x) : x$ invers zueinander und gilt für inverse Elemente a, a' und b, b' stets

$$a : (b : (a' : ((b' : d) : (c : d)))) = c$$

so ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe.[27]

Vermutlich erinnert Sie diese Zusammensetzung sehr an die Allüren der « *Fundamenta mathematica* », was sich vielleicht als Nachwirkung der polnischen Vorinsassen der Arrestzelle erklären läßt.

Nachdem diese 3 Tage herum waren, hat man mir erklärt, daß ich abkommandiert würde; man weiß aber nicht wohin, da dieses der 2. Admiral der Nordseestation bewerkstelligt. Dennoch bin ich jetzt also genau so weit, wie zu Anfang des Krieges und möchte Sie daher auch genau wie damals bitten, mir zu einer Beschäftigung zu verhelfen. Irgendwelche Ansprüche zu stellen, steht mir natürlich nicht zu, und ich möchte es auch nicht: mir ist jede Tätigkeit irgendwo in einem Amtszimmer recht. Nur als braver Ehemann, füge ich den persönlichen Wunsch meiner Frau hinzu – der allerdings auch der meine ist – daß sie sich sehr nach einer ruhigeren Zeit sehnt, wozu z. B. Kiel und Wilhelmshaven gar nicht geeignet wären und wegen der Wohnungsverhältnisse auch Gotenhafen und sogar Berlin nicht besonders.

Ihre Behauptung, daß Gotenhafen „widerlich“ sei, ist wirklich nicht zu kraß formuliert. Wir sind hier nur behelfsweise untergekommen, und es scheint auch unmöglich zu sein, eine Wohnung zu finden, was sich ja aber auch erübrigt hat durch den Lauf der Dinge, den ich versucht habe, Ihnen darzustellen.

[27] Compare Lorenzen 1944.

Mit den ergebensten Grüßen auch im Namen meiner Frau
verbleibe ich
Ihr
Paul Lorenzen.

07.05.1941. Letter from Hasse to Lorenzen.

Korv.Kapt. Prof. Dr. Hasse
OKM, M Wa Stb F
Berlin W 35, Bissingzeile 13

Berlin, den 7.5.1941

Lieber Herr Lorenzen,

Ihr Brief hat mich sehr nachdenklich gemacht, und ich halte es für richtig, Ihnen ganz offen zu schreiben, was ich denke.

Ich bin zunächst sehr enttäuscht darüber, dass Sie sich auf dem Kommando, das ich Ihnen vermittelt hatte, eine derartig ungünstige militärische Beurteilung zugezogen haben. Wenn ich mich damals dazu entschlossen hatte, mich für Ihre Verwendung zu geistiger Arbeit einzusetzen, so geschah das selbstverständlich in der Erwartung, dass Sie dieser meiner Empfehlung Ehre machen würden, nicht nur durch Ihre dienstlichen Leistungen – ganz gleich welcher Art diese sein würden –, sondern auch durch Ihr ganzes soldatisches Verhalten. Dass Sie sich selbst als unmilitärisch empfinden und nicht die geringste Begeisterung für das Soldatsein aufbringen, ist in meinen Augen keine Entschuldigung, sondern im Gegenteil genau das, was mir nicht gefällt. Es gibt viele andere junge Wissenschaftler, die da eine durchaus andere und gesundere Auffassung haben, wie etwa Teichmüller, der seine eben erfolgte Abkommandierung zu der gleichen Tätigkeit wie Dr. Franz[28] als eine Herabsetzung empfindet und viel lieber wieder zu seiner Truppe in Norwegen zurückkehren würde. Jeder von uns muss heute seine persönliche Bequemlichkeit und seine eigenen Wünsche zurückstellen und sich in das grosse Ganze willig einfügen. Menschen, die sich dem entziehen wollen, können wir heute nicht gebrauchen, und sie gelten heute mit Recht nichts. Sie sind jung und körperlich kräftig. Sie haben für wissenschaftliche Arbeit noch ein langes Leben vor sich. Ich an Ihrer Stelle wäre glücklich, wenn ich in vorderster Front mit dabei sein könnte, wo immer um unsere Zukunft gekämpft wird. Und wenn Sie schon von sich aus keine Begeisterung für das Soldatsein aufbringen können, dann vergessen Sie doch bitte nicht, dass die Haltung, die Sie heute einnehmen, für alle Zukunft bei Ihrer Beurteilung ganz entscheidend mitspricht. Gerade von der Intelligenz unseres Volkes muss man mit vollstem Recht erwarten, dass sie auf Grund der vertieften Einsicht in die harte Notwendigkeit und tiefste Berechtigung dieses Kampfes mit allem ihren Denken und Fühlen bei der kämpfenden Truppe ist und in ihrer Einsatzbereitschaft allen

[28] The mathematician Wolfgang Franz (1905–1996) works in the Cipher Department of the Supreme Command of the Wehrmacht.

anderen als leuchtendes Vorbild vorangeht. Es ist grundfalsch zu sagen, dass dies mit Ihrem späteren Beruf als Wissenschaftler nichts zu tun hat. Im späteren Leben werden eben die Menschen nicht nur nach ihren beruflichen Leistungen gemessen, sondern es wird der ganze Mann gewogen. Und es ist voll gerechtfertigt, wenn ein Mann, der in dieser höchsten Bewährungszeit zu leicht befunden wurde, auch für später diesen Stempel auf sich trägt.

Noch ist es für Sie Zeit, den Eindruck, den Sie bei mir und wohl auch schon bei anderen durch Ihre bisherige Haltung erzeugt haben, zu entkräften. Gerade weil ich glaube, dass Sie später einmal in der Wissenschaft vorwärts kommen können, mit Ihren schönen Gaben und Ihrem scharfen Blick für das Wesentliche in komplizierten begrifflichen Zusammenhängen, möchte ich heute Ihren Wunsch nach einer stillen ruhigen Amtszimmertätigkeit, weit entfernt vom Getöse des Krieges, in keiner Weise begünstigen, ganz abgesehen davon, dass ich es aus den genannten Gründen auch vor mir selbst gar nicht verantworten kann, noch einmal bei einer militärischen Dienststelle für Sie einzutreten. Tun Sie zunächst einmal als Soldat Ihre Pflicht – und mehr als das –, wohin auch immer man Sie jetzt stellt. Dann werden Sie später auch für sich selbst das schöne Gefühl haben, sich die Segnungen des kommenden Friedens wirklich verdient zu haben und nicht bloss durch andere mit dem Einsatz ihres Lebens haben verdienen zu lassen.

Mit besten Grüssen, auch an Ihre Frau,

Ihr [Hasse]

07.05.1941. Letter from Käthe Lorenzen to Hasse.

Gotenhafen, 7.5.41
Leuthenstr. 21 b. Gaspersen

Sehr geehrter Herr Professor,

Sie haben durch den letzten Brief meines Mannes ja schon von unserem „Unglück“ erfahren. Gewiß hat es meinen Mann nicht unverdient getroffen, da er wohl wirklich geradezu typisch unmilitärisch ist, aber es ist ja nicht damit zu ändern, daß man ihn deswegen bestraft u. in häßlicher Art beschimpft. Aber hier legt man leider mehr Wert auf militärische Erziehung, während wir uns in Berlin schon darauf gefreut hatten, daß das hier mehr in den Hintergrund treten würde. Ich habe schon oft versucht, meinen Mann auf sein unmilitärisches Verhalten aufmerksam zu machen, obwohl ich nicht unbedingt dafür bin, daß er sich grundlegend ändert, aber für Kriegsdauer wäre ich schon damit einverstanden. Das Schlimmste ist, daß sich dies alles, wie man an anderen Mathematikern sieht, noch nicht einmal mit seiner Wissenschaft entschuldigen läßt; und doch ist es ja die einzige Entschuldigung, denn es gibt ja wohl nur sehr wenige Stunden an einem Tage, in denen mein Mann nichts Mathematisches im Kopf hat. Nun erscheint es mir recht bedauerlich – um

nicht ungerecht zu sagen – daß er unter Unteroffiziersaufsicht Flure fegt, Striche zieht oder ähnliche Tätigkeiten ausübt. Da ich nun täglich sehe, wie geradezu unglücklich mein Mann sich hierbei fühlt, wage ich es auch persönlich – ohne Wissen meines Mannes – mich an Sie zu wenden. Ich weiß ja gar nicht, wie weit es Ihnen möglich sein wird, an diesem Zustand etwas zu ändern, aber ich vermute doch, daß Sie unter Berücksichtigung der geschilderten Verhältnisse vielleicht schon mit einem guten, „richtigen“ Rat helfen können. Ist es wohl nicht möglich, daß mein Mann (den die Marine ja nun auf Kriegsdauer beschäftigen muß u. den sie wegen Seekrankheit nicht auf ein Schiff stecken kann) irgendwo arbeiten könnte, wo er einen vernünftigen Vorgesetzten hat, der nicht nur das Militärische an einem Menschen gelten läßt.
Es ist natürlich eine sehr große Hoffnung mit wenig Aussicht darauf, daß diese Möglichkeit wirklich gefunden werden kann, aber Sie werden das sicherlich am besten beurteilen können, ob es überhaupt noch lohnt, sich an diese Hoffnung zu klammern. Ich denke mir auch, daß Sie am ehesten Gelegenheit haben werden, eine vernünftige, nutzbringende Beschäftigung herauszufinden, denn Sie reisen von dem zentralen Berlin aus ja in ganz Europa herum.
Vor allem aber vertraue ich darauf, daß Sie bereit sind, meinem Mann zu helfen, da Sie bisher schon sozusagen sein „guter Engel“ gewesen sind – soweit ich aus Erzählungen weiß schon vor dem Kriege, u. wie ich aus Erfahrung weiß auch im Kriege.
Ich darf Ihnen versichern, wie dankbar ich Ihnen hierfür bin, ohne fürchten zu müssen, daß Sie diesen Dank für eine Phrase halten. Und ich freue mich auch, Ihnen meinen Dank nun auch ganz persönlich aussprechen zu können.

Mit freundlichen Grüßen bin ich

Ihre

sehr ergebene

Käthe Lorenzen.

17.05.1941. Letter from Lorenzen to Hasse.

F. B. Gfr. Lorenzen   Gotenhafen, 17/5
2. Komg. Strm.schule

Sehr geehrter Herr Professor,

Es fällt mir jetzt wesentlich schwerer, Ihnen zu schreiben, als das letzte Mal, wo es sich um rein militärische Dinge handelte, während ich dieses Mal gezwungen bin, mich persönlich vor Ihnen zu rechtfertigen. Ich kann es nämlich unmöglich ertragen, daß Sie aus meinem letzten Brief, in dem wohl steht, daß ich gern auf Kriegsdauer einem Amtszimmer zugewiesen würde, herauslesen, ich wolle mich drücken.

Ich darf Ihnen ganz kurz meine militärische Vergangenheit schildern: Nach dem freiwilligen Arbeitsdiensthalbjahr habe ich 1933/34 freiwillig aktiv gedient und bin dabei ein Jahr lang im Pferdestall so behandelt worden, daß ich für militärischen Arbeitsdienst, Exerzieren, Ehrenbezeigung erweisen u. ä. keine Begeisterung mehr übrig habe.

Ich sollte das nicht so laut sagen, aber da ich eben so sicher fühle, daß dies nichts mit einem Sich-Drücken-Wollen zu tun hat, unterlasse ich's leider doch selten.

Beim Durchbruch durch die Maginot-Linie habe ich es bestätigt bekommen, daß ich keine Angst vor dem Einsatz des Lebens habe. Dort bin ich nicht als „zu leicht" befunden. Trotzdem bin ich dort gern weggegangen, denn meine Hauptbeschäftigung außer Warten war wieder Pferdepflegen und in Ruhetagen Exerzieren. Ich wollte mich wirklich gerne nützlicher betätigen.

Wie es mir im O. K. M. ergangen ist, wissen Sie selbst. Ich bin viermal bei meinem Vorgesetzten gewesen, um zu sagen, daß ich nun das Abschreiben begriffen habe – wovon man aber keine Notiz genommen hat. Daraufhin habe ich – törichterweise wie immer – Kameraden gegenüber nicht verhehlt, daß ich auch für das Abschreiben keine Begeisterung mehr übrig hätte. Und daher stammt die schlechte Beurteilung.

Ich werde es wohl kaum noch lernen, mich zu verstellen; aber ich sehe ein, daß ich dann kein Recht habe, anders behandelt werden zu wollen, als ein Drückeberger. Da ich jetzt in der Funk-Beobachter-Laufbahn bin, ist es so gut wie sicher, daß ich erst zu meiner Stamm-Abteilung kommandiert werde, wo ich zu warten habe, (d. h. Kasernenreinigen und Exerzieren) bis bei einem Marine-Nachrichten-Offizier oder in Berlin ein Funk-Beobachter-Gefreiter gebraucht wird.

Obwohl – wie Sie schreiben – nach dem Kriege noch viel Zeit sein wird, Mathematik zu treiben, ist es doch für mich ein bitteres Gefühl, gerade in diesen Kriegsjahren völlig nutzlos sein zu müssen.

Sehr geehrter Herr Professor, ich hoffe mit Zuversicht, Sie werden es mir nicht verargen, daß ich Ihnen so ausführlich und offen meine Einstellung geschildert habe. Der Notwendigkeit, für Deutschland das zu tun, was man von mir verlangt, gleichgültig, ob ich dafür geeignet bin oder nicht, werde ich mich selbstverständlich fügen. Es wäre mir eine große Freude, wenn Sie mir gestatten würden, Ihnen demnächst zu schreiben, wohin ich abkommandiert werde.

Mit den ergebensten Grüßen auch von meiner Frau

Ihr

Paul Lorenzen.

18.03.1942. Letter from Lorenzen to Hasse.

Wesermünde, 18/3
4/I Marineschule

Sehr geehrter Herr Professor,

für Ihren freundlichen Glückwunsch möchten meine Frau und ich Ihnen unsern herzlichsten Dank aussprechen.

Daß unser Töchterlein ebenfalls Jutta heißt, bitte ich nicht als Plagiat auffassen zu wollen – – soweit ich weiß, hat meine Frau davon unabhängig diesen Namen gewählt.

Ich bin Ihnen sehr dankbar für Ihren Hinweis, daß *J. Dieudonné* sich für die multiplikative Idealtheorie interessiert.[29] Es wäre sehr schön, wenn eine „Kollaboration“ sich anbahnen ließe, – – jedenfalls werde ich Herrn *Dieudonné* bald einmal schreiben.

Mit meiner Tätigkeit hier an der Schule bin ich sehr zufrieden, da ich hier, zum ersten Mal im Kriege, das Gefühl habe, nicht überflüssig zu sein.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich

Ihr

Paul Lorenzen.

02.04.1942. Letter from Hasse to Lorenzen.

[Betr. Ms. u. Korr.
Hans R. Weber, München]

Korv.Kapt. [Prof. Dr. Hasse]
Berlin-Wannsee
Am Sandwerder 5

Berlin, den 2.4.1942

Herrn
Dr. P. Lorenzen
4/I M S
Wesermünde

Lieber Herr Lorenzen,

Besten Dank für Ihren freundlichen Brief. Ich sende Ihnen beiliegend eine Korrektur, über die ich gerne Ihren Rat erbitten möchte. Ich hatte damals das Ms. nur mit grossem Zögern Herrn Perron zuliebe angenommen, der es empfahl. Nachdem nun aber der Satz 6, der mich hauptsächlich zur Annahme bestochen hatte, weggefallen ist, glaube ich nicht, dass die Arbeit noch irgendetwas Neues oder Bedeutendes bringt. Wie denken Sie darüber?

Mit besten Grüssen an Sie und Ihre Frau

Ihr [Hasse]

[29] See Dieudonné 1941.

07.04.1942. Letter from Lorenzen to Hasse.

Wesermünde, 7/4
4/I Marineschule

Sehr geehrter Herr Professor,

Das beiliegende Manuskript, das ich heute erhielt, kann ich leider wirklich nicht zur Veröffentlichung empfehlen, denn das Axiomensystem I-III ist schon etwa 1905 von Huntington[30] aufgestellt. Garver[31] hat außerdem inzwischen bewiesen, daß I überflüssig ist. Schließlich läßt sich III noch wesentlich abschwächen, worüber allerdings noch nichts veröffentlicht ist.[32]

Falls Herr Weber sich für diese Dinge interessiert, stehe ich ihm jederzeit nach Möglichkeit zur Verfügung. Vielleicht sind Sie so liebenswürdig Herrn Weber dies mitzuteilen, wenn Sie das Ms. zurücksenden sollten.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich Ihr

Paul Lorenzen

E. Documents relating to Lorenzen's career, 1942.

02.01.1942. Attestation by Krull for Lorenzen.

Mathematisch-naturwissenschaftliche
Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

J.-Nr. 397

Bonn, den 2. Januar 1942

Bescheinigung

Dem M.Gefr. Dr. Paul Lorenzen wird bescheinigt, dass er die Bedingungen erfüllt, die von der Reichshabilitations-Ordnung für die Zulassung zur Habilitation gefordert werden. Falls Dr. Lorenzen imstande ist eine Arbeit rechtzeitig vorzulegen, die von der Fakultät als Habilitationsschrift angenommen wird, kann das Habilitationsverfahren noch in diesem Semester abgeschlossen werden.

Der Dekan
Krull

[30] This probably refers to Huntington 1905.
[31] This probably refers to Garver 1934.
[32] Soon after, Lorenzen will submit Lorenzen 1944 to remedy this.

12.05.1942. Request of statement from the director of the Mathematical seminar in Bonn.

BUK – Az Lorenzen   Bonn, den 12. Mai 1942

1) An den
   Herrn Rektor der Universität
   Bonn
   – mit 2 Durchschlägen –

Der Direktor des Mathematischen Seminars beantragt mit den gegen gefl. Rückgabe beiliegenden Unterlagen Dr. Paul Lorenzen vom 1. Mai 1942 ab zum wissenschaftlichen Assistenten zu ernennen. Ich bitte, die Stellungnahme[33] des Dozentenschaftsleiters und Dozentenbundsführers zu den weltanschaulichen und charakterlichen Voraussetzungen des Vorgeschlagenen herbeizuführen und selbst zu dem Anstellungsantrage zusammenfassend Stellung zu nehmen.

I. A.

2) Wv. 25. Mai 1942.

01.06.1942. Statement by the Dozentenführer.

Dozentenschaft der
Universität Bonn

Bonn, den 1. Juni 1942
Poppelsdorfer-Schloß
Fernruf 6294

Jahrbuch-Nr. 112
bei allen Antworten angeben

An
Se. Magnifizenz den Herrn Rektor der
Rhein. Friedr.-Wilhelms-Universität,
Bonn

Betr. Dr. P. Lorenzen, Ihr Schr. v. 16.5.42 Nr. 983

Dr. Lorenzen ist ein vielversprechender Mathematiker mit Begeisterung für seine Wissenschaft und großem Arbeitseifer.
Soweit bekannt, ist die politische Einstellung einwandfrei. Es soll jedoch nicht verschwiegen werden, daß L. wohl einige Charaktermängel aufzuweisen scheint, die es z. Zt. jedenfalls nicht erwünscht erscheinen lassen, ihn etwa zur Dozentur

[33] See Segal (2003, pages 174–181) for the signification of the *Dozentenschaft* reports: “Frequently, the *Dozentenführer* had no idea about an individual and had to ask a politically trusted member of his discipline for a report, which would then be passed on verbatim”. It is plausible that the views expressed in the subsequent statement are Krull’s.

zuzulassen. L. neigt zu starker Selbstüberschätzung, was ihm offenbar auch in seiner Laufbahn bei der Wehrmacht geschadet hat.
Angesichts seiner großen Befähigung ist es daher nur erwünscht, wenn er jetzt Gelegenheit erhält als Assistent zu zeigen, wie weit er sich einzufügen vermag, und wie weit er sich für die Hochschullaufbahn eignet.
Der Antrag des Herrn Direktors des Mathematischen Seminars wird daher befürwortet.

Heil Hitler!
Klapp.[34]
Dozentenführer i. V.

F. The correspondence between Krull and Lorenzen, 1943–1944.

07.05.1943. Letter from Lorenzen to Krull.

Wesermünde-Lehe, den 7. Mai 1943
Hafenstr. 92

Sehr geehrter Herr Professor,

von den „Fortschritten“ erhielt ich Ihren Beitrag VIII[35] über die Λ-Operationen zum Referat.[36] Leider habe ich nun Ihren Beitrag I nicht zur Hand, dessen Kenntnis dazu nötig wäre. Insbesondere weiß ich nicht mehr, ob und in welchem Zusammenhang der folgende Satz darin enthalten ist:

Ist w eine arithmetisch brauchbare Operation eines Integritätsbereiches R (Quotientenkörper K), so entsprechen die arithmetisch brauchbaren $'$-Operationen, für die stets $\mathfrak{a}_w \subseteq \mathfrak{a}'$ gilt, eineindeutig denjenigen Quotientenringen M' des Funktionalringes M mit $M' \cap K = R$.

Dieser Satz läßt sich direkt mit der Halbgruppe der ganzen Idealbrüche beweisen. Denn der Übergang von $\mathfrak{a}_w$ zu $\mathfrak{a}'$ ist nichts anderes als eine homomorphe Abbildung der w-Ideale auf die $'$-Ideale.

Da in Beitrag VIII Ihre Bemerkungen zu den Definitionsformeln der $'$-Operationen (insbesondere Anmerkung 21) leider durch Druckfehler entstellt sind, möchte

[34]Ernst Klapp (1894–1975) is professor of agricultural sciences at the University of Bonn.
[35]Krull 1943.
[36]The *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* ceases to appear with the volume on the year 1942.

ich die Abhängigkeiten zwischen den Formeln:

$$
\begin{array}{lll}
1)\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}' & 2)\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}' & \\
2')\ (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})' & 2''\mathrm{a})\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}' & 2''\mathrm{b})\ \mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}' \\
3)\ (a\mathfrak{a})' = a\mathfrak{a}' & 3')\ (\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})' & \\
4)\ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}' & 4')\ (a) = (a)' &
\end{array}
$$

hier darlegen.[37]

I. Unter Voraussetzung von 1) ist 2) gleichwertig mit $2''a)$ und $2''b)$.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Beweis: Es gelte 1) und 2). Dann gilt} & \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \to \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}' & \text{nach 1)} \\
\text{und} & \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}' & \text{nach 2)} \\
\text{also} & \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}', & \\
\text{ferner gilt} & \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}'' & \text{nach 1)} \\
\text{und} & \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}' \to \mathfrak{a}'' \subseteq \mathfrak{a}' & \text{nach 2)} \\
\text{also} & \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'' &
\end{array}
$$

Es gelte $2''a)$ und $2''b)$. Dann gilt

$$
\begin{array}{rll}
 & \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}'' & \text{nach } 2''a) \\
\text{also} & \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}' & \text{nach } 2''b)
\end{array}
$$

II. Unter Voraussetzung von 1) ist 2) gleichwertig mit $2')$.

$$
\begin{array}{rll}
\text{Beweis: Es gelte 1) und 2). Dann gilt} & \mathfrak{a}' \subseteq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})' & \\
\text{und} & \mathfrak{b}' \subseteq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})' & \text{nach } 2''a) \\
\text{also} & \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' \subseteq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})' & \\
\text{und} & (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')' \subseteq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})' & \text{nach 2)}
\end{array}
$$

Es gelte 1) und $2')$. Dann gilt $\mathfrak{a}'' = (\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}')' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{a})' = \mathfrak{a}'$ also $2''b)$. Ferner gilt

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} & \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} & \\
 & \to (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})' = \mathfrak{b}' & \\
 & \to (\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')' \subseteq \mathfrak{b}' & \text{nach } 2') \\
 & \dot{\to}\ \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{b}' & \text{nach 1)} \\
\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} & \to \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b}' &
\end{array}
$$

III. Unter Voraussetzung von 1) und 2) ist 3) gleichwertig mit $3')$.

[37] Compare Lorenzen 1950, § 4.

Beweis: Es gelte 1), 2) und 3). Dann gilt für $b \in \mathfrak{b}$

$$\mathfrak{a}' \cdot b \subseteq (\mathfrak{a} \cdot b)' \subseteq (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})'$$

$$\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b} \subseteq (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})' \qquad \text{nach 3) und } 2''a)$$

Genau so beweist man $\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}' \subseteq (\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b})'$

also gilt $\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}' \subseteq (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})'' = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})' \quad$ nach $2''b)$

$$(\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})' \qquad \text{nach 2) und } 2''a)$$

Es gelte 1) und 3′). Dann gilt

$$a \cdot \mathfrak{a}' \subseteq (a)' \cdot \mathfrak{a}' \subseteq ((a)'\mathfrak{a}')' = (a\mathfrak{a})' \qquad \text{nach 1) und } 3')$$

Genau so beweist man $a^{-1}(a\mathfrak{a})' \subseteq (a^{-1}a\mathfrak{a})'$

$$a^{-1}(a\mathfrak{a})' \subseteq \mathfrak{a}'$$

$$(a\mathfrak{a})' \subseteq a\mathfrak{a}'$$

IV. Unter Voraussetzung von 3) ist 4) gleichwertig mit 4′).

Beweis: Es gelte 3) und 4). Dann gilt

$$(a)' = (a \cdot \mathfrak{R})' = a\mathfrak{R}' = a \cdot \mathfrak{R} = (a)$$

Es gelte 4′). Dann gilt $\mathfrak{R} = (1) = (1)' = \mathfrak{R}'$

Eine ′-Operation läßt sich also durch 1), 2′), 3′), 4) definieren, wobei 2′) und 3′) nichts anderes als die Homomorphie aussagen. Sind daher die w- und die ′-Operationen arithmetisch brauchbar, so hat man eine homomorphe Abbildung der Halbgruppe der w-Ideale auf die Halbgruppe der ′-Ideale, und damit auch eine homomorphe Abbildung der Halbgruppe $\mathfrak{g}_w$ der ganzen w-Idealbrüche auf die Halbgruppe $\mathfrak{g}'$ der ganzen ′-Idealbrüche. $\mathfrak{g}_w$ ist vollständig (nach der Terminologie in Prüfer und meiner Dissertation, ich würde jetzt lieber sagen: „$\mathfrak{g}_w$ ist Verbandshalbgruppe“). Die Homomorphismen einer Verbandshalbgruppe entsprechen aber eineindeutig deren Quotientenhalbgruppen. (Das ist Ihr Satz aus Beitrag I, daß jeder Oberring eines Hauptidealringes stets Quotientenring ist, denn die Homomorphismen einer Verbandshalbgruppe entsprechen eineindeutig den Oberhalbgruppen, die mit a und b auch $a \vee b$ enthalten – vgl. in meiner Dissertation S. 545, Absatz 1 –).[38]

Ich wäre Ihnen dankbar, wenn Sie mir mitteilen würden, ob Ihnen eine arithmetisch brauchbare ′-Operation bekannt ist, die keine Λ-Operation ist. Es müßte dann $\mathfrak{g}'$ aus $\mathfrak{g}_w$ durch ein multiplikativ abgeschlossenes System S entstehen, das nicht nur Ideale, sondern auch Idealbrüche enthält.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich

Ihr

Lo[renzen]

[38] Lorenzen 1939a, first paragraph on page 545, reproduced on page 17 and spelled out on page 14.

20.09.1943. Letter from Lorenzen to Krull.

Wesermünde-Lehe, den 20. September 1943
Hafenstr. 92

Sehr geehrter Herr Professor,

ich möchte Ihnen mitteilen, daß sich die Identität des r_a-Idealsystems mit dem r_b-Idealsystem auch für beliebige halbgeordnete Gruppen mit beliebigem r-Idealsystem beweisen läßt.
Die Beweismethode liefert für die kommutativen Integritätsbereiche folgende Vereinfachung:
Es sei I ein Integritätsbereich (Quotientenkörper K), $\mathfrak{a}$ ein Dedekindsches I-Ideal, $x \in K$.

Hilfssatz: Ist $a \in K$ ganz abhängig von $\mathfrak{a}I[x]$ und $\mathfrak{a}I[x^{-1}]$, so ist a ganz abhängig von $\mathfrak{a}$.

Beweis: Es gibt endliche Ideale $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ mit

$$\mathfrak{e}_1 a \subseteq \mathfrak{e}_1 \mathfrak{a} I[x]$$
$$\mathfrak{e}_2 a \subseteq \mathfrak{e}_2 \mathfrak{a} I[x^{-1}]$$

Also gilt für $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2$ und geeignete n_1, n_2

$$\mathfrak{e}a \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, x, \ldots, x^{n_1})$$
$$\mathfrak{e}a \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, x^{-1}, \ldots, x^{-n_2})$$

und daher für $n = n_1 + n_2$

$$\mathfrak{e}a(1, x, \ldots, x^n) \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, x, \ldots, x^n)$$

Satz: Ist a nicht ganz abhängig von $\mathfrak{a}$, so gibt es einen Bewertungsoberring B von I mit $a \notin \mathfrak{a}B$.

Beweis: Es gibt einen maximalen Oberring B von I, für den a nicht ganz abhängig von $\mathfrak{a}B$ ist (Wohlordnungsschluß). Aus $B \subset B[x]$ und $B \subset B[x^{-1}]$ würde folgen, daß a ganz abhängig von $\mathfrak{a}B[x]$ und $\mathfrak{a}B[x^{-1}]$ ist, also von $\mathfrak{a}B$ (Hilfssatz). Also gilt $x \in B$ oder $x^{-1} \in B$.

In Schiefkörpern gilt der Hilfssatz nicht für die übliche Ganzabhängigkeit. Nennt man aber ein Element a

1. d_0-abhängig von $\mathfrak{a}$, wenn $a \in \mathfrak{a}$
2. d_{n+1}-abhängig von $\mathfrak{a}$, wenn a d_n-abhängig von $\mathfrak{a}I[x]$ und $\mathfrak{a}I[x^{-1}]$
3. d-abhängig von $\mathfrak{a}$, wenn a d_n-abhängig von $\mathfrak{a}$ für mindestens ein n,

so gilt der Hilfssatz für die d-Abhängigkeit. Also gilt auch der Satz für die d-Abhängigkeit. Die Umkehrung des Satzes ist trivial.

Indem ich hoffe, daß Sie diese Mitteilung interessiert hat, verbleibe ich mit den ergebensten Grüßen

[Ihr Lorenzen][39]

04.01.1944. Postcard from Krull to Lorenzen.

Krull
Bonn
Kaiser-Friedrichstr. 18

Sonderführer (M)
Dr. Paul Lorenzen
Wesermünde
Hafenstr. 92

Bonn, 4.1.44

Lieber Herr Lorenzen!

Durch den stellvertretenden Dekan, Herrn v. Antropoff erfuhr ich von Ihrem Habilitationsgesuch. Es freut mich sehr, dass Sie so bald nach Ihrem Unteroffizierskurs Ihre Arbeit abschliessen konnten. Dumm ist es nur, dass ich nun das Exemplar, das Sie mir zuschickten, nicht bekommen habe. Es liegt sicher in Greifswald, während ich hier zunächst festgehalten bin, da ich jetzt nach Ablauf meines „Genesungsurlaubs" nochmals – oder richtiger zum ersten Mal, denn ich war bisher dauernd in ambulanter Behandlung – ins Lazarett muss. Vielleicht bitte ich mir da einfach vom Dekan ein Exemplar aus. Allerdings glaube ich nicht, dass Sie schon damit rechnen können, Ende dieses Semesters sich zu habilitieren. Ich muss Ihre Arbeit immerhin ganz sorgfältig durchsehen, um für die Richtigkeit des Inhalts garantieren zu können, Sie wissen ja selber, wie leicht einem bei einer Arbeit gelegentlich ein Fehler unterläuft.[40] Ausserdem weiss ich ja nicht, wie stark mich eventuell die Lazarettbehandlung in anspruch nehmen wird. – Also richten Sie sich am besten gleich für

[39] The following notes were written on this carbon copy by hand.

Für kom[mutative] Gr[uppen]:

$$a \ \alpha_r \ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{g} \prec \bigvee_{\mathfrak{e}} \mathfrak{e}a \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{g}$$

Beweis durch Ind[uktion]: $a \ \alpha_r^0 \ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{g} \prec a \in \mathfrak{a}\mathfrak{g}$

$$a \ \alpha_r^{n+1} \ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{g} \prec \bigvee_{x} a \ \alpha_r^n \ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{g}(x)_r \wedge a \ \alpha_r^n \ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{g}(x^-)_r$$

$$\text{Ind[uktions]vor[aussetzung]} \quad \prec \bigvee_{\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2} \mathfrak{e}_1 a \subseteq \mathfrak{e}_1 \mathfrak{a}\mathfrak{g}(x)_r \wedge \mathfrak{e}_2 a \subseteq \mathfrak{e}_2 \mathfrak{a}\mathfrak{g}(x^-)_r$$

$$\prec \bigvee_{\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2} \mathfrak{e}a \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, \ldots, x^{n_1})_r \wedge \mathfrak{e}a \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, \ldots, x^{-n_2})_r$$

$$\prec \bigvee_{n = n_1 + n_2} \mathfrak{e}a(1, \ldots, x^n)_r \subseteq \mathfrak{e}\mathfrak{a}(1, \ldots, x^n)_r$$

[40] This is an allusion to Lorenzen's nonconclusive proofs, see footnote 17 on page 54.

eine Habilitation Anfang des SS ein. Die Themen fürs Kolloquium, die Sie an Herrn Besselhagen[41] geschickt haben, waren ganz passend, zum mindesten angesichts der Tatsache, dass Sie zur Zeit alle Ihre Wissenschaft nebenher arbeiten müssen. Ich würde am liebsten über die Gentzenschen Sachen Sie sprechen hören. – Übrigens, wüssten Sie einen Herrn ausserhalb Bonn, der Ihre wissenschaftlichen Leistungen begutachten könnte? Wir holen hier grundsätzlich bei jeder Habilitation solche Gutachter von auswärts ein. Mit den besten nachträglichen Neujahrswünschen Ihr

Wolfg. Krull.

06.02.1944. Postcard from Krull to Lorenzen.

Krull
Bonn
Kaiser-Friedrichstr. 18

Sonderführer Dr.
Paul Lorenzen
23 Wesermünde
Hafenstr. 92

Bonn, 6.2.44.

Lieber Herr Lorenzen!

Leider habe ich die Reste meiner früheren Sonderabzüge irgendwie verkramt. Sobald ich sie aber wiederfinde, bekommen Sie das gewünschte Separat. – Nun aber zu Ihrer Habilitationsschrift.[42] Von Greifswald habe ich bisher nur die Anmerkungen, nicht aber das Manuskript selber bekommen. Hier auf dem Dekanat bekam ich auf mehrfache Anfrage immer nur die Antwort, es sei bisher von Ihnen nichts eingegangen. Das beunruhigt mich doch lebhaft. – Im übrigen, können Sie mir ausser Hasse und Scholz keinen anderen Referenten angeben. Hasse liegt Ihrer eigentlichen Richtung („Verbände“) doch ziemlich fern, und Scholz ist halbwegs Philosoph. Dabei sind die auswärtigen Gutachter für mich, vor allem nach dem Standpunkt, den ich als Dekan immer eingenommen habe, <u>sehr</u> wichtig. Ferner bitte ich Sie um eine Zusammenstellung Ihrer bisherigen Veröffentlichungen.

Mit den besten Grüßen

Ihr Wolfgang Krull.

[41] Erich Bessel-Hagen (1898–1946) is professor of mathematics in Bonn.

[42] On the same day, Krull answers a letter from Hasse dated 23 January 1944 (Roquette 2004, § 1.89) that must contain a harsh criticism of Lorenzen and a refusal to write a report on Lorenzen's habilitation. Krull takes Lorenzen's defense, “at least scientifically”, but concludes that “he is still so self-confident that a repeated lesson would do no harm at all”.

19.02.1944. Letter from Krull to Lorenzen.

Bonn, 19.2.44

Lieber Herr Lorenzen!

Leider[43] muss ich mit meinem Brief Ihnen vermutlich eine ernsthafte Enttäuschung bereiten. Erstens: Ihre Habilitationsschrift nebst Bewerbung ist tatsächlich hier nicht eingetroffen. Wenn ich Ihnen früher in anderm Sinne schrieb, so nur deshalb, weil ich mich ohne Rückfrage bei dem Dekanat auf einen Brief verliess, den mir Besselhagen zur Verfügung gestellt hatte, und in dem Sie von Ihrem Schritt beim Dekanat als von einer Selbstverständlichkeit sprachen. Zweitens: Es ist in gewissem Sinne ein Glück, dass Ihr Gesuch verlorengegangen ist, wenigstens wenn Sie, wie ich hoffe, noch ein Exemplar Ihrer Arbeit in Händen haben. Prof. Hasse, auf dessen Gutachten Sie ja selber besonderen Wert legten, hat sich keineswegs so geäussert, wie Sie es wohl erwarteten. Er ist der Ansicht, dass Sie bisher noch sehr wenig mathematische Leistungen von wirklichem Belang aufzuweisen haben, und mit dieser Stellungnahme in der Hand ist es mir unmöglich, Ihre Habilitation im Augenblick zu befürworten, zumal da ich Hasses Bedenken beim Betrachten der Liste Ihrer bisherigen Veröffentlichungen sehr gut verstehe. Auch für mich zählt von diesen außer der Dissertation eigentlich nur die im Druck befindliche Arbeit über den Verfeinerungssatz, und diese in gewissem Sinne nur halb, da mir die logistische Seite zu fern liegt. Natürlich bestände noch die Möglichkeit, dass Sie mir als Habilitationsschrift nicht nur eine solide, sondern eine ganz aussergewöhnliche Leistung vorlegen, der gegenüber alle Bedenken verstummen. Aber das halte ich nach dem, was ich bisher von Ihrer Arbeit weiss nicht für wahrscheinlich, und so kann ich Ihnen im Augenblick nur den einen Rat geben: Betrachten Sie Ihr Habilitationsgesuch als nicht erfolgt, legen Sie zunächst mir Ihre Arbeit vor, – (hoffentlich ist das Manuskript, das Sie nach Greifswald sandten, dort angekommen), – und wenn mir die Arbeit doch allein für die Habilitation noch nicht auszureichen scheint, so arbeiten Sie eben weiter. Suchen Sie vor allem Ihre Basis zu erweitern und auch unter den reinen Mathematikern bekannt zu werden. Prof. Scholz kommt als Philosoph mit mathematischen Interessen für mich nur als Mitbegutachter, nicht als Hauptreferent inbetracht, das müssen Sie immer berücksichtigen.

Es tut mir leid, wenn ich Ihnen mit diesem Brief, wie schon einmal früher, eine Enttäuschung bereiten muss, aber glauben Sie mir, es ist in Ihrem eigenen Interesse.

Mit den besten Grüssen

Ihr Wolfgang Krull.

[43] On the same day, Krull writes an answer to a postcard by Hasse (Roquette 2004, § 1.90), with whom he agrees on how to answer to Lorenzen.

13.03.1944. Letter from Lorenzen to Krull.

Dr. Paul Lorenzen

Wesermünde-Lehe, den 13.3.44
Hafenstr. 92

Sehr geehrter Herr Professor,

ich bitte zu entschuldigen, daß ich auf Ihren Brief erst heute antworten kann. Durch die gegenwärtige starke dienstliche Inanspruchnahme sind die neuen Exemplare meiner Arbeit erst jetzt fertig geworden. Hoffentlich gelangt die Arbeit diesmal aber nun auch wirklich und endlich in Ihre Hände – darf ich Sie wohl bitten, mir den Eingang bestätigen zu wollen?

Allerdings werde ich befürchten müssen, daß meine Arbeit jetzt eine ungünstigere Aufnahme finden wird, als sie vor einem Vierteljahr gefunden hätte, da Sie mir schreiben, daß meine Habilitation unter normalen Umständen kaum möglich sein wird.

Ihrer Meinung, die auch die Meinung von Herrn Prof. Hasse ist, daß meine bisherigen Veröffentlichungen "keine Leistungen von wesentlichem mathematischen Belang" sind, möchte ich durchaus nicht widersprechen. Hierin bin ich völlig Ihrer Meinung, ein anderes Urteil wäre wohl auch kaum möglich.

Mit meinem Anliegen, mich zu habilitieren, stütze ich mich ja aber nicht auf diese bisherigen Veröffentlichungen, sondern auf die Habilitationsarbeit.

Soweit ich weiß und aufgrund der „Bescheinigung", die Sie mir vor zwei Jahren ausstellten, annehmen mußte, bestehen keine Bestimmungen, die die Habilitation von vorausgegangenen Veröffentlichungen abhängig machen. Es ist der Nachweis wissenschaftlicher Tätigkeit zu erbringen – und da ist es nun ja nicht meine Schuld, daß ich die letzten vier Jahre hierfür – ganz allein auf mich gestellt – nur die dienstfreien Abende zur Verfügung hatte. (Daß ich diese voll ausgenutzt habe, werde ich aber sagen dürfen.) Sämtliche Examensbestimmungen, die für die Kriegszeit erlassen sind, gehen darauf hinaus, daß die notwendig entstehenden Härten für den Examinanden nach Möglichkeit auszugleichen sind. Mir scheint daher mein Wunsch, mich jetzt – 6 Jahre nach meiner Promotion – zu habilitieren, durchaus gerechtfertigt, da ich mich normalerweise doch schon vor mindestens 3 Jahren hätte habilitieren können.

Da ich nicht weiß, wie lange der Krieg noch dauert, und wie die Arbeitsbedingungen für mich werden, müßte ich, wenn Sie meine Habilitation jetzt ablehnen, die beiliegende Arbeit zurück erbitten – und weiterarbeiten, wie Sie mir schreiben. Allerdings muß ich dann noch damit rechnen, daß meine Arbeit völlig unnütz ist, weil Sie sie nicht gelten lassen werden. Im Anschluß an eine algebraische Untersuchung über orthokomplementäre Halbverbände versuche ich jetzt, den Zusammenhang dieser Fragen mit der Widerspruchsfreiheit der klassischen Logik herauszubekommen. Diesen Versuch möchte ich machen selbst auf die Gefahr hin, daß das evtl. Ergebnis von Ihnen gar nicht gezählt wird – weil ich nicht umhin kann, solche

Fragen als Fragen von wesentlichem mathematischem Belang zu empfinden (und in dieser Auffassung der Logistik darf ich mich sogar auf Hilbert berufen).

Ich möchte Sie daher bitten, mir sagen zu wollen, ob es unmöglich ist, sich als Mathematiker zu habilitieren, wenn man etwa entschlossen ist, die eigene Forschungsarbeit an mathematisch-logistische Dinge zu wenden.

Diese Voraussetzung trifft allerdings auf mich noch nicht einmal zu, da ich selber eigentlich viel mehr an der algebraischen Seite der Beweistheorie interessiert bin als an der rein logischen. Genau dasselbe Interesse würde ich auch daran haben, die Fragestellungen der algebraischen Geometrie begrifflich zu durchdringen, in dem Sinne, wie es etwa die beiliegende Arbeit für die multiplikative Idealtheorie versucht. Aber auch auf diesem Gebiete fürchte ich, daß meine Auffassung von der Ihrigen abweicht. Z. B. erscheint mir die Erkenntnis, daß ein Idealsystem eigentlich nichts anderes als ein Oberhalbverband und eine Bewertung nichts anderes als eine Ordnung ist, als das wesentlichste Ergebnis meiner Bemühung. In diesem Sinne läßt sich sogar der Inhalt von § 6 als auf rein halbordnungstheoretischen Tatsachen beruhend erkennen, worauf ich aber in der Arbeit nicht näher eingegangen bin.

Es bleibt mir auch an dieser Stelle nur übrig, zu fragen, ob ich mit einer solchen Auffassung habilitationsfähig bin oder nicht.

Wenn das nicht der Fall sein sollte, so sehe ich eigentlich nicht, was ich anderes machen sollte, als mich nach einem anderen Beruf umzusehen, denn es wird schwer sein, meine Auffassung über den Sinn der mathematischen Forschung zu ändern.

Es wird jedoch ebenfalls sehr schwer für mich sein, mein Habilitationsgesuch als nicht geschehen zu betrachten, nachdem ich meine Absicht, mich zu habilitieren, ja nicht nur Ihnen gegenüber geäußert habe.

Ich möchte nichts unternehmen, was Ihrem Ratschlag widerspricht, muß aber doch um Verständnis bitten, daß ich mich nicht einfach damit abfinden kann, die Habilitation auf später zu verschieben, da ich entweder in den nächsten Jahren gar nicht werde arbeiten können, oder aber damit rechnen muß, daß meine Arbeit nicht gezählt wird.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich
Ihr
Paul Lorenzen

Für die Übersendung der beiden Separata bin ich Ihnen sehr zu Dank verbunden.

01.04.1944. Postcard from Krull to Lorenzen.

Reg.Rat Prof. Krull
Greifswald
Mar[ine]obs.

Herrn Dr.
Paul Lorenzen
23 Wesermünde-Lehe
Hafenstr. 92

Greifswald, 1.4.44

Lieber Herr Lorenzen!

Auf Ihren ausführlichen Brief vom 13.3. möchte ich Ihnen heute noch nicht im Einzelnen antworten. Zunächst nur das eine, dass ich Ihre Arbeit ohne jedes Vorurteil, zum mindesten ohne jedes ungünstige, zu lesen angefangen habe. Indessen bin ich schon auf S. 8 auf eine Schwierigkeit gestossen, die ich Sie bitten muss, mir aufzuklären, da ich durch andere Untersuchungen (Korrelationstheorie) zu stark inanspruch genommen bin. Sie schreiben bei Satz 4:[44] „Aus $c \equiv a \cdot b^{-1}$ und $a \parallel b$ folgt $a \equiv b \cdot c$“. D. h. aber anders ausgedrückt: „Aus $a \wedge b \equiv 1$ folgt $a \equiv bab^{-1}$“, und diese Tatsache, die wenn richtig, unbedingt eine Formulierung als Satz verdient hätte, (weil hier ein sehr starkes kommutatives Element ins Nichtkommutative hineinkommt), konnte ich jedenfalls aus dem Handgelenk heraus nicht beweisen. Andernfalls scheint der weitere Wortlaut Ihres Textes zu zeigen, dass keineswegs nur ein Schreibfehler vorliegt, dass Sie nicht etwa $c \cdot b$ meinten und $b \cdot c$ schrieben. – Also bitte, klären Sie mir diesen Punkt auf!

Mit den besten Grüßen Ihr Wolfgang Krull.

16.04.1944. Letter from Krull to Lorenzen.

Greifswald, 16.4.44

Lieber Herr Lorenzen!

Vielen Dank für Ihre Karte! Dieser Punkt wäre also geklärt. Also die Tatsache, dass aus $a \wedge b \equiv 1$ stets $a \cdot b \equiv b \cdot a$ folgt, sollte unbedingt als Satz formuliert werden. Nicht nur, weil erst dadurch der Beweis von Satz 4 ganz in Ordnung kommt. Es handelt sich auch darum, zu zeigen, wie stark die Verbandsgruppen „kommutativ infiziert sind“. – Und hier wären wir nun an einem Punkt, über den ich etwas ausführlicher werden muss. Ihre Arbeit hat mich insofern etwas enttäuscht, als sie doch anscheinend fürs Nichtkommutative wesentlich weniger bringt, als ich mir gedacht hatte. Im Verbandsbegriff steht eben ein so starkes kommutatives Moment, dass bei der Theorie Ihrer Verbandsgruppen die Beweise für kommutativ und nichtkommutativ völlig gleich laufen. Andererseits bedeutet die Beschränkung auf Verbandsgruppen vom Nichtkommutativen aus gesehen offenbar eine sehr starke Beeinträchtigung der Allgemeinheit. – Unter diesen Umständen hätte ich aber Ihre Arbeit auch ohne die Stellungnahme von Hasse nicht als Habilitationsschrift empfehlen können. Dazu bewegt sie sich doch gar zu sehr im Gedankenkreise Ihrer Dissertation. Aber natürlich bedeutet dieses Urteil keineswegs, dass ich Ihre Arbeit „nicht als mathematische Leistung zähle“; und wenn Sie mich mit weiteren Veröffentlichungen belehren würden, dass Ihre Methoden doch auch fürs Nichtkommutative grössere

[44] See Lorenzen 1950, Satz 4.

Bedeutung haben, als es mir bis jetzt scheint, so sollte mich das nur freuen. Das wäre eine Arbeitsrichtung, in der ich Sie lieber sehen würde als in der nach der Logistik hin. Ich halte die Spezialisierung nach der logistischen Seite hin nun einmal für nicht unbedenklich, so fern es mir liegt, bestreiten zu wollen, dass auch auf diesem Gebiete Bedeutendes geleistet werden kann (man denke nur etwa an Gödel oder Gentzen). – Also wenn Sie glauben, wirklich wesentlich neue Gedanken zur Beweistheorie zu haben, so lassen Sie sich ja nicht abhalten, sie auszuarbeiten. – Was die Tatsache angeht, dass Sie schon an verschiedenen Stellen über Ihre baldige Habilitation geredet habe, so war das eine Unvorsichtigkeit von Ihnen, die mir eigentlich unverständlich ist. Über solche Dinge redet man doch erst dann, wenn man seiner Sache absolut sicher ist. Und wo es möglich ist, wie in Ihrem Falle, legt man doch zu allererst die zukünftige Arbeit ganz persönlich dem voraussichtlichen Referenten vor, und macht die weiteren offiziellen Schritte erst im Einverständnis mit ihm! Wenn Sie so vorgegangen wären, wären Ihnen alle Peinlichkeiten erspart geblieben. Aber natürlich helfe ich Ihnen auch jetzt gerne so viel ich kann. Ihrer Dienststelle gegenüber wird es Ihnen ja nicht schwer fallen, irgend einen formalen Grund für die Hinausschiebung Ihrer Habilitation zu erfinden. Unserm Dekan gegenüber brauchen Sie einfach von der Sache nicht mehr zu reden oder zu schreiben; dann wird er nicht mehr daran denken. Und Besselhagen und Peschl kann ich ja sagen, ich hätte gewünscht, dass Sie Ihre Untersuchungen über das bisher Vorliegende, zunächst zu Veröffentlichende hinaus und weiter aufs Nichtkommutative ausdehnten. Sie sehen, ich helfe Ihnen gerne, wo ich kann. – Was übrigens die Form der Veröffentlichung der bisherigen Ergebnisse angeht, so müssen wir uns darüber ein anderes Mal unterhalten. Ich glaube, Sie müssen die Sache im Sinne der Entlastung von allen irgendwie entbehrlichen Hilfsbegriffen sehr stark kürzen, wenn Sie wollen, dass ein gewisser Kreis von Fachgenossen sich die Arbeit wirklich genauer ansieht. Aber wie gesagt, davon das nächste Mal!

Mit den besten Grüßen Heil Hitler!

Ihr Wolfgang Krull.

25.04.1944. Letter from Lorenzen to Krull.

Wesermünde, den 25.4.44
Hafenstr. 92

Sehr geehrter Herr Professor,

Ihren Brief habe ich vor einigen Tagen erhalten. Ich danke Ihnen für Ihre Freundlichkeit, mir in den Schwierigkeiten, die durch Ihr ablehnendes Urteil entstehen, helfen zu wollen. Allerdings bitte ich zuvor, mir erlauben zu wollen, mich gegen das Urteil, daß sich meine Behandlung der nichtkommutativen Gruppen "zu sehr in dem Gedankenkreis meiner Dissertation" befinde, zu verteidigen.

Die Sätze der §§ 1-3[45] sind allerdings tatsächlich im Anschluß an meine Dissertation entstanden. Ich habe damals die nichtkommutative Theorie jedoch liegen lassen, weil mir diese Übertragung vom Kommutativen aufs Nichtkommutative nicht interessant schien (mit Ausnahme der Regularitätsbedingung) – und vor allem, weil es aussichtslos war, die wesentlichen Bestandteile der kommutativen Theorie: die Konstruktionen des a-Idealsystems und der Gruppe der Idealbrüche auch im Nichtkommutativen durchzuführen.

Die Prüfersche Definition des a-Systems liefert im Nichtkommutativen nämlich kein Idealsystem. Andererseits kann man im Nichtkommutativen aus einer Halbgruppe mit $ac = bc \Rightarrow a = b$ keine Quotientengruppe konstruieren.

Erst nachdem mir – vor etwa 4 Jahren – endlich klar wurde, daß ein Idealsystem nichts anderes als ein Halbverband ist, ergab sich plötzlich die Möglichkeit, die Konstruktion der Gruppe der Idealbrüche durch etwas ganz Neues zu ersetzen: nämlich durch eine iterierte Anwendung des Idealbegriffs. Jede minimale Oberverbandsgruppe einer halbgeordneten Gruppe G ist das v-Idealsystem eines Idealsystems von G. Das ist der Inhalt von § 4.[46]

In der Hoffnung, auf dieser Grundlage die Theorie, sowie einige Ansätze über geordnete Gruppen, während eines Arbeitsurlaubs ausbauen zu können, habe ich Sie damals um Zulassung zur Habilitation gebeten.

Ich war mir bewußt, daß es erwünscht gewesen wäre, wenn ich ein Thema beantwortet hätte, dessen Fragestellung nicht in die Richtung der Dissertation fiel – hätte ich auch nur einmal wenigstens einige Literatur zur Einarbeitung in ein neues Problem zur Verfügung gehabt, so hätte ich das bestimmt vorgezogen.

Unter den gegebenen Umständen schien mir jedoch meine Bitte um Zulassung zur Habilitation nicht unangemessen zu sein.

Nachdem damals dieser Arbeitsurlaub sich wegen meiner Versetzung nach hier nicht verwirklichen ließ, hat sich nun inzwischen herausgestellt, daß der kommutative Aufbau:

1) Definition des a-Idealsystems nach Prüfer
2) Konstruktion der Idealbrüche (bzw. der Funktionale)
3) Identitätsbeweis des a- und b-Systems mit Hilfe der Idealbrüche bzw. Funktionale

im Nichtkommutativen wieder durch eine ganz andere Methode ersetzt werden muß. Zur Erläuterung dieser neuen Methode bitte ich Sie, die beiliegende Bemerkung durchblättern zu wollen. Diese Bemerkung ist vorläufig nicht zur Veröffentlichung bestimmt, sie soll nur versuchen, Ihnen darzulegen, daß diese Methode, deren Grundgedanke in § 6[47] meiner Arbeit enthalten ist, durchaus verschieden von den Methoden meiner Dissertation ist. Denn ich werde sagen dürfen, daß die

[45] See Lorenzen 1950, §§ 1–3.
[46] See Lorenzen 1950, § 4.
[47] See Lorenzen 1950, § 6.

Erkenntnis, daß solche Sätze wie die bewertungstheoretischen Fundamentalsätze mit rein halbordnungstheoretischen Mitteln zu erhalten sind, durchaus nicht im Gedankenkreis meiner Dissertation zu finden ist.

Als dritte „neue Methode“ hat meine Arbeit den Satz 3 der beiliegenden Blätter aufzuweisen, dessen Anwendung auf halbgeordnete Gruppen der Teil 2 meiner Arbeit durchführt.

Aufgrund dieser Ergebnisse – und gerade weil die entscheidenden Methoden von meiner Dissertation völlig abweichen trotz der gleichen Fragestellung – habe ich vor gut einem halben Jahre Ihnen mitgeteilt, daß ich glaubte, die Arbeit nun abschließen zu können. Wenn ich die Angelegenheit dann etwas überstürzte, so bitte ich das entschuldigen zu wollen, weil mir ausgerechnet mein militärischer Kursus dazwischen kam.

Mit den ergebensten Grüßen und nochmaligem Dank für die Mühe, die Sie sich in meiner Sache geben, verbleibe ich

[Ihr Paul Lorenzen][48]

---

[48]In a letter to Scholz dated 5 May 1944, Lorenzen gives an account of this writing, “die darlegt, daß gewisse Fundamentalsätze der Krullschen Bewertungstheorie nicht nur für halbgeordnete Gruppen gelten, sondern sogar für beliebige halbgeordnete Mengen.

“Allerdings zweifle ich daran, ob gerade dieses Ergebnis, das der neuen Methode meiner Arbeit zu danken ist, sich dazu eignet, die Meinung von Herrn Prof. Krull zu meinen Gunsten zu wenden.

“Ich versuche, diese Fatalität in stoischem Sinne zu ertragen, es ist mir dabei aber ein schöner Trost, Ihnen darüber schreiben zu dürfen.”

On 26 May 1944, he addresses the following letter to Scholz.

Wesermünde, 26.5.44

Sehr geehrter Herr Professor,

Dieses darf ich Ihnen zunächst sagen, daß ich immer davon überzeugt bin, daß „man in Münster“ wirklich an mich denkt – und nicht nur denkt.
Trotzdem hätte ich es gern vermieden, Ihnen mit meiner Habilitationsangelegenheit explizit lästig zu fallen, weil ich annehmen muß, daß Sie genug anderes zu tun haben. Auf Ihren Brief vom 22/5, kann ich jetzt aber Ihre Hilfe nicht mehr ausschlagen – und darf Ihnen also versichern, wie sehr mir eine solche Hilfe gelegen kommt.
Herr Prof. Krull hat mir noch nicht geantwortet, vielleicht ist mein letzter Brief gar nicht angekommen.

Herrn Prof. Köthe habe ich schon in Würzburg versucht, meine Theorie vorzutragen – es war aber kaum ausreichend Zeit.
Ich lege noch eine „Bemerkung“ bei, die eine Fortführung des § 6 meiner Arbeit ist, ohne jedoch diese vorauszusetzen. Da diese Bemerkung rein halbordnungstheoretisch ist, wäre ich Ihnen auch für Ihr Urteil sehr dankbar.

Würden Sie Herrn Prof. Köthe wohl mitteilen, daß mein Vortrag in Würzburg den Inhalt von § 3 zum Gegenstand hatte? Die Neuerungen gegenüber der kommutativen Theorie liegen in § 4 und § 6.

Ich werde für jedes Urteil dankbar sein, denn wie sollte ich sonst lernen, was man in dieser Welt als „gut“ bezeichnet.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich
Ihr [Lorenzen]

Die fehlenden Anmerkungen werde ich Ihnen in den nächsten Tagen nachsenden.

29.05.1944. Postcard from Krull to Lorenzen.

Sonderführer Dr.
Paul Lorenzen
23 Wesermünde
Hafenstr. 92

Lieber Herr Lorenzen! Greifswald, 29.5.44

Endlich komme ich dazu, Ihren Brief vom 25.4. zu beantworten. Ich wollte mir zunächst Ihr beigelegtes Manuskript ansehen, und dazu fand ich erst jetzt während der Pfingsttage Zeit. Am besten hat mir Ihr Brief selber gefallen, da sagen Sie am klarsten, worauf es ankommt. An Ihrem Manuskript ist wieder das störende, dass nicht zu sehen ist, was für einen Vorteil man aus der Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Bewertungstheorie auf bel. Halbordnungen und aus Ihrer Umformung des Kriteriums für „ganz abgeschlossen“ gewinnt. So bleibt immer das Gefühl, ob nicht der umständliche Weg in keinem rechten Verhältnis zum Endergebnis steht, und das ist das gleiche bei diesem nicht für die Veröffentlichung bestimmten Manuskript ebenso wie bei Ihrer geplanten Habilitationsschrift. Ich halte es nun durchaus für möglich, dass das mehr ein Mangel der Darstellung ist, Sie wissen irgendwie aus Ihren Ideen nicht das zu machen, was man aus ihnen herausholen könnte. Aber das ist leider ein Punkt, den man schriftlich kaum richtig klären kann, wir müssten uns einmal sehr gründlich über alle Einzelheiten aussprechen, und dazu ist gerade augenblicklich leider keine Möglichkeit gegeben. Ich bedauere das vor allem deshalb, weil Sie nach meiner Ansicht den Inhalt Ihrer ursprünglich als Habilitationsschrift gedachten Untersuchungen veröffentlichen sollten, weil ich aber befürchte, dass in der vorliegenden Form die Arbeit nicht geeignet ist, Sie, wie es doch sein sollte, einem gewissen Kreis von Fachgenossen wirklich bekannt zu machen. Es wäre da zunächst eine sehr gründliche Umarbeitung nötig (starke Straffung, ev. Zweiteilung, an anderer Stelle wieder Erweiterung), und dabei würde ich Sie gerne beraten. Aber wir werden uns eben damit abfinden müssen, dass im Augenblick eine derartige Zusammenarbeit, die mündliche Besprechungen erfordert, nicht möglich ist. Seien Sie aber überzeugt, dass ich Ihnen wirklich gerne helfen möchte.

Mit den besten Grüßen Heil Hitler!
Ihr Wolfgang Krull.[49]

[49] In a letter dated 2 June 1944, Lorenzen gives an account of this letter to Scholz and writes: “Da er von meiner Habilitation aber nichts mehr schreibt, will ich es noch ein letztes Mal versuchen, um seine Zustimmung zu bitten. Aber wird es was nützen? Darf ich Sie trotzdem bitten, Herrn Prof. Köthe das ‘Hasse-Exemplar’ einschließlich der Bemerkung mit den beiliegenden Anmerkungen zu schicken. Das neue Exemplar stelle ich ganz zu Ihrer Verfügung.”

Then, in an undated letter, he writes: “Für Ihre so schnelle Vermittlung zu Herrn Prof. Köthe bin ich Ihnen sehr dankbar, – – ebenso auch für Ihr Gedenken bei unserm Angriff, bei dem unsere Wohnung immerhin so beschädigt wurde (wenn sie auch noch integrierbar sein wird), daß

06.06.1944. Letter from Lorenzen to Krull.

Dr. Paul Lorenzen (23) Wesermünde, den 6.6.44
Hafenstr. 92

Sehr geehrter Herr Professor,

für Ihre Karte von 29.5. danke ich Ihnen sehr, obwohl sie mir eine sehr ernste Enttäuschung bereitet, indem als wesentlicher Mangel meiner Arbeit jetzt die Umständlichkeit des Verfahrens bezeichnet wird.

Dabei ist gerade die Vereinfachung und Klärung der Beweismethoden das eigentliche Hauptziel meiner Arbeit. Ich habe nicht versucht, die Sätze der multiplikativen Idealtheorie um jeden Preis zu verallgemeinern, auch um den Preis einer Komplizierung – sondern mir liegt im Gegenteil nur daran, die Grundgedanken der Beweismethoden in ihrer letzten Einfachheit zu erkennen. Wenn ich z. B. den Bewertungsbegriff ersetze durch einen "Homomorphismus eines Halbverbandes in eine geordnete Menge", so sehe ich darin nämlich eine begriffliche Vereinfachung, und nicht etwa eine Komplizierung. Denn die Einführung des Bewertungsbegriffs (z. B. die zunächst willkürliche Dreiecksungleichung) rechtfertigt sich nur durch den späteren Erfolg, der Homomorphiebegriff trägt dagegen seine Berechtigung in sich selbst. Ich würde sagen, daß der Homomorphismus in eine Ordnung der „reine Begriff" ist, der dem Bewertungsbegriff zugrunde liegt. Und der zugrundeliegende, reine Begriff scheint mir unbestreitbar der einfachere zu sein.

Wenn ich mich in diesem Punkte irren sollte, so bitte ich Sie aufs dringendste darum, es mir sagen zu wollen, weil es nämlich bei meiner ganzen mathematischen Arbeit bisher immer mein Bestreben war, diese zugrundeliegenden, reinen Begriffe selbst in ihrer einfachen und durchsichtigen Klarheit ans Licht zu bringen.

In dieser Tendenz der begrifflichen Klärung unterscheidet sich die Arbeit ebenfalls grundsätzlich von meiner Dissertation. Daß in dieser Klärung, in dem Verständnis der inneren Bedeutung, wie Sie es einmal nennen, die vordringlichste Aufgabe liegt, das ist mir nämlich erst in den letzten Jahren wirklich bewußt geworden.

Der Wert einer solchen begrifflichen Erkenntnis liegt m. E. vor allem in sich selbst. Nur in zweiter Linie kommt die Vereinfachung in Frage, die sich ergibt, wenn man die reinen Begriffe auf den ursprünglichen Spezialfall anwendet. (Z. B. wird der Beweis des bewertungstheoretischen Fundamentalsatzes fast trivial: Gilt für kein $z_1, \ldots, z_n \quad a \in \mathfrak{a}\mathfrak{I}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$, so gibt es einen maximalen Oberring $\mathfrak{B}$

---

zunächst meine Frau mit Jutta in ein Dorf der Sächsischen Schweiz abgereist ist, und ich ein 'möbliertes Zimmer' erworben habe.

"Ich werde Herrn Prof. Köthe Genaueres schreiben, werde ihm aber darin recht geben müssen, daß es leicht möglich ist, daß Herr Prof. Krull nicht erbaut sein wird – – sondern eine Einmischung jedem Beteiligten sehr übelnehmen wird. Daher werde ich Herrn Prof. Köthe dankbar sein, wenn er Ihnen oder mir sein Urteil mitteilen wird."

mit dieser Eigenschaft. Aus $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}[z^{\pm 1}]$ folgt

$$a \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}[z^{+1}, x_1^{\pm 1}, \ldots, x_r^{\pm 1}] \text{ und } a \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}[z^{-1}, y_1^{\pm 1}, \ldots, y_s^{\pm 1}]$$

also $a \in \mathfrak{a}\mathfrak{B}[z^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, \ldots, y_s^{\pm 1}]$. Widerspruch!)[50]

Ebenso ist es eigentlich nur ein Nebenergebnis, daß die Sätze jetzt auch im Nichtkommutativen gelten. Im Vordergrund steht stets die Erkenntnis der reinen Begriffe.

Ich bin natürlich weit davon entfernt, zu behaupten, daß diese Auffassung der Mathematik die richtige sei, aber daß sie eine berechtigte Auffassung ist, werde ich behaupten dürfen.

Wenn allerdings an dieser Auffassung meine Habilitation scheitern sollte, so will ich mich bemühen, mir eine gegenteilige Auffassung zu eigen zu machen, soweit das möglich ist.

Ich darf mich mit diesem Anliegen meiner Habilitation noch einmal an Sie wenden, da Ihnen ja nichts daran gelegen sein kann, mich einfach vor ein unabänderliches und auswegloses Nein zu stellen.

Die Gründe, die Sie meiner Habilitation entgegenhalten, daß ich nichts Wesentliches bisher veröffentlicht habe, daß meine Arbeit in Richtung der Dissertation liegt und daß sie ungerechtfertigt umständlich ist, kann ich – mit Ausnahme des letzten – nicht leugnen. Aber ich darf Sie bitten, auch die Bedingungen zu berücksichtigen, unter denen ich stehe: daß es mir nicht möglich war, ein neues Arbeitsgebiet ohne Literatur und Anregung (und ohne ausreichend Zeit) wirklich zu erschließen. Wenn ich die Gewißheit hätte, den Krieg abwarten zu können, so brauchte mir jetzt nicht so viel an meiner Habilitation gelegen zu sein. Ich würde die zuversichtliche Hoffnung haben, es nach dem Kriege zu schaffen – aber wer weiß, ob und wann wir normale Nachkriegszeiten erleben werden. Die Berufsausbildung, das Erreichen eines Abschlußes wird ja darum bei allen übrigen, wenn irgend möglich so gefördert. Es ist mir ja auch nicht nur praktisch unmöglich, einen anderen Beruf zu ergreifen, ich sehe vor allem aufgrund meiner Veranlagung keine Möglichkeit dazu, da eigentlich alle meine Gedanken und Bestrebungen sich ausschließlich auf die mathematische Erkenntnis richten.

Als eine besondere Härte muß ich die Nichtabgeschlossenheit meiner äußeren Berufsausbildung deshalb empfinden, weil mir dadurch auch in meinem gegenwärtigen Dienst mehrere Möglichkeiten abgeschnitten sind, die an die Bedingung der Habilitation geknüpft sind.

Was den zweiten Hinderungsgrund anbetrifft, daß meine Arbeit der Dissertation gegenüber nicht neu ist, so darf ich hier noch einmal wiederholen, daß die entscheidenden Methoden der Dissertation (a-Ideale für Halbgruppen, Idealbrüche, t-Ideale) weder explizit noch implizit in meiner Arbeit eine Rolle spielen.

[50] See Lorenzen 1950, p. 489, reproduced on page 25 and translated on page 21.

Ich bitte Sie darum, dieses Ihren Gründen gegenüber halten zu wollen, und verbleibe mit den ergebensten Grüßen

Ihr [Paul Lorenzen]

22.06.1944. Letter from Krull to Lorenzen.

Greifswald, 22.6.44.

Lieber Herr Lorenzen!

Es fällt mir nicht ganz leicht, Ihren letzten Brief zu beantworten, denn ich muss Ihnen voraussichtlich noch einmal eine Enttäuschung bereiten. Zuerst: Seien Sie überzeugt, dass ich recht habe, wenn ich Ihre grosse, 53 Seiten lange Arbeit in ihrer derzeitigen Form für gründlich verfehlt erkläre. Ich glaube Ihnen gerne, dass wirklich neue Gesichtspunkte gegenüber Ihrer Dissertation drin stecken und ich erkenne auch Ihr Streben nach äusserster begrifflicher Klarheit grundsätzlich durchaus an. Aber gerade eine solche Klarheit, die sich auch in einer durchsichtigen Form der Darstellung äussern müsste, vermisse ich in Ihrer Arbeit durchaus. Und es langt nicht, dass Sie sich selbst über etwas klar sind, Sie wollen und müssen es auch den andern ebenso klar machen, darauf kommt es an. Schon das letzte Mal schrieb ich Ihnen, im Einzelnen müsse man sich über diese Dinge mündlich aussprechen. Wenn ich aber Ihnen schriftlich einen Rat geben soll, so kann es nur etwa der sein: Versuchen Sie doch einmal den Inhalt Ihrer Arbeit auf 20-25 Seiten zusammen zudrängen, aber so, dass Sie an den wirklich wesentlichen Stellen sich nicht scheuen deutlich zu sagen, was Sie wollen und nicht etwa hinter ein paar formalen Rechnungen die Gedanken verstecken. Ich denke, das müsste gehen, wenn es Ihnen auch zunächst unmöglich erscheint, und so kämen Sie dann vielleicht zu einer Arbeit, die wirklich geeignet wäre, Ihren Namen bekannter zu machen. Das wäre die nächste Aufgabe, die ich Ihnen stellen möchte, denn ich will natürlich nicht, dass Ihnen das, was Sie sich da alles überlegt haben, verloren geht. Und dann später ein neues, wenn möglich auf speziellere Anwendungen (etwa das Nichtkommutative) zugeschnittenes Problem angepackt! Denn mit dieser Arbeit allein lasse ich Sie noch nicht zur Habilitation zu, dabei bleibe ich, – wie ich überzeugt bin, in Ihrem eigenen Interesse. Die Habilitation ist kein Abschluss einer Laufbahn, eine „abgeschlossene Hochschulausbildung“, wie sie z. B. auch für die höhere Wehrmachtsbeamtenlaufbahn gefordert wird, haben Sie als Promovierter schon längst. Und – entweder geht der Krieg einigermassen anständig aus, wie wir alle hoffen, dann werden Sie auch Ihre Arbeit für die Habilitation als Assistent in Ruhe in Angriff nehmen können, – oder, ja ich glaube, Sie sind sich nicht klar, dass es dann mit einer Hochschullaufbahn für Sie ohnehin alle wäre. Ein à la Baisse-Spekulieren kann und darf es heute bei niemandem geben. – Schliesslich, um es nochmal zu sagen: Die Habilitation ist nicht ein Abschluss, sondern ein neuer Anfang, gewissermassen als Gesellenstück für eine Laufbahn, die zu betrachten letzten Endes nur dann Sinn tut, wenn man einigermassen Gewissheit hat, dass man es irgendwann auch zum Meister bringt. Und so weit sind Sie eben noch nicht, wobei Ihnen gerne zugegeben sei, dass Sie unter den Kriegsbedingungen so gehemmt sind, dass niemand Ihnen deswegen einen Vorwurf machen dürfte. Aber es wäre unverantwortlich von mir, Ihnen jetzt schon das Tor zu öffnen, wo ich mir noch längst kein genügend sicheres Bild über Ihre zukünftige Weiterentwicklung machen kann.

Mit den besten Grüssen und Heil Hitler!

Ihr Wolfgang Krull.[51]

16.07.1944. Postcard from Krull to Lorenzen.

Reg.Rat Prof. Krull
Greifswald
Mar[ine]obs.

Herrn Dr.
Paul Lorenzen
23 Wesermünde
Elbestr. 42I.

Lieber Herr Lorenzen! Greifswald, 16.7.44

Vor allem diesmal die Versicherung, dass es mir aufrichtig leid getan hat, dass Sie jetzt auch vom Bombenspuk betroffen wurden. Ein Glück wenigstens, dass offenbar Ihre Angehörigen keinen Schaden genommen haben. Hoffentlich ist Ihnen nicht allzuviel von eigenen Sachen zerstört worden. Oder hatten Sie überhaupt wirklich gewohnt? Aus der Bemerkung, Sie hätten sich jetzt ein möbliertes Zimmer genommen, glaube ich leider auf das Gegenteil schliessen zu müssen. – Zu Ihrer Arbeit

[51] In a letter to Scholz dated 28 June 1944, Lorenzen writes: "Heute habe ich die endgültige Absage von Herrn Prof. Krull erhalten, da 'meine Arbeit die begriffliche Klarheit durchaus vermissen läßt', und es 'unverantwortlich wäre, mir schon jetzt das Tor (zum Dozenten) zu öffnen'.

"Herrn Prof. Köthe habe ich geschrieben, er möchte zunächst mir sein Urteil mitteilen, da Herr Prof. Krull in der Tat vermutlich nicht erbaut sein würde über eine direkte Einmischung."

On 9 July, he writes: "ich darf Ihnen versichern, wie dankbar ich Ihnen dafür bin, daß Sie sich so um mich kümmern. Für Ihre ermutigenden Worte danke ich Ihnen besonders. Wenn ich auch nicht im geringsten das Gefühl habe, durch das Urteil von Herrn Prof. Krull 'umgeworfen' zu sein, so sind mir Ihre Zeilen doch sehr wohltuend gewesen. Und gerade kam auch ein ebenso wohltuender Brief von Herrn Prof. Köthe, der sich damit einverstanden erklärt, Herrn Prof. Krull gegenüber als Referent zu fungieren, und mir sogar ein positives Urteil zusagt. Auch für die Worte von Herrn Prof. Peschl bin ich sehr dankbar.

"Trotzallem muß ich die Absicht, mich zu habilitieren, zunächst fallen lassen, da ich es für völlig ausgeschlossen halte, daß sich jetzt noch eine Meinungsänderung bei Herrn Prof. Krull vollziehen wird (sodaß ich Herrn Prof. Köthe gar nicht als Referenten nennen können werde) und an eine neue Arbeit ist nicht zu denken, weil Herr Prof. Krull darauf besteht, die vorliegende Arbeit erst gründlich umzuarbeiten – obwohl mir diese jetzt gründlich verleidet ist, und ich eigentlich nur den Wunsch habe, endlich einmal etwas anderes zu machen, als immer irgendwelche Halbordnungen. Wie ich aus diesem Dilemma herauskommen werde, weiß ich noch nicht.

. . . .

"Zum Schluß bitte ich noch, Herrn Prof. Köthe die Anmerkungen zu meiner Arbeit schicken zu wollen – – ich habe keine mehr, und meine Frau ist ja leider auch nicht da. Prof. Köthe hat um die Anmerkungen gebeten."

möchte ich Sie immer wieder daran erinnern, dass Sie stets bedenken müssen, dass Sie jetzt im Kriege nicht unter normalen Bedingungen schaffen, und dass Sie sich also nicht deprimieren lassen dürfen, wenn Sie noch nicht so weit gekommen sind, als Sie sich vorgestellt hatten. Persönlich bedaure ich es vor allem, dass ich mit Ihnen nicht mündlich öfter Ihre Untersuchungen durchsprechen kann. Nur auf diese Weise könnte ich Ihnen wirklich helfen, wie ich es gerne täte. Aber augenblicklich ist da eben leider keine Gelegenheit dazu.

Mit den besten Grüssen
Ihr Wolfgang Krull.

01.10.1944. Postcard from Krull to Lorenzen.

Reg.Rat Prof. Krull
4 Greifswald
Mar[ine]obs.

Sonderführer Dr.
Paul Lorenzen
23 Wesermünde
Marinefachschule

Greifswald, 1.10.44

Lieber Herr Lorenzen!

Heute bin ich endlich dazu gekommen, Ihre ausführliche Inhaltsskizze durchzulesen. Entschuldigen Sie also bitte, dass ich Ihnen den Empfang erst heute bestätige. Ihre eigentliche Schrift werde ich Ihnen in den nächsten Tagen zusenden. In den letzten Wochen hatte ich es unter den verschiedensten Abhaltungen einfach vergessen. Was Sie mir diesmal zuschickten, war entschieden ein Fortschritt. Ich habe nur immer noch das Gefühl, dass man die Sache noch wesentlich kürzer und klarer sagen kann. Aber das sind eben Dinge über die man sich mündlich aussprechen müsste. Schriftlich gibt es zu leicht Missverständnisse. Ich würde mich aber auch an Ihrer Stelle im Augenblick garnicht an diese Aufgabe der Herstellung eines „wirksamen“ Manuskripts halten. Arbeiten Sie doch lieber etwas über das bisherige hinaus! Was mir immer noch zweifelhaft erscheint, ist die Frage, wie weit Sie wirklich das <u>Nicht</u>kommutative erledigt haben. Mein Eindruck war, dass bei Ihnen auch im Nichtkommutativen sehr viel an „Vertauschbarkeitsforderungen“ drin steckt, so dass man hierbei von einem „halbkommutativen“ Fall reden könnte. Wenn es Ihnen gelänge diese Bedenken zu zerstreuen, schiene mir das ein grosser Fortschritt.

Mit den besten Grüssen
Heil Hitler! Ihr Wolfgang Krull.

G. A postcard from Lorenzen to Hasse, 1945.

25.07.1945. Postcard from Lorenzen to Hasse.

Dr. Paul Lorenzen	Herrn
Bad Pyrmont	Prof. Dr. H. Hasse
Bahnhofstr. 8	Göttingen
German	Math. Sem. d. Univers.

[Antw. 1.8.45] 25/7

Sehr geehrter Herr Professor,

In der Hoffnung, daß Sie das Kriegsende glücklich überstanden haben, erlaube ich mir, Ihnen zu schreiben. Ich bin zur Zeit hier in Bad Pyrmont gut aufgehoben – – von Bonn habe ich noch keine Nachricht. Dürfte ich Sie um eine Mitteilung bitten, wenn Ihnen über den Verbleib von Herrn Prof. Krull etwas bekannt ist. Auch von Herrn Prof. Scholz, Herrn Ackermann und Herrn Gentzen, denen ich noch im Kriege geschrieben habe wegen einer neuen Methode für Widerspruchsfreiheitsbeweise habe ich keinerlei Nachricht.

Mit den ergebensten Grüßen verbleibe ich

Ihr

Paul Lorenzen

H. Documents relating to Lorenzen's career, 1945–1946.

02.09.1945. Report by Lorenzen on his political attitude.

Dr. Paul Lorenzen

Wissenschaftl. Assistent am
Mathemat. Seminar der Universität Bonn.

<u>Bericht über meine politische Einstellung</u>

Ich bin 1915 geboren und ging noch zur Schule, als Hitler an die Macht kam. In meinem Elternhaus bin ich politisch liberal erzogen worden und in den letzten Jahren antinationalsozialistisch, da mein Vater Freimaurer war. Ich selbst missbilligte am Nationalsozialismus am schärfsten die chauvinistischen und antisemitischen Tendenzen.

Nach dem Abitur habe ich zunächst ein halbes Jahr Arbeitsdienst abgeleistet. Im Herbst 1933 begann ich mein Studium und musste mich – ehe die Immatrikulation möglich war – zum Eintritt in die SA und in den NSDStB melden. Wegen meines passiven Widerstandes gegen den SA-Dienst bin ich dort nie Scharführer oder Ähnliches geworden.

Vom Herbst 1934 bis 1935 leistete ich ein Jahr aktiven Militärdienst ab, da die zweijährige Dienstpflicht drohte. Seit dieser Zeit bin ich entschiedener Antimilitarist und bin auf Grund dieser Einstellung während des Krieges erst im letzten halben Jahr Unteroffizier geworden.

Nach der Dienstzeit setzte ich mein Studium fort. 1936 wurde ich volljährig und trat aus der evangelischen Kirche aus. Dieser Austritt geschah nicht aus politischen Gründen, sondern auf Grund der Überzeugung, dass ich, wenn ich wahrhaftig sein wollte, mich nicht als gläubigen Christen bezeichnen konnte – und daher der Kirche nicht angehören dürfte.

1937 musste ich als Mitglied der SA in die Partei eintreten. Auch dort habe ich niemals ein Amt innegehabt. 1939 wurde ich Assistent am Mathematischen Seminar in Bonn und Anfang 1940 zum Heer eingezogen. Später aber kam ich zur Marine, wo ich seit 1942 als Mathematiklehrer in Wesermünde an der Marineschule tätig war, bis ich im Januar 1945 an die Marineschule Flensburg versetzt wurde.

Meine Frau, die ich 1939 heiratete, stammt aus einer streng kirchlichen Familie, war aktiv tätig für die Bekennende Kirche – und daher selbstverständlich Gegnerin des Nationalsozialismus. Sie war kein Parteimitglied.

Als Zeugen für meine Gegnerschaft führe ich Herrn Professor Scholz in Münster an, ferner Frau Dr. K. Wolff, Bonn, Luisenstr. 3, bei der ich seit 1939 wohnte. Frau Wolff ist die Witwe eines jüdischen Arztes.

Bonn, den 2. September 1945

Lorenzen

03.09.1945. Military government of Germany Fragebogen: chronological record of full-time employment and military service.

29. Give a chronological account of your employment and military service beginning with 1st of January 1931, accounting for all promotions, or demotions, transfers, periods of unemployment, attendance at educational institutions (other than those covered in Section B) or training schools and full-time service with para military organizations. (Part time employment is to be recorded in Section F.) Use a separate line for each change in your position or rank, or to indicate periods of unemployment or attendance at training schools or transfers from one military or para military organization to another.

29. Geben Sie in zeitlicher Folge eine Aufzählung Ihrer Beschäftigung und Ihres Militärdienstes seit dem 1. Januar 1931 an, mit Begründungen für alle Beförderungen oder Degradierungen, Versetzungen, Arbeitslosigkeit, Besuch von Bildungsanstalten (außer solchen, die bereits in B angeführt sind) oder Ausbildungsschulen, und Volldienst in militärähnlichen Organisationen (Nebenbeschäftigungen sind in Abschnitt F anzugeben). Benutzen Sie eine gesonderte Zeile für jeden Wechsel in Stellung oder Rang oder zur Angabe von Arbeitslosigkeits-Zeitabschnitten oder für den Besuch von Ausbildungsschulen oder für Versetzungen von einer militärischen oder militärähnlichen Organisation zu einer anderen.

From von	To bis	Employer and Address or Military Unit Arbeitgeber und Anschrift oder Militäranschrift	Name and Title of Immediate Superior or C. O. Name und Titel des Dienstvorgesetzten od. vorgesetzter Offz.	Position or Rank Stellung oder Dienstgrad	Duties and Responsibilities Art der Tätigkeit und Verantwortungsbereich	Reasons for Change of Status or Cessation of Service Grund für Änderung oder Beendigung des Dienstverhältnisses
Apr. 33	Sept. 33	Student. Arbeitslager	unbekannt	Arbeitsmann	Erdarbeit	Beginn des Studiums
Nov. 34	Okt. 35	reit. Artl. Abt. Verden	Hpt. Bamler	Kanonier	Stalldienst	Ende der Dienstverpflichtg.
Okt. 38	Juli 39	Universität Göttingen	Prof. Dr. Hasse	Stipendiat	Hilfsassistententätigkeit	Anstellung in Bonn
Aug. 39	gegwtg.	Universität Bonn	Prof. Dr. Krull	Assistent	Assistententätigkeit	
Jan. 40	Juli 40	38503 C	unbekannt	Gefreiter	Rechner	Kommandierung
Juli 40	Apr. 41	O. K. M.	Reg.rat Tranow	"	Schreiber	"
Apr. 41	Juli 41	Steuerm.schule Gotenhafen	Kaptl. Götz	"	"	"
Jul. 41	Jan. 42	M. N. O. Borkum	Kaptl. v. Lom	"	"	"
Jan. 42	Nov. 44	Mar.schule Wesermünde	Kapt. Köllner	Sonderf. (Feldwebel)	Mathematiklehrer	"
Nov. 44	Jan. 45	Mar. Schütz. Btl. 306	Kpt. Arlt	Unteroffizier	Schreiber	"
Jan. 45	Febr. 45	Mar.schule Flensburg	Kpt. Lüth	"	keine	"
Febr. 45	Apr. 45	8. M. E. A. Norden	unbekannt	"	Erdarbeit	

06.09.1945. Certificate by Ernst Peschl on Lorenzen's political attitude.

Prof. Dr. Ernst Peschl
Bonn, Arndtstr. 2.

Bonn, den 6.9.45.

An den Prüfungsausschuß der Universität in Hdn von Herrn Prof. H. von Weber

Bonn
Sternwarte.

Betrifft: Politische Einstellung des Herrn
Dr. Paul Lorenzen, geb. 24.3.15,
pl. Assistent am Math. Seminar d. Univ.

Ich kenne Herrn Dr. Lorenzen vor allem aus der Zeit vom August 39 bis zu seiner Einziehung zur Wehrmacht Anfang 40. In dieser Zeit hatte ich ausgiebig Gelegenheit mich mit ihm eingehend zu unterhalten, da ich ihn fast täglich sah. Aber auch vor dieser Zeit (36/37) wie auch nachher traf ich ihn aus Anlaß der Jahresversammlungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und hatte dabei ebenfalls längere Unterhaltungen mit ihm. Ich glaube ihn daher eingehendst zu kennen, zumal er seiner ganzen Veranlagung nach ein offener absolut aufrichtiger Charakter ist.

Er ist ein sehr kritischer Mensch und hatte vom ersten Augenblick seiner Fühlungnahme mit mir an stärkste Ausdrücke (meist sehr sarkastischer Art) der völligen Ablehnung des Nationalsozialismus und der Person Hitlers und aller seiner Trabanten geäußert. Dies entsprach auch seiner ganzen inneren Haltung. Desgleichen lehnte er jede Form von Militarismus scharf ab.

Auch sein mir bekannter Kirchenaustritt im Jahre 37 hat gar nichts mit politischen Motiven zu tun. Es war lediglich die aufrichtige Schlußfolgerung aus der Haltung eines philosophischen Agnostizismus, die sich nach langem ehrlichen Ringen um erkenntnistheoretische Fragen bei ihm herausgebildet hatte. Jede Feindseligkeit gegen religiöse Überzeugungen ist ihm völlig fremd. Im Gegenteil hat er eine Frau aus streng religiöser Familie der evangelischen Bekenntniskirche geheiratet.

Prof. Dr. Ernst Peschl.[52]

14.09.1945. Certificate by a board of examiners.

In der Prüfungssache

des Assistenten am Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Seminar der Universität Bonn Dr. Paul Lorenzen

erstattet der Prüfungsausschuss bestehend aus den Professoren von Weber, Fitting und Troll in seiner Sitzung vom 14.9.1945 folgendes

Gutachten.

Lorenzen, geboren 1915, trat mit Beginn seines Studiums der SA und dem NSDStB bei. 1937 wurde er in die Partei übernommen. Er ist ein Schüler von Professor Scholz in Münster. Seine Haltung war eindeutig antinationalsozialistisch, wie auch das beiliegende Zeugnis von der Witwe des jüdischen Arztes Wolff bezeugt. Für die Partei hat er sich niemals betätigt.

Lorenzen ist nur formales Parteimitglied. Der Ausschuss befürwortet seine Belassung in seiner bisherigen Stellung.

von Weber

1 Anlage

13.08.1946. Notification on Lorenzen's inaugural lecture of 9 August 1946.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität **Bonn, den** 13. August 1946

J.-Nr. 864

An
den Herrn Oberpräsidenten der Nordrheinprov.
Düsseldorf
durch Se. Magnifizenz, den Herrn Rektor
der Rheinischen Friedr.-Wilh.-Universität,

Namens der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn teile ich ergebenst mit, dass die Mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät Herrn

[52] Ernst Peschl (1906–1986) is professor of mathematics in Bonn. See Segal (2003, pages 461–462) on his attitude towards national socialism.

Dr. Paul Lorenzen[53]

nach am 9.8.1946 gehaltener Antrittsvorlesung über:

„Über den Verbandsbegriff“

als Privatdozent für Mathematik zugelassen und die venia legendi verliehen hat.

gez. Reichensperger
Dekan

I. A letter from Krull to Scholz, 1953.

18.04.1953. Letter from Krull to Scholz.

Lieber Herr Scholz! Bonn, 18.4.53.

Was Sie mir über Lorenzen schrieben, hat mich sehr gefreut. Ich schätze seine Arbeiten zur Begründung der Analysis ausserordentlich hoch. Ich hatte bei dem Arbeiten mit dem Überabzählbaren, insbesondere mit dem Wohlordnungssatz, immer das Gefühl man benutzt da Fiktionen, die eines Tages durch vernünftigere Begriffsbildungen ersetzt werden müssen. Aber ich regte mich darüber nicht auf, weil ich überzeugt war, dass bei vorsichtiger Anwendung der geläufigen „Fiktionen“ nichts Falsches herauskommt, und weil ich mit Sicherheit auf den Mann rechnete, der eines Tages alles in Ordnung brächte. Lorenzen hat nun nach meiner Überzeugung den richtigen Weg gefunden, und das ist allein schon eine Leistung, für die er ein Ordinariat verdiente. – Es ist mir nun eine grosse Befriedigung, dass auch Sie, – wenn auch unter einem etwas anderen Blickwinkel als dem meinen, – von Lorenzen so viel halten.[54] Dass es für die mathematische Logik und Grundlagenforschung an der nötigsten Stellenzahl fehlt, ist auch meine Überzeugung. Ich bin also sehr gerne bereit, Sie bei einer Aktion, die die Vermehrung der einschlägigen Stellen anstrebte, aufs wärmste zu unterstützen. In Bonn selbst wird sich allerdings im Augenblick in dieser Hinsicht nichts tun lassen, da wir gerade um unser Extraordinariat bzw. Ordinariat für Angewandte Mathematik kämpfen, und man nur schrittweise vorgehen kann. Aber schreiben Sie mir doch bitte, wie Sie sich das Aktionsprogramm vorstellen. – Es tut mir sehr leid, dass Sie wieder so lange und

[53] In a letter to Scholz dated 7 June 1946, Lorenzen writes: “Herr Prof. Krull ist seit kurzem glücklicherweise zugelassen und hat sich mit meiner sofortigen Habilitation vollkommen einverstanden erklärt.”

The day after, he writes to him: “Welche Aussichten dann hier bestehen, darüber weiß ich nichts, aber ich vermute, daß ich hier irgendwie einen Lehrauftrag bekommen werde. Für dieses Semester habe ich – ausnahmsweise – einen Auftrag für eine Algebravorlesung bekommen.”

[54] Compare Krull’s letter to Hasse dated 15 August 1946 (Roquette 2004, § 1.95), in which he already expresses his appreciation of Lorenzen.

so schwer unter Magenkrämpfen litten. Hoffentlich bleiben Sie jetzt recht lange davon verschont!

Mit herzlichen Grüssen Ihr Wolfgang Krull

J. The correspondence between Hasse and Lorenzen, 1953–1963.

14.05.1953. Letter from Lorenzen to Hasse.

Prof. Dr. P. Lorenzen
Bonn, Luisenstr. 3 [Mein R. bespr. 3.7.53] Bonn, den 14.5.53

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

aus Freude und Dankbarkeit darüber, dass Sie in Ihrem Vortrag über Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht[55] auch einmal die menschliche Seite der Mathematik – die Empfindungen und Beweggründe, die uns gerade an diese Wissenschaft vor allen anderen binden (obwohl Sie betonen, dass Sie nur Ihre subjektive Einstellung darstellen, haben Sie doch zugleich für viele andere gesprochen) – ins Bewusstsein heben, erlaube ich mir, Ihnen zu schreiben.
Das von Ihnen zuerst behandelte Motiv: Mathematik als reinste Wissenschaft, als Prototyp unvergänglicher Erkenntnis, das ist wohl auch im Verlauf der bisherigen Geschichte – seit Thales und den Pythagoräern – das wirksamste Motiv gewesen. Gegenwärtig scheint sich dieses Motiv allerdings in einer besonderen Gefahr zu befinden. Die Geometrie, die doch bisher – wie ja offiziell auch heute noch – immer zur Mathematik gerechnet wurde, hat seit dem vorigen Jahrhundert den Charakter der absoluten Sicherheit verloren. Die Mathematik hat sich daher bezüglich der Geometrie auf Implikationen der Form: „wenn die und die Axiome gelten, dann gilt auch . . . “ zurückgezogen, also auf Aussagen, die kaum noch geometrisch zu heissen verdienen. Wenn ich Sie nicht missverstanden habe, verstehen Sie unter Mathematik den engeren Begriff, der nur Logik, Arithmetik und Analysis umfasst. Neben diesen konkreten Teilen der Mathematik würden dann die abstrakten Teile – also die axiomatischen Theorien der Algebra und Topologie – eine sekundäre Rolle spielen. Will man die Geometrie, eventuell zusammen mit der Mechanik nicht als ein eigenes Fach konstituieren, so wird man sie mit zur theoretischen Physik rechnen müssen. Gegenwärtig wollen nun manche sogar noch der Mathematik im engeren Sinne die unumstössliche Gültigkeit absprechen, also z. B. auch die Arithmetik auf Implikationen: „wenn die Peano-Axiome gelten, dann gilt auch . . . “ reduzieren.

[55] Hasse 1952.

Dann gäbe es keine Mathematik als Wissenschaft mehr, es gäbe nur noch formales Ableiten aus Axiomen, die aufgrund pragmatisch-empirischer Kriterien gewählt werden. Zieht man schliesslich die Logik mit in diesen Relativierungsprozess hinein, so würden auch noch die Regeln des formalen Ableitens aus Axiomen nur durch aussermathematische Kriterien zu gewinnen sein.
Ich wage, zu vermuten, dass es vor allem diese Gefahr ist, die Sie als Formalisierung eine inhärente Tragik der Mathematik nennen. Hier würde ich mir nun gern die Frage erlauben: ist diese Formalisierung zu unterscheiden von der „Formalisierung“, die in Ihrer Betrachtung über die Bedeutung einer klaren und prägnanten Bezeichnungsweise als eine Gefahr dargestellt wird? Die Existenzaussage auf p. 22 würde nach Ersetzung der logischen Partikeln durch Symbole, nämlich von

wenn, so	durch	$\rightarrow$
und	durch	$\wedge$
es gibt	durch	$\bigvee$
ist	durch	ε

lauten:

$$p \; \varepsilon \; \text{prim} \wedge p = 4n + 1 \;\; \rightarrow \;\; \bigvee_{x,y} \; p = x^2 + y^2.$$

Zur „Formalisierung“ der Eindeutigkeitsaussage könnte

es gibt genau ein durch $\overset{1}{\bigvee}$

ersetzt werden, und wir erhielten dann

$$p \; \varepsilon \; \text{prim} \wedge p = 4n + 1 \;\; \rightarrow \;\; \overset{1}{\bigvee}_{x,y} x < y \wedge p = x^2 + y^2.$$

Wenn man die logischen Symbole nur als prägnante Abkürzung für die umgangssprachlichen Partikel benutzt – ihnen also alle Inhaltlichkeit lässt, und die Aussagen jetzt nicht plötzlich als bedeutungslose Zeichenreihen behandelt – dann scheinen mir genau dieselben Gründe für diese Symbolik zu sprechen, die uns veranlasst haben, von:

„p ist die Summe der Quadrate von x und y“
zu $p = x^2 + y^2$

überzugehen. Könnte man der letzten Formel vorwerfen, dass sie dem Fluss der suggestiven Sprache Gewalt antut?
Dadurch, dass die logische Symbolik von Hilbert zu dem Zweck gebraucht ist, eine inhaltliche Theorie in einen axiomatischen Formalismus zu verwandeln, scheint mir die Möglichkeit eines inhaltlichen Gebrauches der logischen Symbole zu kurz gekommen zu sein.

Ich bitte Sie herzlich, diese Bemerkungen nicht als Propaganda für die Logistik auffassen zu wollen – ganz im Gegenteil, es ist ja gerade die Logistik, die das inhaltliche Denken verkennt – ich würde mich aber freuen, wenn Sie diesen Brief als einen Ausdruck meiner Dankbarkeit annehmen wollen, dafür, dass Sie die geistigen Schmerzen eines „deutschen Aufsatzes“ nicht gescheut haben, um einmal zur Besinnung auf unser Tun aufzurufen.

Mit den ergebensten Grüssen bin ich

Ihr

Paul Lorenzen

05.06.1953. Letter from Hasse to Lorenzen.

5. Juni 1953

Prof. Dr. H. Hasse
Ahrensburg i. H.
Hamburgerstr. 43

Lieber Herr Lorenzen,

es ist sehr freundlich von Ihnen, dass Sie solches Interesse an meinem kleinen Büchlein genommen haben. Es fehlt mir jetzt mitten im Semesterbetrieb leider die Zeit, mich zu den von Ihnen gemachten Bemerkungen zu äussern. Da ich aber voraussichtlich noch im Laufe dieses Semesters nach Bonn kommen werde, können wir dann vielleicht einmal mündlich darüber sprechen.

Mit herzlichen Grüssen
Ihr [Hasse]

09.06.1953. Letter from Lorenzen to Hasse.

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

für die freundliche Aufnahme meines Briefes zu Ihrem „Büchlein“ danke ich Ihnen sehr. Wenn Ihr Plan, nach Bonn zu kommen, sich verwirklichte, wäre das sehr schön. Wenn Ihre Zeit nicht allzu knapp sein wird, darf ich Sie vielleicht für eine kurze Zeit bitten, bei uns sein zu wollen.

Mit den ergebensten Grüßen
bin ich stets Ihr
Paul Lorenzen.

Bonn, 9.6.53
Luisenstr. 3

July 1959. Letter from Lorenzen to Hasse.

[P. Lorenzen, Juli 1959]

<u>Sätze</u> [Hasse J f M 152 (1923)]

$$p \equiv 1 \bmod 4,\ q \equiv 1 \bmod \overset{4}{\cancel{2}},\text{[56]} \left(\frac{q}{p}\right) = -1 \ \rightarrow\ \bigwedge_{\text{rat}}{}_t \,.\, \Phi(p,q,t) \leftrightarrow t\ p\text{-}q\text{-ganz.}$$

$$p \equiv 3 \bmod 4,\ q = 2 \qquad\qquad \rightarrow\ \bigwedge_{\text{rat}}{}_t \,.\, \Phi(1,p,t) \leftrightarrow t\ p\text{-}q\text{-ganz.}$$

$$\Phi(r,s,t) \leftrightharpoons \bigvee_{\text{rat}}{}_{x,y,z} x^2 + ry^2 - sz^2 = 2 + rst^2.$$

<u>Folgerungen</u>

$$\bigwedge_p \bigvee_{q,m,n} \bigwedge_t \,.\, \Phi(m,n,t) \ \leftrightarrow\ t\ p\text{-}q\text{-ganz.}$$

Für eine Klasse K von Paaren m,n gilt also

(1) $\bigwedge_K{}_{m,n} \Phi(m,n,0)$

(2) $\bigwedge_K{}_{m,n} \bigwedge_{\text{rat}}{}_t \,.\, \Phi(m,n,t) \ \rightarrow\ \Phi(m,n,t+1)$

(3) $\bigwedge_{\text{rat}}{}_u \,.\, \bigwedge_K{}_{m,n} \Phi(m,n,u) \ \rightarrow\ u$ ganz.

<u>Satz</u> $\bigwedge_{\text{rat}}{}_u \,.\, u$ ganz $\ \leftrightarrow\ \bigwedge_{\text{rat}}{}_{r,s} . \Phi(r,s,0) \wedge \bigwedge_t . \Phi(r,s,t) \rightarrow \Phi(r,s,t+1). \rightarrow \Phi(r,s,u).$
[J. Robinson J S L 14 (1949)]

<u>Satz</u> Die Theorie der kommutativen Körper ist unentscheidbar.

01.08.1959. Letter from Hasse to Lorenzen.

1. August 1959

Lieber Herr Lorenzen,

Heute endlich bin ich dazu gekommen, mich mit den Kriterien über quadratische Darstellungen zu beschäftigen.

Es ist alles in Ordnung, nur dass es im Falle $p = 1$ mod. 4 auch $q = 1$ mod. 4 (statt nur mod. 2) heissen muss, was wohl auf einem Schreibfehler Ihrerseits beruht.

Die Kriterien lassen sich allerdings nicht unmittelbar meiner Dissertation entnehmen, in der ja von Ganzzahligkeit nicht die Rede ist. Dass aus der Darstellbarkeit die Ganzheit von t für p,q folgt, ergibt sich ohne weiteres durch Übergang

[56] This correction is by Hasse, see the following letter.

zu der zugeordneten ganzzahligen primitiven homogenen Gleichung und Kongruenzbetrachtung mod. p, q (wobei für $q = 2$ sogar mod. 4 oder gar 8 zu rechnen ist). Dass umgekehrt für p, q-ganze t wirklich Darstellbarkeit besteht, beruht darauf, dass in meiner Dissertation die ternäre Darstellbarkeit auf binäre lokale Nichtdarstellbarkeiten zurückgeführt ist. Schliesst man also indirekt, so führt die Annahme der ternären Nichtdarstellbarkeit auf binäre lokale Darstellbarkeiten, und daraus kann dann wie vorher durch Übergang zu den ganzzahligen primitiven homogenen Gleichungen hier auf die Nichtganzheit von t für p, q geschlossen werden.

Was die von Robinson gezogenen logistischen Folgerungen betrifft, so verstehe ich sie leider nicht ganz und habe hier auch keine Möglichkeit, das JSL einzusehen.

Mit besten Grüssen und Ferienwünschen, auch für Ihre Frau und Tochter,

Ihr [Hasse]

07.03.1960. Letter from Hasse to Lorenzen.

7. März 1960

Herrn Prof. Dr. P. Lorenzen
Kiel
Philosophisches Seminar d. Universität

Lieber Herr Lorenzen,

recht herzlich möchte ich mich für die Zusendung Ihres kleinen Büchleins über die Entstehung der exakten Wissenschaften[57] bedanken. Ich habe es in den letzten Tagen mit grosser Freude gelesen.

Mit besten Grüssen, auch an die verehrte Gattin,

Ihr [Hasse]

27.06.1961. Letter from Hasse to Lorenzen.

27. Juni 1961

Lieber Herr Lorenzen,

haben Sie zunächst recht herzlichen Dank für die Zusendung Ihres Sonderabdrucks „Ein didaktisches Konstruktivitätskriterium“.[58] Wir haben schon seit längerer Zeit die Absicht, Sie um einen ausführlichen Vortrag über Ihre Ergebnisse zur Grundlegung der Mathematik zu bitten. In diesem Sommersemester liess sich das deshalb schlecht einrichten, weil wir laufend auswärtige, insbesondere überseeische

[57] Lorenzen 1960.
[58] In fact “Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium”, Lorenzen 1961.

Gäste hatten und dazu auch noch einige Mathematiker aus Gründen der Besichtigung für eine evtl. Berufung einladen mussten. Ich möchte Sie heute fragen, ob es Ihnen möglich wäre, uns im Wintersemester die Freude Ihres Besuchs und eines Vortrags über Ihre Ergebnisse zu machen. Es würde uns daran liegen, dass dieser Vortrag uns Ihre Gedankengänge möglichst in einer uns allen wirklich verständlichen Form nahebringt. Wir würden Ihnen dafür auch gern zwei aufeinanderfolgende Kolloquiumstage (immer Dienstag 16 Uhr) zur Verfügung stellen, wo Sie dann jeweils maximal 60 Minuten Vortragszeit hätten. Selbstverständlich würden wir Ihnen Ihre Reise- und Aufenthaltskosten erstatten mit DM 150,– je Vortragstag. Ich schreibe schon heute, weil jetzt noch fast alle Dienstage des Wintersemesters zur Verfügung stehen, ausgenommen lediglich der erste Dienstag, nämlich der 7.11., an dem unser P. Jordan über ein Problem aus der Theorie der nichtkommutativen Verbände etwas erzählen wollte.

Sie würden uns wirklich eine sehr grosse Freude machen, wenn Sie auf diese unsere Bitte eingingen.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr [Hasse]

04.07.1961. Letter from Lorenzen to Hasse.

Prof. P. Lorenzen
Kiel
Clausewitzstraße 14

4/7 61

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

für Ihre liebenswürdige Anfrage und Einladung danke ich Ihnen herzlichst.

Ich gehe in der Tat gern auf dieses Anerbieten ein, weil ich meine gegenwärtige „Philosophie“ ja nur umständehalber als Philosophie vertrete, während es doch nichts als eine mathematische Bemühung um die Frage ist, ob denn tatsächlich (wie man heute meint) die Arithmetik und Mengenlehre eine axiomatische Theorie – wie die Geometrie – sei. Ist diese Frage zu verneinen, so bleibt zu fragen, wie denn die Sätze, die als „Axiome“ benutzt werden, zu <u>beweisen</u> sind.

Leider sind diese Fragen z. Zt. mit vielerlei unnötigem Ballast beladen, sodaß ich zur Verständlichkeit von dem Angebot zweier Kolloquien gerne Gebrauch mache. Am ersten Tage würde ich vorschlagen „Logik und Arithmetik“ zu behandeln, am zweiten Tage „Geometrie und Mengenlehre“.

Da ich mir die Tage noch aussuchen darf, schlage ich Dienstag, den 5. Dezember und Dienstag, den 12. Dezember vor.

Mit herzlichen Grüßen stets

Ihr P. Lorenzen

08.07.1961. Letter from Hasse to Lorenzen.

8.7.1961

Lieber Herr Lorenzen,

Haben Sie recht herzlichen Dank für Ihre Zusage, über die wir uns alle sehr freuen. Wir sind mit Ihren Vorschlägen hinsichtlich Daten und Themen gern einverstanden, haben davon Vormerkung genommen und hoffen nur, daß nichts dazwischenkommt.

Für den Fall, daß wir für Sie Quartier besorgen sollen, geben Sie uns bitte rechtzeitig Nachricht. Oder wollen Sie jedesmal am Abend wieder nach Kiel zurückfahren?

Hit herzlichen Grüßen, auch von meiner Frau und an die Ihre,

Ihr [Hasse]

11.07.1961. Letter from Lorenzen to Hasse.

Prof. P. Lorenzen
Kiel
Clausewitzstraße 14

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

herzlichen Dank für die Bestätigung.

Da ich von Hamburg ja noch gegen $23^{\underline{00}}$ nach Kiel kommen kann, werde ich sicherlich abends zurückfahren und werde also kein Quartier brauchen.

Mit herzlichen Grüßen stets
Ihr P. Lorenzen

Kiel $^{11}/_{7}$ 61

09.10.1962. Letter from Hasse to Lorenzen.

Prof. Dr. H. Hasse

Herrn Prof. Dr. P. Lorenzen
Erlangen
Philosophisches Institut d. Universität

9.10.1962

Lieber Herr Lorenzen,

Mit meinen herzlichen Glückwünschen zur Ernennung in Erlangen verbinde ich meinen besten Dank für die Zusendung Ihres neuesten Opus „Meta-Mathematik“.[59] Nach genauer Lektüre der Einleitung und Gewinnung eines Überblicks über den

[59] Lorenzen 1962.

Gang der Handlung habe ich dies sicher von hoher Warte mit größter Klarheit und bemerkenswertem didaktischen Geschick geschriebene Werk neben der Scholzschen „Metaphysik" in meinem Bücherschrank abgestellt, mit dem Vorsatz, wenigstens einmal bis zum Widerspruchsfreiheitsbeweis der Arithmetik im Einzelstudium vorzudringen. Vielleicht finde ich dazu nach meiner Emeritierung die Zeit.

Für heute recht herzliche Grüße und gute Wünsche von Haus zu Haus

Ihr [Hasse]

July 1963. Letter from Lorenzen to Hasse.

Prof. P. Lorenzen
852 Erlangen
Saalestraße 1

[Beantw. 21.7.1963
Kritik anerkannt.
Aber in solchem Werk kein
Platz für Grundlagenfragen]

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

Ihr großes Buch[60] kam hier vor einigen Tagen an: welch ein vorteilhafter „Austausch" ist das für mich, da Sie ja nur das Metamathematikbändchen erhalten haben!

So versuche ich noch, meinen herzlichen Dank dazuzugeben. Daß die Zahlentheorie die Königin der mathematischen Disziplinen ist, ist mir durch Ihr Buch wieder einmal deutlich geworden. Welche Wohltat, daß am Anfang kein willkürliches Axiomensystem steht: die Gegenstände, die man zu erkennen trachtet, sind vielmehr von vornherein eindeutig durch Konstruktion gegeben. [Die axiomatischen Begriffe wie Körper, Gruppe, ... dienen stets nur als ein Mittel, um die Beziehungen zwischen den konstruierten Gegenständen – vor allem also Beweiszusammenhänge – klar und deutlich zu erfassen]

Bei meiner notorischen Kritik am Cantorschen Mengenbegriff werden Sie es mir verzeihen, daß ich die „Konstruktion" der vollständigen Hülle eines bewerteten Körpers als einen Schönheitsfehler betrachte: es werden ja „alle" φ-konvergenten Folgen (a_n) betrachtet. Wie läßt sich diese Unmenge aber „konstruieren"?

M. E. kommt man zu den gewünschten Resultaten über die Fortsetzungen von Bewertungen, wenn man statt „aller" konvergenten Folgen immer nur „genügend viele" konvergente Folgen zur Erweiterung des bewerteten Körpers benutzt.

Diese „puristische" Kritik wäre wohl der Forderung zu vergleichen, etwa beim Beweis des Dirichletschen Einheitensatzes <u>ohne</u> den <u>vollen</u> Körperraum (und Logarithmenraum) auszukommen: hier braucht man ersichtlich nicht <u>alle</u> reellen Zahlen, sondern könnte sich mit Abschätzungen behelfen.

Daher möchte ich – statt solcher Kritik – lieber meinen herzlichsten Dank noch einmal wiederholen.

[60] Hasse 1963b.

Mit den ergebensten Grüßen
stets
Ihr P. Lorenzen

September 1963. Letter from Lorenzen to Hasse.

Prof. P. Lorenzen
852 Erlangen
Saalestraße 1

[Gedankt
durch Postkarte
26.9.63]

September 1963

Sehr verehrter, lieber Herr Hasse,

in der Hoffnung, daß Sie dieser Brief nach guter Rückkehr von der Amerikareise antrifft, möchte ich Ihnen vielmals für die Karte aus Morris Inn, Notre Dame (ich habe dort 1957 einmal übernachtet) danken.

Meine „Kritik“ war durchaus nicht so gemeint, daß es einer „Rechtfertigung“ Ihrerseits bedurft hätte: das Ziel des Buches, wirklich zu den Höhen der Zahlentheorie zu führen rechtfertigt – in unserer gegenwärtigen Situation – vollkommen die Benutzung der traditionellen Fundamente.

Trotzdem freue ich mich natürlich sehr über Ihre Zustimmung, daß dann, wenn z. B. von „allen“ Folgen (etwa rationaler Zahlen) geredet wird, immer nur „genügend viele“ gemeint ist. Die Kontrolle, daß überall in der Tat immer nur „genügend viele“ gebraucht werden, ist allerdings m. E. nicht trivial (In der Math. Zeitschr. 59, 1953, habe ich einen Beweis dafür dargestellt, daß in jedem abzählbaren bewerteten Körper K ein <u>abzählbarer</u> Oberkörper $\overline{K}$ existiert, derart daß sich die Bewertung von K auf $\overline{K}$ fortsetzen läßt und daß für jeden algebraischen Oberkörper M von $\overline{K}$ <u>höchstens</u> <u>eine</u> Bewertung von M existiert, die die Bewertung von $\overline{K}$ fortsetzt).

Vor einiger Zeit erhielt ich die Neuauflage Ihrer Höheren Algebra I.[61] Daß die determinantenfreie Algebra jetzt zu konstruktiven Entscheidbarkeits- und Berechenbarkeitsverfahren führt, ist eine wesentliche Verbesserung.

Mir fiel auf (aber auch das soll keine Kritik sein, weil es dazu zu unwichtig ist), daß für Körper und Gruppen immer die Eindeutigkeit der Division (bzw. Subtraktion) gefordert wird. In Satz 14 beweisen Sie aber die Eindeutigkeit des Einselementes, nämlich: $\mathscr{C} E_A = \mathscr{C}$ für alle $\mathscr{C}$

$$F_B \mathscr{C} = \mathscr{C} \text{ für alle } \mathscr{C}$$

also $F_B = F_B E_A = E_A$ (jedes F_B ist jedem E_A gleich, d. h. alle E_A und F_B sind dasselbe Element).

Ebenso beweisen Sie Satz 15 die Eindeutigkeit des Reziproken.

Mit ergebensten Grüßen
stets Ihr P. Lorenzen

[61] Hasse 1963a.

K. The correspondence between Aubert and Lorenzen, 1978–1979.

21.02.1978. Letter from Aubert to Lorenzen.

UNIVERSITY OF OSLO

INSTITUTE OF MATHEMATICS — BLINDERN, February 21, 1978

P. O. BOX 1053 – BLINDERN, OSLO 3

Dear Professor Lorenzen,

I am aware of the fact that you are now mainly working as a philosopher and not as a mathematician. But since the question I am going to ask you is really of a historical nature (although connected with technical mathematics) I am nevertheless taking the liberty to write to you. I believe that you are now (after Krull's death) the only person who could possibly enlighten me on the questions which I touch upon below. Hence I would be very thankful for any comment that you would be willing to give me concerning this letter.

For some time I have been puzzled by the fact that so few people know about t-ideals ("divisorial ideals of finite character"). Specialized books on the topic of general arithmetics or divisibility theory (multiplicative ideal theory, divisors, etc.) do not even mention this notion (like the books of Bourbaki, Gilmer, Larsen–McCarthy and Fossum).[62] This in spite of the fact that there is in my opinion an overwhelming evidence pointing in favour of t-ideals as the building blocks of general arithmetics. They seem to form the true arithmetical divisors with nice properties which are shared neither by the d-ideals nor by the v-ideals.

It is a puzzle to me how the basic arithmetical virtues of t-ideals have escaped the notice of the specialists – let alone the general mathematical public. The only book which seems to give a fair treatment of them is Jaffard's monograph "Les systèmes d'idéaux".[63] And Jaffard's main source when it comes to t-ideals is certainly your own 1939 paper.

I believe it is high time to make some propaganda for the t-ideals exhibiting them to a more general public in a somewhat more pedagogical and attractive way than has been done hitherto. I have hence decided to write an article on this subject with the tentative title "Divisorial ideals of finite character".[64] It is going to be partly expository and partly historical, but will also contain some more technical results of my own, going slightly further than the results which can be found in your 1939 paper and in Jaffard's monograph.

In connection with the history of the subject I am especially puzzled by finding that even Krull did not seem to have grasped the relevance of t-ideals – at least

[62] Bourbaki 1972; Gilmer 1972; Larsen and McCarthy 1971; Fossum 1973.

[63] Jaffard 1960. See Bosbach (2015, Chapter 13) for another fair treatment.

[64] Aubert 1979.

if we are to judge from his published works. I have not been able to spot a single reference to t-ideals in his papers or in his 'Idealbericht'.[65] I may of course have overlooked some part of his work, but I cannot really see what that should be. I have checked rather carefully his 'Idealbericht', his long series of papers on the arithmetics of integral domains[66] as well as his papers on Krull domains ('Endliche diskrete Hauptordnungen').[67] In doing so I have made a couple of strange observations. In a short historical and bibliographical note on v-ideals on page 121 of his 'Idealbericht' he refers among other things to Arnold's paper "Ideale in kommutativen Halbgruppen" from 1929[68] as if this paper were concerned with v-ideals. To describe the content of that paper Krull writes in a parenthesis: (v-Ideale in "Halbgruppen"). But Arnold's paper is concerned with t-ideals and not with v-ideals![69] My conjecture is simply that Krull was mainly interested in the arithmetics of integral domains and much less concerned with monoids. So he may not have studied Arnold's paper very attentively – in fact so superficially that the real content of that paper may have escaped him.

On the other hand Krull makes extensive reference to your 1939 paper (and in particular to the 'finite character property' of ideal systems) in the last paper (No VIII from 1943) of his long series of papers on the arithmetics of integral domains. And even on a first and rather superficial reading of your paper one could hardly avoid to see the crucial role played by the t-ideals. Only a glimpse should be enough for a man like Krull in order to recognize this – the t-ideals lying at the cross-road of two of his pet topics "Gruppensätze" and "Endliche diskrete Hauptordnungen": An integral domain is a Krull ring if and only if the fractional t-ideals form a group (under t-multiplication). (Satz 7 in your 1939 paper is equivalent to this result.) How could possibly this and many other basic arithmetical facts concerning t-ideals have escaped Krull's keen eye for the essentials?

The t-ideals put the Krull rings and the Dedekind rings on an equal footing describing the Krull rings simply as those rings which are "Dedekind" relative to the t-ideals. In the same way the t-ideals also put the divisor class group on an equal footing with the ideal class group. They are just particular instances ($r = t$, $r = d$) of a general notion of an "r-class group". Not to mention that the unique factorization domains (monoids) are just those domains (monoids) where every t-ideal is principal. (See the footnote on page 543 in your 1939 paper.) In addition to this comes the fact that (in contradistinction to the case of v-ideals) the t-ideals are of finite character and hence allow the use of Zorn's lemma, allow a nice theory of localization, etc. And this is very far from exhausting the nice properties and the possible applications of t-ideals.

---

65 Krull 1968.

66 Krull 1936a,b, 1937a, 1938a, 1937b, 1938b, 1939a,b, 1942, 1943.

67 Krull 1951, 1952, 1953.

68 Arnold 1929.

69 Compare Lorenzen's letter to Krull dated 8 March 1938 (page 49).

My question to you concerns the possible additional information you might have as to Krull's attitude to – or knowledge of – t-ideals. Since you and Krull shared some of the same arithmetical interests surrounding the notion of a t-ideal and at the same time being colleagues for a number of years in Bonn – I fancy that you may have had discussions with him on this particular topic and that you may possibly still have some recollections from such discussions. If you know of some written material which points in the direction of an awareness of the relevance of t-ideals on Krull's part, I would of course appreciate this still more.

I am asking you these questions because I want my historical remarks accompanying the above-mentioned projected paper to be as accurate as possible. This in itself is of course a detail, but I do not think it is just a detail or a matter of taste when Bourbaki as well as most other writers are founding their exposition of divisors, divisor class groups, Krull domains, etc. on the notion of a v-ideal and not on the notion of a t-ideal. But it is not only the v-ideals which on many occasions should be replaced by t-ideals – it is even more so in the case of d-ideals. And this touches upon an essential point of more far-reaching consequences: It seems inappropriate to force the heavily additive Dedekind notion of an ideal onto the solution of purely multiplicative problems of divisibility – just because there already happens to exist a well-developed commutative algebra surrounding this additive ideal concept. I would advocate another and more natural procedure, namely to use the t-ideals which are generally better suited for these purely multiplicative problems and develop the corresponding necessary piece of commutative algebra as adapted to this ideal concept (like for instance the localization technique, the seeds of which may already be found in your 1939 paper).

You may perhaps have lost all your former interest in t-ideals, but in that case I still hope that the slight leanings towards the history and philosophy of science of the present letter may catch your interest – or at least a sufficient interest to make a reaction possible!

Sincerely yours,

Karl Egil Aubert

P.S. We once met in Bonn in 1954. I also knew Krull from that time as well as from more recent encounters. But at that time I had not really grasped the importance of t-ideals, missing my opportunity to ask him these questions directly.

06.03.1978. Letter from Lorenzen to Aubert.

6.3.1978

2323

Prof. Dr. Paul Lorenzen

Herrn
Prof. Karl Egil Aubert
Institute of Mathematics
University of Oslo
P. O. Box 1053
Blindern, Oslo 3

Lieber Herr Aubert,

auf Ihren Brief hin habe ich erst einmal in meiner Dissertation (das sind ja 40 Jahre her) nachsehen müssen, was t-Ideale sind. In meiner Habilitationsarbeit (Über halbgeordnete Gruppen, Math. Z. 52, 1949) treten sie nur noch einmal auf (p. 486): für nichtkommutative Verbandsgruppen treten "prime vollständige invariante Unterhalbgruppen" an die Stelle von t-Primidealen.
Durch die anschließende Verallgemeinerung der Teilbarkeitstheorie von Gruppen auf Bereiche (Math. Z. 55, 1952) habe ich die t-Ideale wohl ganz aus den Augen verloren – und bin dann ja auch immer mehr zu Grundlagenfragen der Logik und Mathematik gekommen, bis ich jetzt schließlich ein sog. „Wissenschaftstheoretiker" geworden bin.
Meine Zusammenarbeit mit Krull war in der ganzen Zeit unseres Zusammenseins schlecht. Ich wurde August 39, einen Monat vor Kriegsbeginn, sein Assistent. Erst seit 1946 waren wir wieder in Bonn zusammen, aber da war ich Dozent und wir waren fast ohne Kontakt. Das hatte politische Gründe (Krull hatte meine Habilitation während des Krieges verhindert)[70] und lag außerdem an meinen grundlagentheoretischen Arbeiten, die Krull nicht als „mathematische" Leistungen anerkannte.
Es kann also durchaus sein, daß er die Rolle der t-Ideale, im Unterschied zu den v-Idealen, nicht deutlich genug gesehen hat[71] – wir werden kaum jemals darüber gesprochen haben. Sofern ich damals überhaupt noch Algebra gemacht habe, war das ja diese "Teilbarkeitstheorie in Bereichen" (vgl. auch Math. Z. 58, 1953) oder Theorie der Korrespondenzen (Math. Z. 60, 1954).[72]
Obwohl das kaum eine befriedigende Antwort auf Ihre Fragen ist – es ist aber so gewesen – möchte ich eine Gegenfrage stellen: Kennen Sie Algebraiker, die die Teilbarkeitstheorie in Bereichen weiter entwickelt haben?

Mit besten Grüßen
Ihr
Lo[renzen]

[70] Lorenzen qualifies the reasons why he maintained almost no contact with Krull when they were both back in Bonn as "political" and not as personal. I see this as an indication that he was aware that the prevention of his habilitation by Krull (in agreement with Hasse) was connected with his lack of submissiveness under national socialism.
[71] See however Krull's letter to Hasse dated 22 May 1938 (Roquette 2004, § 1.35).
[72] Lorenzen 1952, 1953a, 1954, respectively.

10.04.1978. Letter from Aubert to Lorenzen.

UNIVERSITETET I OSLO

MATEMATISK INSTITUTT
AVD. A: MATEMATIKK
AVD. B: MEKANIKK
AVD. C: STATISTIKK OG FORSIKRINGSMATEMATIKK

BLINDERN, OSLO 3, April 10, 1978
TELEFON * 46 68 00

Dear Professor Lorenzen,

Many thanks for your letter of March 6. As you say yourself, your reply does not give a really positive answer to my specific question about Krull's eventual awareness of the relevance of t-ideals. In spite of this, your "negative" information is also a piece of information for me.

I have little time now to work on the projected paper on t-ideals which I mentioned in my first letter to you. But I hope to be able to finish it during the summer and I will then send you a copy of it. I am more and more convinced that there is a need for such a paper, although it will hardly be more than a reworking and a slight continuation of some of your own ideas. One essential idea which is intimately linked with t-ideals – and which I did not mention in my last letter to you – is the notion of a 'Lorenzen group' (in Jaffard's terminology). This is the purely multiplicative generalization of a 'Kronecker function ring' and is related to t-ideals and r-valuations in the same way as the Kronecker function ring is related to d-ideals and Krull valuations. What the concept of a Lorenzen group shows, is that the t-system in a way has a 'universal property' reducing (in certain situations) the study of r-systems to the study of the more concrete and well-behaved t-system in the corresponding Lorenzen group (which is lattice-ordered and hence 't-Bézout').

As to your "Gegenfrage" I will, generally speaking, say that there have not been any remarkable innovations in divisibility theory since your own contributions – which so far represent the end-point of a long-lasting German arithmetical tradition. Your 1939 paper is widely cited, but I have somehow the impression that only very few mathematicians have fully grasped the content of it. One sign of this is precisely the almost total disregard of t-ideals in recent research literature as well as in the books which lately have been published on multiplicative ideal theory.

As to your more specific question concerning further developments of "Teilbarkeitstheorie in Bereichen" I must confess that I virtually know of no such contribution – except for one paper "Über verbandsgeordnete Vektorgruppen mit Operatoren" by I. Fleischer, published in Mathematische Nachrichten B 72 (1976).[73] The opening sentences of this paper seem to confirm the scarcity of contributions to this subject: "Es sind schon mehr als 20 Jahre vergangen, seitdem Lorenzen seine grundlegende Arbeit "Über halbgeordnete Gruppen" veröffentlicht hat. Dagegen

[73] Fleischer 1976.

scheint die Fortsetzung, Lorenzen [6] ("Teilbarkeitstheorie in Bereichen") völlig unbeachtet geblieben zu sein, – leider, denn viele der nachfolgenden Abhandlungen ließen sich ja in ihren Rahmen zwangslos eingliedern."

It is hard to say why your papers on divisibility theory have not quite exercised the influence which I think they deserve. One reason may be that they are written in a style which many mathematicians find hard to penetrate. This latter remark also applies to Jaffard's monograph "Les systèmes d'idéaux" which is really a very fine book but which is written in a style and uses a terminology which may have prevented many from reading it who otherwise could have been attracted by its rich content.

I have for some time thought about writing a comprehensive treatise on ideal systems which should not only be limited to the arithmetical traditions of the theory – but rather be a kind of 'generalized commutative algebra' where the notion of an ideal system is also seen in connection with ideal concepts occurring outside of general arithmetics (like for instance in general ring theory, differential algebra, lattice theory, etc.). I have a lot of unpublished material on this topic, but I seem to refrain from the rather laborious enterprise of putting it all together.

With my best regards

Karl Egil Aubert

18.06.1979. Letter from Lorenzen to Aubert.

18.6.1979
2323

Prof. Dr. Paul Lorenzen

Herrn
Prof. Dr. K. E. Aubert
Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo
Postboks 1053

Blindern – Oslo 3

Norwegen

Lieber Herr Aubert,

herzlichen Dank für die Zusendung Ihrer Arbeit über die Teilbarkeitstheorie.[74] Ich habe ja diese Dinge fast ganz aus den Augen verloren, es freut mich aber selbstverständlich sehr, daß die multiplikative Idealtheorie bei Ihnen solche sorgfältige Neubearbeitung erfährt.

[74] Aubert 1979, published subsequently as Aubert 1983.

Es fällt mir auf, daß Sie sich auf kommutative Gruppen beschränken. War die Ausdehnung auf nichtkommutative Gruppen vielleicht nur ein intellektueller Luxus?

Mit herzlichen Grüßen
stets
Ihr
Lo[renzen]

References.

Yasuo Akizuki. Einige Bemerkungen über primäre Integritätsbereiche mit Teilerkettensatz. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (III)*, 17, 327–336, 1935. doi:10.11429/ppmsj1919.17.0_327.

I. Arnold. Ideale in kommutativen Halbgruppen. *Mat. Sb.*, 36, 401–407, 1929. http://mi.mathnet.ru/msb7366.

Karl Egil Aubert. Divisors of finite character. Preprint series: Pure mathematics 1979:1, Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo, 1979. http://www.duo.uio.no/handle/10852/43912.

Karl Egil Aubert. Divisors of finite character. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 133, 327–361, 1983. doi:10.1007/BF01766024.

Bruno Bosbach. Ideal semigroups. In *Topics of divisibility: to contain is to divide*. Universitätsbibliothek Kassel, Kassel, 2015. http://d-nb.info/1068529288. Second lecture.

Nicolas Bourbaki. *Commutative algebra*. Elements of mathematics, Hermann, Paris, 1972. Translated from the French.

A. H. Clifford. Partially ordered abelian groups. *Ann. of Math. (2)*, 41, 465–473, 1940. doi:10.2307/1968728.

Thierry Coquand, Henri Lombardi, and Stefan Neuwirth. Lattice-ordered groups generated by an ordered group and regular systems of ideals. *Rocky Mountain J. Math.*, 49, 1449–1489, 2019. doi:10.1216/rmj-2019-49-5-1449.

Thierry Coquand, Henri Lombardi, and Stefan Neuwirth. Regular entailment relations. In *Proceedings of the conference* Paul Lorenzen: mathematician and logician*, 8–9 March 2018, Constance*. Springer, 2020. http://hlombardi.free.fr/publis/reg1.pdf.

Thierry Coquand and Stefan Neuwirth. Lorenzen's proof of consistency for elementary number theory. *Hist. Philos. Logic*, 2020. doi:10.1080/01445340.2020.1752034.

Jean Dieudonné. Sur la théorie de la divisibilité. *Bull. Soc. Math. France*, 69, 133–144, 1941. http://eudml.org/doc/86745.

Isidore Fleischer. Über verbandsgeordnete Vektorgruppen mit Operatoren. *Math. Nachr.*, 72, 141–144, 1976. doi:10.1002/mana.19760720112.

Robert M. Fossum. *The divisor class group of a Krull domain*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 74, Springer-Verlag, New York, 1973.

Raymond Garver. Note concerning group postulates. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 40, 698–701, 1934. doi:10.1090/S0002-9904-1934-05948-2.

Robert Gilmer. *Multiplicative ideal theory.* Pure and Applied Mathematics, 12, Marcel Dekker, New York, 1972.

Helmut Hasse. *Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht.* Verlag für angewandte Wissenschaften, Wiesbaden, 1952.

Helmut Hasse. *Höhere Algebra I: Lineare Gleichungen.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1963a. Fünfte, neubearbeitete Auflage.

Helmut Hasse. *Zahlentheorie.* Akademie-Verlag, Berlin, 1963b. Zweite, erweiterte Auflage.

Edward V. Huntington. Note on the definitions of abstract groups and fields by sets of independent postulates. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 6, 181–197, 1905. doi:10.2307/1986297. Errata in vol. 7(4), p. 591.

Paul Jaffard. *Les systèmes d'idéaux.* Travaux et recherches mathématiques, IV, Dunod, Paris, 1960.

Wolfgang Krull. Axiomatische Begründung der allgemeinen Idealtheorie. *Sitzungsber. Physik.-Med. Soz. Erlangen*, 56–57 (1924–1925), 47–63, 1926.

Wolfgang Krull. Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern II. *Math. Z.*, 31, 527–557, 1930. `http://eudml.org/doc/168193`.

Wolfgang Krull. Allgemeine Bewertungstheorie. *J. Reine Angew. Math.*, 167, 160–196, 1932. `http://eudml.org/doc/149803`.

Wolfgang Krull. *Idealtheorie.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 4(3), Springer, Berlin, 1935.

Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche I: Multiplikationsringe, ausgezeichnete Idealsysteme und Kroneckersche Funktionalringe. *Math. Z.*, 41, 545–577, 1936a. `http://eudml.org/doc/168685`.

Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche II: v-Ideale und vollständig ganz abgeschlossene Integritätsbereiche. *Math. Z.*, 41, 665–679, 1936b. `http://eudml.org/doc/168690`.

Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche III: Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie. *Math. Z.*, 42, 745–766, 1937a. `http://eudml.org/doc/168748`.

Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche IV: Unendliche algebraische Erweiterungen endlicher diskreter Hauptordnungen. *Math. Z.*, 42, 767–773, 1937b. `http://eudml.org/doc/168749`.

Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche IIIa: Eine Ergänzung von Beitrag III. *Math. Z.*, 43, 767, 1938a. `http://eudml.org/doc/168786`.

Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche V: Potenzreihenringe. *Math. Z.*, 43, 768–782, 1938b. `http://eudml.org/doc/168787`.

Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche VI: Der allgemeine Diskriminantensatz. Unverzweigte Ringerweiterungen. *Math. Z.*, 45, 1–19, 1939a. `http://eudml.org/doc/168835`.

Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche VII: Inseparable Grundkörperweiterung. Bemerkungen zur Körpertheorie. *Math. Z.*, 45, 319–334, 1939b. http://eudml.org/doc/168854.

Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. Eine Bemerkung zu den Beiträgen VI und VII. *Math. Z.*, 48, 530–531, 1942. http://www.digizeitschriften.de/dms/resolveppn/?PID=PPN266833020_0048|log40.

Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche VIII: Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen. *Math. Z.*, 48, 533–552, 1943. http://eudml.org/doc/169005.

Wolfgang Krull. Zur Arithmetik der endlichen diskreten Hauptordnungen. *J. Reine Angew. Math.*, 189, 118–128, 1951. http://eudml.org/doc/150196.

Wolfgang Krull. Über geschlossene Bewertungssysteme. *J. Reine Angew. Math.*, 190, 75–92, 1952. http://eudml.org/doc/150217.

Wolfgang Krull. Zur Theorie der kommutativen Integritätsbereiche. *J. Reine Angew. Math.*, 192, 230–252, 1953. http://eudml.org/doc/150259.

Wolfgang Krull. *Idealtheorie.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 46, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968. Zweite, ergänzte Auflage.

Max D. Larsen and Paul J. McCarthy. *Multiplicative theory of ideals.* Pure and Applied Mathematics, 43, Academic Press, New York, 1971.

Henri Lombardi. Théories géométriques pour l'algèbre constructive, in progress. http://hlombardi.free.fr/Theories-geometriques.pdf.

Paul Lorenzen. Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie, 1938. Manuscript, Universitätsarchiv Bonn.

Paul Lorenzen. Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. *Math. Z.*, 45, 533–553, 1939a. http://eudml.org/doc/168865.

Paul Lorenzen. Die Definition durch vollständige Induktion. *Monatsh. Math. Phys.*, 47, 356–358, 1939b. doi:10.1007/BF01695507.

Paul Lorenzen. Ein vereinfachtes Axiomensystem für Gruppen. *J. Reine Angew. Math.*, 182, 50, 1940. http://eudml.org/doc/150077.

Paul Lorenzen. Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik. *Math. Z.*, 49, 313–327, 1944. http://eudml.org/doc/169026.

Paul Lorenzen. Über halbgeordnete Gruppen. *Math. Z.*, 52, 483–526, 1950. http://eudml.org/doc/169131.

Paul Lorenzen. Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände. *J. Symbolic Logic*, 16, 81–106, 1951. http://www.jstor.org/stable/2266681. Translation by Stefan Neuwirth: Algebraic and logistic investigations on free lattices, http://arxiv.org/abs/1710.08138.

Paul Lorenzen. Teilbarkeitstheorie in Bereichen. *Math. Z.*, 55, 269–275, 1952. http://eudml.org/doc/169251.

Paul Lorenzen. Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen. *Math. Z.*, 58, 15–24, 1953a. http://eudml.org/doc/169331.

Paul Lorenzen. Über die Komplettierung in der Bewertungstheorie. *Math. Z.*, 59, 84–87, 1953b. http://eudml.org/doc/169374.

Paul Lorenzen. Über die Korrespondenzen einer Struktur. *Math. Z.*, 60, 61–65, 1954. http://eudml.org/doc/169411.

Paul Lorenzen. *Die Entstehung der exakten Wissenschaften.* Verständliche Wissenschaft, 72, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.

Paul Lorenzen. Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium. In *Infinitistic Methods: Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw, 2–9 September 1959*, 193–200. Pergamon, Oxford; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1961.

Paul Lorenzen. *Metamathematik.* (*B·I-Hochschultaschenbücher*, 25), Bibliographisches Institut, Mannheim, 1962. Translation by J. B. Grize: *Métamathématique*, Paris: Gauthier-Villars, 1967. Translation by J. Muñoz: *Metamatemática*, Madrid: Tecnos, 1971.

Herbert Mehrtens. *Die Entstehung der Verbandstheorie.* arbor scientiarum: Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte. Reihe A: Abhandlungen, VI, Gerstenberg Verlag, Hildesheim, 1979.

Masayoshi Nagata. On Krull's conjecture concerning valuation rings. *Nagoya Math. J.*, 4, 29–33, 1952. http://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118799310.

Masayoshi Nagata. Corrections to my paper "On Krull's conjecture concerning valuation rings". *Nagoya Math. J.*, 9, 209–212, 1955. http://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118799698.

Tadasi Nakayama. On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 18, 185–187, 1942a. http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195573979.

Tadasi Nakayama. On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. II. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 18, 233–236, 1942b. http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195573941.

Tadasi Nakayama. On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. III. *Proc. Japan Acad.*, 22, 249–250, 1946. http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195572191.

Heinz Prüfer. Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern. *J. Reine Angew. Math.*, 168, 1–36, 1932. http://eudml.org/doc/149823.

Peter Roquette (ed.). *Briefwechsel H. Hasse – W. Krull.* http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~roquette/Transkriptionen/HASKRU_040310.pdf, 2004.

Sanford L. Segal. *Mathematicians under the Nazis.* Princeton University Press, Princeton, 2003. doi:10.1515/9781400865383.

André Weil. *Arithmétique et géométrie sur les variétés algébriques.* Actualités scientifiques et industrielles, 206, Hermann & Cie, Paris, 1935. Exposés mathématiques, publiés à la mémoire de Jacques Herbrand, XI.