Propriété d'approximation commutative

Stefan Neuwirth

Résumé

Ce petit texte présente des résultats récents en analyse fonctionnelle. Ils concernent un raffinement de la propriété d'approximation dans les espaces de Banach.

Le but recherché est d'étudier dans quelle mesure certaines suites d'opérateurs de rang fini, dites approximantes, peuvent suppléer aux projections associées à une base de Schauder. On sait à présent que des espaces de Banach ne partagent pas la propriété d'approximation et n'ont *a fortiori* pas de base de Schauder, mais on sait peu de choses sur la variété de propriétés intermédiaires : à défaut de base, peut-on décomposer l'espace en une somme d'espaces de dimension finie ? Peut-on imposer à ces opérateurs de rang fini d'être des projections ?

Nous allons étudier ici une propriété plus faible : la suite approximante d'opérateurs peut-elle être choisie de sorte que ceux-ci commutent entre eux ?

Les résultats présentés ici ont été démontrés par Casazza, Godefroy et Kalton.

Table des matières

1 Définitions

Définition 1.1 (Grothendieck) *Soit X un espace de Banach.*
(i) X a la propriété d'approximation (AP) si pour tout compact $K \subseteq X$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe T opérateur de rang fini sur X tel que $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$ pour

tout $x \in K$.
(ii) X a la AP bornée (BAP) si T est borné indépendamment de K et de ε.
(iii) X a la AP métrique (MAP) si on peut imposer $\|T\| \leq 1$.

De manière équivalente,
■ (i) X a la AP s'il existe un filtre $\{T_\alpha\}$ d'opérateurs de rang fini qui tend vers l'identité uniformément sur tout compact de X.
■ (ii) X a la BAP s'il existe un filtre $\{T_\alpha\}$ d'opérateurs de rang fini uniformément bornés qui tend vers l'identité uniformément sur tout compact de X.
Ces énoncés expriment en fait que l'opérateur identité est approximable par des opérateurs de rang fini. Dés lors, les opérateurs compacts S sont approximables en norme par des opérateurs de rang fini : En effet, $\overline{S(B_X)}$ est compact et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe T tel que $\|TS - S\| \leq \varepsilon$.

Définition 1.2 *X a la AP (resp. BAP) commutative s'il existe des filtres commutatifs vérifiant (i) (resp. (ii)).*

Par le théorème d'Ascoli, on a la

Proposition 1.3 *X a la BAP si et seulement si*
■ *Il existe λ tel que pour tout espace $E \subseteq X$ de dimension finie, il existe T opérateur de rang fini sur X tel que $\|T\| \leq \lambda$ et $\|Tx - x\| \leq \varepsilon\|x\|$ si $x \in E$.*
■ *Il existe un filtre $\{T_\alpha\}$ d'opérateurs de rang fini uniformément bornés qui tend fortement vers l'identité.*
■ *Il existe un filtre $\{T_\alpha\}$ d'opérateurs de rang fini uniformément bornés qui tend fortement vers l'identité sur un sous-ensemble dense de X.*

Si X est séparable, X est limite croissante d'espaces de dimension finie $X = \overline{\cup_n X_n}$. Alors il existe selon le (i) une suite bornée de T_n tels que $\|T_n x - x\| \leq \frac{\|x\|}{n}$ si $x \in X_n$ et qui tend donc fortement vers l'identité sur un sous-ensemble dense. On peut ainsi considérer des suites à la place de filtres dans le (ii) ci-dessus ; de plus, par le théorème de Banach-Steinhaus, l'hypothèse d'une borne uniforme devient redondante. On appellera de telles suites des suites approximantes.

2 Deux lemmes de perturbation

Ces deux lemmes permettent de corriger infinitésimalement des opérateurs de rang fini et ont une grande importance pratique.

Scholie 2.1 (Auerbach) *Soit X un espace normé de dimension n. Alors il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ de norme 1 tels que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.*

Démonstration. Soit $\{g_1, \ldots, g_n\}$ une base de X^*. Considérons

$$V(y_1, \ldots, y_n) = \det([g_i(y_j)]_{1 \leq i,\, j \leq n})$$

et soit $(x_1, \ldots, x_n)$ le maximum de V sur le compact $\{(y_1, \ldots, y_n) : \|y_i\| \leq 1\}$. Alors $\|x_j\| = 1$ et les

$$f_i(x) = \frac{V(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{V(x_1, \ldots, x_n)}$$

vérifient l'hypothèse. ■

Un tel système de (x_i, f_i) est appelé base biorthogonale de X.

Scholie 2.2 *Soit X un espace de Banach et $E \subseteq X$ un sous-espace de dimension k. Alors il existe une projection de X sur E bornée par k.*

Démonstration. Soit $\{(x_i, f_i)\}$ une base biorthogonale de E produite par le scholie 2.1 et notons $\widehat{f_i}$ les prolongements de Hahn-Banach à X des f_i. $P(x) = \sum_1^k{}_i \widehat{f}_i(x)x_i$ est la projection recherchée. ■

Lemme 2.3 (Johnson–Rosenthal–Zippin) *Soit T un opérateur d'un espace de Banach X sur un sous-espace de dimension finie $E \subseteq X$. Soit $F \subseteq X$ un sous-espace de dimension k tel que $\|T|_F - Id|_F\| < \varepsilon < 1$, où $\frac{k\varepsilon}{1-\varepsilon} < 1$. Alors il existe un opérateur de rang fini S tel que*

$$\begin{cases} S|_F = Id|_F, & \operatorname{im} S \subseteq \operatorname{im} T + F, \\ \|S - T\| < \frac{k\varepsilon}{1-\varepsilon}\|T\|, & \operatorname{im} S^* = \operatorname{im} T^*. \end{cases}$$

Démonstration. $U = T|_F : F \to T(F)$ vérifie $\|U\| < 1+\varepsilon$ et $\|U^{-1}\| < \frac{1}{1-\varepsilon}$. Donc $\|U^{-1} - Id|_{T(F)}\| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Par le scholie 2.2, il existe une projection $P : E \to T(F)$ bornée par k. Posons

$$V = U^{-1}P + (Id|_E - P) \quad \text{et} \quad S = VT.$$

Alors $S|_F = Id|_F$ et $\operatorname{im} S \subseteq \operatorname{im} T + F$. Comme $\|V - Id|_E\| = \|U^{-1}P - P\| < \frac{k\varepsilon}{1-\varepsilon} < 1$, $\|S - T\| < \frac{k\varepsilon}{1-\varepsilon}\|T\|$ et V est injective. S et T ont donc même noyau et S^* et T^*, étant de rang fini, même image. ■

Lemme 2.4 (Singer) *Soit T un opérateur de rang fini sur X. Soient $F \subseteq X$ un sous-espace de dimension k et $G \subseteq X^*$ un sous-espace de dimension l tels que $\|T|_F - Id|_F\| < \varepsilon < 1$ et $\|T^*|_G - Id|_G\| < \eta < 1$, où $\frac{k\varepsilon}{1-\varepsilon} < \mu < 1$, $\mu\|T\| + \eta < \rho < 1$ et $\frac{l\rho}{1-\rho} < \nu < 1$. Alors il existe un opérateur de rang fini S tel que*

$$\begin{cases} S|_F = Id|_F,\ S^*|_G = Id|_G, & \operatorname{im} S \subseteq \operatorname{im} T + F \\ \|S - T\| < (\mu + \nu + \mu\nu)\|T\|, & \operatorname{im} S^* \subseteq \operatorname{im} T^* + G. \end{cases}$$

Démonstration. Par le lemme 2.3, il existe un opérateur U de rang fini tel que

$$\begin{cases} U|_F = Id|_F, & \operatorname{im} U \subseteq \operatorname{im} T + F, \\ \|U - T\| < \mu\|T\|, & \operatorname{im} U^* = \operatorname{im} T^*. \end{cases}$$

Alors

$$\|U^*x^* - x^*\| \le \|U^*x^* - T^*x^*\| + \|T^*x^* - x^*\| < (\mu\|T\| + \eta)\|x^*\| \quad \text{pour } x^* \in G.$$

Une nouvelle application du lemme donne un opérateur de la forme

$$S^* = ((U^*|_G)^{-1}P + Id|_E - P)U^*,$$

où $E = \operatorname{im} U^*$ et $P : E \to U^*(G)$ est une projection, tel que

$$\begin{cases} S^*|_G = Id|_G, & \operatorname{im} S^* \subseteq \operatorname{im} U^* + G = \operatorname{im} T^* + G \\ \|S^* - U^*\| < \nu\|T\|, & \operatorname{im} S^{**} = \operatorname{im} U^{**}. \end{cases}$$

Comme U^* est l'adjoint d'un opérateur de rang fini, S^* est effectivement l'adjoint d'un S. Comme S et U sont de rang fini, $\operatorname{im} S = \operatorname{im} U \subseteq \operatorname{im} T + F$. Notons que

$$\|S - T\| \le \|S - U\| + \|U - T\| < \nu\|U\| + \mu\|T\| < (\mu + \nu + \mu\nu)\|T\|.$$

Montrons que $S|_F = Id|_F$: soit $x \in F$ et $x^* \in X^*$. Alors

$$\begin{aligned} \langle x^*, Sx\rangle &= \langle (U^*|_G)^{-1}PU^*x^*, x\rangle + \langle U^*x^*, x\rangle - \langle PU^*x^*, x\rangle \\ &= \langle U^*(U^*|_G)^{-1}PU^*x^*, x\rangle + \langle x^*, x\rangle - \langle PU^*x^*, x\rangle \\ &= \langle x^*, x\rangle. \end{aligned}$$

■

3 Le cas séparable

Nous allons considérer une suite approximante $\{T_n\}$ d'un espace de Banach X séparable.

3.1 Le théorème de Casazza–Kalton

Ce théorème énonce qu'on peut construire une suite approximante commutative à partir d'une suite approximante métrique.

Scholie 3.1 *Il existe une suite approximante $\{S_n\}$ et une sous-suite $\{T_{k_n}\}$ tels que $T_{k_n} - S_n \to 0$ et $S_nS_m = S_m$ si $n > m$.*

Démonstration. Nous allons construire les S_n par récurrence. Soit $S_1 = T_1$ et supposons les S_m construits tels que $S_mS_k = S_k$ si $n > m > k$. Soit $X_n = \operatorname{im} S_{n-1}$ et k_n tel que $\|T_{k_n}|_{X_n} - Id|_{X_n}\| < \varepsilon < 1$ avec $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \dim X_n \le \frac{1}{n}$. Par le lemme 2.3, il existe S_n tel que $S_nx = x$ pour $x \in X_n$ et $\|S_n - T_{k_n}\| < \frac{1}{n}\|T_{k_n}\|$. La suite $\{S_n\}$ est approximante et vérifie clairement $S_nS_m = S_m$ si $m < n$ et $T_{k_n} - S_n \to 0$. ■

Proposition 3.2 (Casazza–Kalton) *Si $\{T_n\}$ vérifie $T_nT_m = T_m$ pour $n > m$ et $[T_m, T_n] \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ pour tout n, il existe une suite approximante $\{R_n\}$ et une sous-suite $\{T_{k_n}\}$ telles que $T_{k_n} - R_n \to 0$ et $R_mR_n = R_nR_m = R_m$ si $n > m$.*

Démonstration. On peut de plus supposer $\operatorname{im} T_n = \operatorname{im} T_n^2$. En effet, soit une projection bornée $P_n : X \to \operatorname{im} T_n$ et α_n tels que $\alpha_n \|P_n\| \to 0$ et $\frac{\alpha_n}{\alpha_n - 1}$ ne soit pas valeur propre de T_n. C'est possible : cet opérateur est de rang fini et son spectre est fini. On considère alors $(1 - \alpha_n)T_n + \alpha_n P_n$ au lieu de T_n.
Construisons alors par récurrence une suite approximante $\{R_n\}$ et une sous-suite $\{T_{k_n}\}$ telles que

$$\begin{cases} \operatorname{im} R_n^2 = \operatorname{im} R_n = \operatorname{im} T_{k_n}, \\ R_n \text{ est un polynôme en les } T_{k_j},\ j \leq n, \\ R_n R_k = R_k R_n = R_k \text{ pour } k < n. \end{cases}$$

Soit $R_1 = T_1$ et supposons R_n construit. Comme cet opérateur est bijectif sur son image, il existe W_n polynôme en R_n et inverse de R_n sur son image. Comme $R_n(Id|_X - T_m) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$, on peut choisir k_{n+1} tel que

$$\|R_n(Id|_X - T_{k_{n+1}})\| < \frac{1}{n\|W_n\|}.$$

L'opérateur

$$R_{n+1} = T_{k_{n+1}} + W_n R_n (Id|_X - T_{k_{n+1}})$$

vérifie alors les hypothèses : la deuxième et la troisième sont immédiates. Vérifions la première. Comme $\operatorname{im} R_{n+1} \subseteq \operatorname{im} T_{k_{n+1}}$, il suffit de montrer que R_{n+1} est injectif sur $\operatorname{im} T_{k_{n+1}}$: soit $x \in \operatorname{im} T_{k_{n+1}}$ tel que $R_{n+1}x = 0$. Alors $T_{k_{n+1}}x \in \operatorname{im} T_{k_n}$ par la définition de R_{n+1}. Donc $T_{k_{n+1}}^2 x = T_{k_{n+1}}x$, et comme $T_{k_{n+1}}$ est injectif sur son image, $T_{k_{n+1}}x = x$. Par la définition de R_{n+1}, $x = 0$.
La suite $\{R_n\}$ est approximante et vérifie clairement $T_{k_n} - R_n \to 0$. ■

Corollaire 3.3 (Casazza–Kalton) *Si $\{T_n\}$ vérifie $[T_m, T_n] \underset{m,\, n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, il existe une suite approximante $\{R_n\}$ telle que $R_m R_n = R_n R_m = R_m$ pour $m < n$.*

Démonstration. Par le scholie 3.1, il existe une suite $\{S_k\}$ d'opérateurs de rang fini et une sous-suite T_{n_k} telles que $S_l S_k = S_k$ si $l > k$ et $S_k - T_{n_k} \to 0$. Alors on a encore $[S_m, S_n] \underset{m,\, n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. En passant à une sous-suite à nouveau notée S_k, on peut supposer $\sum_n \|[S_n, S_{n+1}]\| < \infty$.
Notons $\varepsilon_n = \|[S_n, S_{n+1}]\|$ et $A(n, k) = S_n \cdots S_{n+k-1}$. Alors

$$A(n, k+1) = A(n, k) + A(n, k-1)[S_{n+k-1}, S_{n+k}].$$

Notons

$$M_n(k) = \max_{1 \leq l \leq k} \|A(n, l)\|.$$

Alors $M_n(1) = \|S_n\|$ et $M_n(k+1) \leq M_n(k)(1 + \varepsilon_{n+k-1})$. Donc $\|A(n, k)\| \leq \|S_n\| \prod_{i=n}^{\infty} (1+\varepsilon_i)$ et les $A(n, k)$ sont uniformément bornés. $R_n(x) = \lim_{k \to \infty} A(n, k)x$

est défini pour $x \in \bigcup_n \operatorname{im} S_n$ et donc pour $x \in X$ par densité et la borne uniforme. R_n est de rang fini et vérifie encore $R_m R_n = R_n$ pour $m > n$. Mais alors

$$\begin{aligned}[R_m,\, R_n] = R_n - R_n R_m &= R_n - S_n \cdots S_m R_m \\ &= S_n \cdots S_{m-2}(S_{m-1} - S_{m-1} S_m) R_m \\ &= A(n,\, m-n-1)[S_{m-1},\, S_m] R_m\end{aligned}$$

et donc $[R_m,\, R_n] \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ pour tout n. La proposition 3.2 permet de conclure. ■
On a immédiatement le

Corollaire 3.4 *Si $\{T_n\}$ est commutative, il existe une suite approximante $\{R_n\}$ et une sous-suite $\{T_{k_n}\}$ telles que $T_{k_n} - R_n \to 0$ et $R_m R_n = R_n R_m = R_m$ si $n > m$.*

Proposition 3.5 (Johnson) *Si X a la CBAP, alors il existe une norme équivalente sur X pour laquelle X a la CMAP.*

Démonstration. On peut supposer que $T_n T_m = T_m T_n = T_n$ pour $m > n$. $|||x||| = \sup_n \|T_n x\|$ définit par hypothèse une norme équivalente sur X. Posons

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=\frac{(n-1)n}{2}+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} T_k.$$

Alors $S_n S_m = S_m S_n = S_n$ pour $m > n$, $S_n x \to x$ pour tout $x \in X$ et $|||S_n||| \to 1$. ■

Théorème 3.6 (Casazza–Kalton) *Si X a la MAP, alors X a la CMAP.*

Démonstration. Par le scholie 3.1, il existe une suite approximante $\{T_n\}$ telle que $T_m T_n = T_n$ pour $m > n$ et $\|T_n\| \le 1 + \varepsilon_n$, où on peut imposer $\sum_n \varepsilon_n = \alpha < \infty$. Notons

$$V_n(t) = \exp(t \sum_{k=1}^{n} (T_k - Id|_X)) \qquad (t > 0).$$

Alors

$$\|V_n(t)\| \le e^{-nt} \exp(t \sum_{k=1}^{n} \|T_k\|) \le e^{\alpha t}.$$

Si $x \in E_n$ et $m > n$, alors $V_m(t)x = V_n(t)x$: il s'ensuit que $S(t)x = \lim_{n\to\infty} V_n(t)x$ est bien défini pour $x \in \sum_n E_n$ et donc pour tout $x \in X$ par densité et par la norme uniforme sur $V_n(t)$. De plus, $S(t)$ vérifie

$$\begin{cases} (i)\ \|S(t)\| \le e^{\alpha t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \\ (ii)\ \forall t_1,\, t_2 > 0\ S(t_1 + t_2) = S(t_1) S(t_2), \\ (iii)\ \forall x \in X\ S(t)x \xrightarrow[t\to 0]{} x \\ (iv)\ \forall t > 0\ S(t) \text{ est compact.} \end{cases}$$

(ii) vaut car les $V_n(t)$ forment des semi-groupes à n fixé. (iii) vaut pour $x \in E_n$ et par densité pour $x \in X$. Montrons (iv) : soit $x \in E_n$ et $l < n$ et calculons $d(S(t)x,\, E_l) = d(V_n(t)x,\, E_l)$. En développant l'opérateur $\exp(T_1 + \cdots + T_n) - \exp(T_{l+1} + \cdots + T_n)$, on note que son image est contenue dans E_l. Donc

$$\begin{aligned} d(S(t)x,\, E_l) &= e^{-nt} d(\exp t(T_{l+1} + \cdots + T_n)x,\, E_l) \\ &\leq e^{-nt} \|\exp t(T_{l+1} + \cdots + T_n)\|\, \|x\| \\ &\leq e^{\alpha t} e^{-lt} \|x\|. \end{aligned}$$

Cette inégalité vaut par densité pour tout $x \in X$; elle montre que l'image par $S(t)$ de la boule unité est précompacte.
Il existe donc une suite $\{R_n\}$ d'opérateurs de rang fini telle que $R_n - S(\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors $\|R_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $[R_m,\, R_n] \xrightarrow[m,\, n\to\infty]{} 0$ puisque les $S(\frac{1}{n})$ commutent. On conclut en appliquant le corollaire 3.3. ■

3.2 Le cas où l'espace ne contient pas l_1

Dans ce cas, nous pouvons affiner le théorème 3.6 : la suite approximante commutative peut être choisie uniformément proche du semi-groupe convexe engendré par une suite approximante de contractions.

3.2.1 La topologie des boules

Le lemme suivant est la pierre angulaire du théorème de cette section.

Lemme 3.7 (Godefroy–Kalton) *Si X ne contient pas l_1 et $P : X^{**} \to X^{**}$ est une projection de norme 1 telle que $X \subseteq \operatorname{im} P$, alors $\ker P$ est w^*-fermé.*

Nous allons utiliser un résultat sur la topologie des boules b_X, *i. e.* la topologie la plus faible telle que les boules fermées pour la norme de X soient fermées. En particulier, elle est plus faible que la topologie préfaible. Un point $x \in X$ y a pour base de voisinages les $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\, r_i)$, où $\|x - x_i\| > r_i$. Donc

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow[\alpha\to\mathcal{F}]{b_X} x \quad &\iff \quad \forall y \in X \quad \|x - y\| > r \;\Rightarrow\; \exists \alpha\; \forall \beta \geq \alpha\; \|x_\beta - y\| > r \\ &\iff \quad \forall y \in X \quad \liminf_{\alpha\to\mathcal{F}} \|x_\alpha - y\| \geq \|x - y\| \end{aligned}$$

Résultat 3.8 (Godefroy–Kalton) *Soit $X \subseteq Y \subseteq X^{**}$ un sous-espace fermé. Si X ne contient pas l_1, alors $(B_Y,\, b_Y)$ est séparé.*

Démonstration du lemme. Notons $Y = \operatorname{im} P$ et soit $\{x_\alpha\} \subseteq B_Y$ un filtre tel que $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\to\mathcal{F}]{w^*} x^{**}$. Alors

$$\forall y \in Y \qquad \liminf_{\alpha\to\mathcal{F}} \|x_\alpha - y\| \geq \|x - y\| \geq \|Px^{**} - y\|,$$

i. e. $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\to\mathcal{F}]{b_Y} Px^{**}$.

Si $x^{**} \in \ker P \cap B_{X^{**}}$, alors il existe $\{x_\alpha\} \subseteq B_X \subseteq B_Y$ tel que $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\to\mathcal{F}]{w^*} x^{**}$ et, par ce qui précède, $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\to\mathcal{F}]{b_Y} Px^{**} = 0$. Inversement, dès qu'il existe $\{x_\alpha\} \subseteq B_Y$ tel que $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\to\mathcal{F}]{w^*} x^{**}$ et $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\to\mathcal{F}]{b_Y} 0$, comme $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\to\mathcal{F}]{b_Y} Px^{**}$ et que (B_Y, b_Y) est séparée par le résultat 3.8, $Px^{**} = 0$. Donc

$$\ker P \cap B_{X^{**}} = \bigcap_{V\ (B_Y,\, b_Y)\text{-voisinage de } 0} \overline{V}^{w^*},$$

et $\ker P \cap B_{X^{**}}$ est w^*-fermé. Par le théorème de Banach-Dieudonné, $\ker P$ est w^*-fermé. ■

3.2.2 Le théorème de Godefroy–Kalton

Scholie 3.9 *Si $\{T_n\}$ vérifie $T_n^* T_m^* - T_m^* \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe une suite approximante $\{S_n\}$ et une sous-suite $\{T_{k_n}\}$ tels que $T_{k_n} - S_n \to 0$ et $S_n S_m = S_m S_n = S_m$ si $n > m$.*

Démonstration. Nous allons construire les S_n et les k_n par récurrence. Soit $S_1 = T_1$ et supposons les S_m construits tels que

$$\begin{cases} S_m S_k = S_k S_m = S_k \text{ si } n > m > k, \\ X_n = \operatorname{im} S_{n-1} \subseteq \sum\limits_{j=1}^{n-1} \operatorname{im} T_{k_j} \text{ et} \\ X_n^* = \operatorname{im} S_{n-1}^* \subseteq \sum\limits_{j=1}^{n-1} \operatorname{im} T_{k_j}^*. \end{cases}$$

Soit k_n tel que $\|T_{k_n}|_{X_n} - Id|_{X_n}\| < \varepsilon < 1$ et $\|T_{k_n}^*|_{X_n^*} - Id|_{X_n^*}\| < \eta < 1$ avec $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \dim X_n < \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}\|T\| + \eta < \rho < 1$ et $\frac{\rho}{1-\rho} \dim X_n^* < \frac{1}{n}$. Alors par le lemme 2.4, il existe S_n tel que

$$\begin{cases} S_n x = x \text{ pour } x \in X_n, \\ S_n^* x^* = x^* \text{ pour } x^* \in X_n^* \text{ et} \\ \|S_n - T_{k_n}\| < \frac{3}{n}\|T_{k_n}\|. \end{cases}$$

De plus, $\operatorname{im} S_n \subseteq \sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname{im} T_{k_j}$ et $\operatorname{im} S_n^* \subseteq \sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname{im} T_{k_j}^*$.

La suite $\{S_n\}$ est approximante et vérifie clairement $S_n S_m = S_m S_n = S_m$ si $m < n$ et $T_{k_n} - S_n \to 0$. ■

Définition 3.10 *M est localement complémenté dans X si pour tout F de dimension finie, il existe $A : F \to M$ borné indépendamment de F tel que $Ax = x$ pour $x \in F \cap M$.*

Scholie 3.11 *Soit $P : X^* \to X^*$ une projection de noyau $M^\perp$, où M est fermé. Alors M est localement complémenté dans X.*

Démonstration. $P^* : X^* \to X^*$ a pour image $M^{\perp\perp} = \overline{M}^{w^*} = M^{**}$. Soit $F \subseteq X$ de dimension finie et $\varepsilon > 0$. Par le principe de réflexivité locale appliqué à M, il existe $T : P^*(F) \to M$ tel que $Tx = x$ pour $x \in M$ et $\|T^{-1}\| \, \|T\| \leq 1 + \varepsilon$. Alors $TP^*|_F : F \to M$ vérifie l'hypothèse. ■

Scholie 3.12 *Soit Z un sous-espace séparable de E et $\{S_n\}$ une suite d'opérateurs tels que $S_n x \xrightarrow[n\to\mathcal{F}]{w} Sx$ pour $x \in M$ et un filtre $\mathcal{F}$. Alors il existe une suite $\{R_n\}$ de combinaisons convexes successives des S_n telle que $R_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Sx$ pour $x \in M$.*

Démonstration. Soit $\{x_i\}$ dense dans M. Pour chaque suite $\{R_{k,\,n}\}$ telle que

$$R_{k,\,n} x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} Sx_i \quad \text{pour chaque } i \in \{1, \dots, k\},$$

il existe par le théorème de Mazur une suite $\{R_{k+1,\,n}\}$ de combinaisons convexes successives des $R_{k,\,n}$ telle que $R_{k+1,\,n} x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} Sx_i$ lorsque $1 \leq i \leq k+1$.
La suite des $R_n = R_{n,\,n}$ vérifie alors la conclusion. ■

Lemme 3.13 (Godefroy–Kalton) *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre tel que*

$$Px^{**} = w^*\text{-}\lim_{n\to\mathcal{U}} T_n^{**} x^{**}$$

définit une projection bornée de noyau w^*-fermé. Alors il existe une suite $\{C_k\}$ de combinaisons convexes successives des $T_n T_m$, $n < m$ et une suite $\{B_k\}$ d'opérateurs de rang fini telles que $C_k - B_k \to 0$ et $B_n B_k = B_k B_n = B_k$ pour $k < n$.

Démonstration. $M = (\ker P)_\perp$ est fermé. Notons $Q : X^* \to X^*/M$ l'application quotient canonique.

■ Construisons une suite $\{V_n\}$ telle que $\begin{cases} (i)\ QV_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ et} \\ (ii)\ V_n^* x^* \xrightarrow[n\to\infty]{} x^* \text{ pour } x^* \in M. \end{cases}$

(i) Si $x^* \in M$, alors

$$\langle x^{**}, T_n^* x^* \rangle \to \langle Px^{**}, x^* \rangle = \langle x^{**}, x^* \rangle,$$

c'est-à-dire $T_n^* x^* \xrightarrow[n\to\mathcal{U}]{w} x^*$. Donc $M \subseteq Z = \overline{\sum \operatorname{im} T_n^*}$; comme Z est séparable, M l'est aussi. Par le scholie 3.12, il existe une suite $\{S_n\}$ de combinaisons convexes successives des T_n telle que $S_n^* x^* \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$.
(ii) On a $\langle x^{**}, QS_n^* x^* \rangle \xrightarrow[n\to\mathcal{U}]{} \langle PQ^* x^{**}, x^* \rangle = 0$, c'est-à-dire $QS_n^* x^* \xrightarrow[n\to\mathcal{U}]{w} 0$. Par le scholie 3.12, il existe une suite $\{D_n\}$ de combinaisons convexes successives des S_n telle que $QD_n^* x^* \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour $x^* \in Z$. Alors $QD_n^* D_k^* \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puisque D_k^*

est de rang fini. On peut donc choisir une sous-suite $\{U_n\}$ de $\{D_n\}$ telle que $V_n = U_n U_{n+1}$ vérifie $QV_n^* \to 0$. $\{V_n\}$ est encore une suite approximante :

$$\left\{\begin{array}{l}\|U_n x - x\| < \varepsilon \\ \|U_{n+1}x - x\| < \varepsilon\end{array}\right. \implies \|V_k x - x\| = \|U_n(U_{n+1}x - x) + U_n x - x\| < (\|U_n\|+1)\varepsilon.$$

De même, on a encore $V_n^* x^* \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$ pour $x^* \in M$.

■ On voudrait trouver une suite $\{U_n\}$ d'opérateurs de rang fini telle que $U_n - V_n \to 0$ et $\operatorname{im} U_n^* \subseteq M$. Comme $QV_n^* \to 0$, on a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \exists M' \subseteq M \text{ de dimension finie } \inf_{m \in M'} \|V_n^* x^* - m\| < \varepsilon \|x^*\|$$

On peut donc trouver une suite de $M_n \subseteq M$ de dimension finie telle que

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} \inf_{m \in M_n} \|V_n^* x^* - m\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Or M est localement complémenté par le scholie 3.11 : pour chaque $F_n = \operatorname{im} V_n^* + M_n$, il existe un opérateur $A_n : F_n \to M$ borné indépendamment de n tel que $A_n x = x$ pour $x \in F_n$. Les opérateurs U_n tels que $U_n^* = A_n V_n^*$ conviennent alors :

$$\begin{aligned}\|V_n - U_n\| &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|V_n^* x^* - A_n V_n^* x^*\| \\ &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} \inf_{m \in M_n} \|V_n^* x^* - m - A_n(V_n^* x^* - m)\| \to 0\end{aligned}$$

Mais alors $U_n^* U_m^* - U_m^* \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puisque U_m^* est de rang fini. Le scholie 3.9 permet alors de conclure. ■

Supposons à présent que $\{T_n\}$ est une suite approximante de contractions. Notons $\mathcal{S}$ le semi-groupe convexe qu'elle engendre, $\mathcal{S}^*$ la fermeture de $\mathcal{S}$ dans la topologie faible des opérateurs de X^{**} dans X^{**} et $\mathcal{S}_0 = \{T \in \mathcal{S}^*; T|_X = Id|_X\}$. $\mathcal{S}_0$ n'est pas vide par hypothèse.

Théorème 3.14 (Godefroy–Kalton) *Si X ne contient pas l_1, il existe une suite $\{S_n\}$ dans $\mathcal{S}$ et une suite approximante $\{R_n\}$ telle que $S_n - R_n \to 0$ et $R_n R_k = R_k R_n = R_k$ pour $k < n$.*

Démonstration. Définissons un ordre sur $\mathcal{S}_0$ par

$$S \leq T \quad \Leftrightarrow \quad \forall x^{**} \in X^{**}\ \|Sx^{**}\| \leq \|Tx^{**}\|.$$

$(\mathcal{S}_\prime, \leq)$ est un ensemble inductif et, par le théorème de Zorn, contient un élément minimal P. Montrons que P est une projection. En effet, on a $\|SPx^{**} = Px^{**}\|$ pour tout $x^{**} \in X^{**}$ et tout $S \in \mathcal{S}$, en particulier pour $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P^k$. Or $S_n(P^2 - P) = \frac{1}{n}(P^{n+2} - P^2)$ et

$$\|S_n(P^2 - P)x^{**}\| = \|S_n P(Px^{**} - x^{**}\| = \|(P^2 - P)x^{**}\|;$$

donc $\|P^2 - P\| \leq \frac{2}{n}$ pour tout n et $P^2 = P$. Finalement, comme $\mathcal{S}$ est séparable en norme, il existe une suite $\{R_n\}$ d'opérateurs de rang fini de $\mathcal{S}$ et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ tels que $Px^{**} = w^*\text{-}\lim_{n\to\mathcal{U}} R_n^{**}$. Par le lemme 3.7, $\ker P$ est w^*-fermé et on peut appliquer le lemme 3.12. ■

4 Problèmes

Trois problèmes majeurs se posent dès lors :

Problème 4.1 *De manière équivalente,*
(i) Si X a la BAP, existe-t-il une norme équivalente sur X pour laquelle X a la MAP ?
(ii) Est-ce que BAP implique $CBAP$?

Problème 4.2 *Le théorème de Godefroy–Kalton vaut-il toujours lorsque X contient l_1 ?*

Problème 4.3 *Que se passe-t-il dans le cas où X n'est pas séparable ?*