Théories spectrales

Stefan Neuwirth

Introduction historique

Voici le point de départ historique de la théorie des opérateurs : le problème de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} (pv')' + qv = r(\lambda v + w) \\ \alpha v(a) + \alpha' v'(a) = 0 \\ \beta v(b) + \beta' v'(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où $p \in \mathscr{C}^1[a,b]$ est strictement positive, $q \in \mathscr{C}[a,b]$ est réelle, le *poids* $r \in \mathscr{C}[a,b]$ est strictement positif et $(\alpha,\alpha'),(\beta,\beta') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: il s'agit de trouver $v \in \mathscr{C}^2[a,b]$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$ et du *terme inhomogène* $w \in \mathscr{C}[a,b]$. L'*équation homogène associée* est l'équation (1) avec $w = 0$. Sturm a montré en 1836 que les λ pour lesquels l'équation homogène a une solution non nulle forment une suite de nombres réels qui tend vers $-\infty$; si λ n'est pas un terme de cette suite, alors la solution de l'équation (1) est de la forme

$$v(s) = \int_a^b k(s,t) w(t) (r(t)\,\mathrm{d}t). \tag{2}$$

Notons E l'espace vectoriel des $v \in \mathscr{C}^2[a,b]$ tels que $\alpha v(a) + \alpha' v'(a) = \beta v(b) + \beta' v'(b) = 0$. En langage moderne, la suite des λ est formée des valeurs propres de l'opérateur différentiel

$$\begin{aligned} x\colon E &\to \mathscr{C}[a,b] \\ v &\mapsto \frac{(pv')' + qv}{r}. \end{aligned}$$

$\mathscr{C}[a,b]$ est un espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire défini par

$$\langle v, w \rangle = \int_a^b v(t)\overline{w(t)}(r(t)\,\mathrm{d}t).$$

Notons $\|v\|_2 = \langle v, v\rangle^{1/2}$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ n'est pas valeur propre, nous allons montrer que l'opérateur $x - \lambda$ admet un inverse à gauche y de la forme

$$(y(w))(s) = \langle w, k(s,\cdot)\rangle = \int_a^b k(s,t) w(t) (r(t)\,\mathrm{d}t).$$

avec $k \in \mathscr{C}([a,b] \times [a,b])$ réelle et symétrique : y est un endomorphisme hermitien de l'espace préhilbertien $\mathscr{C}[a,b]$. On dit que y est un *opérateur intégral de noyau intégral* k. Les valeurs propres μ non nulles de y sont les inverses des valeurs propres de $x - \lambda$: nous allons démontrer que seul un nombre fini d'entre elles sont positives et qu'elles forment une suite réelle qui tend vers 0 par valeurs négatives ; les espaces propres associés sont de dimension 1 et il y a donc (à multiplication par un nombre complexe de module 1 près) exactement une fonction propre w_μ associée à μ telle que $\|w_\mu\|_2 = 1$. De plus, la suite des w_μ forme une base hilbertienne orthonormée de l'espace préhilbertien $\mathscr{C}[a,b]$.
Considérons le cas particulier $a = 0$, $b = 1$, $p = r = 1$, $q = 0$, $\alpha' = \beta' = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} v'' = \lambda v + w \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

Alors les valeurs propres de x sont les $-n^2\pi^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ de fonction propre associée $v_n(s) = \sqrt{2}\sin(n\pi s)$. L'inverse à gauche de x est l'opérateur intégral de noyau

$$k(s,t) = \begin{cases} (s-1)t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant s \\ (t-1)s & \text{si } s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} = st - \min(s,t).$$

Pour toute fonction $w \in \mathscr{C}[a,b]$, on a

$$\Big\| w - \sum_{n=1}^{N} \langle w, v_n \rangle v_n \Big\|_2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

et la solution de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $v'' = w$ avec condition aux bords $v(0) = v(1) = 0$ est donc la fonction

$$v(s) = \int_0^1 k(s,t)w(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N} \frac{-1}{n^2\pi^2}\langle w, v_n \rangle v_n.$$

Pour résoudre cette équation différentielle, il est donc très utile de calculer la suite des coefficients $\langle w, v_n \rangle$. Cette remarque est à l'origine de l'*analyse de Fourier.*

Premier chapitre

Définition d'une algèbre

1.1 Définition d'une algèbre

Définition 1.1.1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

(*i*) Une algèbre sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A, muni d'une application $\mathbb{K}$-bilinéaire

$$\begin{aligned} A \times A &\to A \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

appelée la *multiplication* dans A, qui est associative. La multiplication dans A satisfait donc

$$\begin{aligned} \lambda(xy) &= (\lambda x)y = x(\lambda y) \\ (x + y)z &= xz + yz \\ x(y + z) &= xy + xz \\ x(yz) &= (xy)z \end{aligned}$$

pour tous $x, y, z \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(*ii*) Lorsque la multiplication dans A admet un élément neutre u, c'est-à-dire que

$$ux = xu = x$$

pour tout $x \in A$, on dit que u est l'*unité* de A et que A est une algèbre *unifère*.

(*iii*) Soit A une algèbre munie d'une unité u. Un élément $x \in A$ est *inversible* s'il existe $y \in A$ tel que $xy = yx = u$. On note alors $y = x^{-1}$. L'ensemble des éléments inversibles est noté A^{-1}.

(*iv*) Lorsque la multiplication dans A est commutative, c'est-à-dire que

$$xy = yx$$

pour tous $x, y \in A$, on dit que A est *commutative*.

(*v*) Étant données deux $\mathbb{K}$-algèbres A et B, on appelle *morphisme d'algèbres* de A dans B une application linéaire $\varphi\colon A \to B$ telle que φ soit *multiplicative* :

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

pour tous $x, y \in A$. Si A et B sont unifères et φ transforme l'unité de A en l'unité de B, on dit que φ est un *morphisme d'algèbres unifères*.

(*vi*) Un sous-espace vectoriel B de l'algèbre A est une *sous-algèbre* si $xy \in B$ pour tous $x, y \in B$.

(*vii*) Un sous-espace vectoriel B de l'algèbre A est un *idéal* si $xy, yx \in B$ pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$.

Remarque 1.1.1. A est une algèbre unifère si et seulement si A est un anneau et

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ \mathbb{K} &\to A \\ \lambda &\mapsto \lambda u \end{aligned} \tag{1.1}$$

est un morphisme d'anneaux, où u est l'unité de l'anneau A.

Exemple d'algèbre 1. Le corps commutatif $\mathbb{K}$ muni de la multiplication donnée par la structure de corps est une algèbre commutative sur $\mathbb{K}$ dont l'unité est 1.

Les corps que nous allons effectivement considérer dans ce cours sont le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et sa clôture algébrique, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Mais nous essaierons de ne pas exclure d'autres corps, comme le corps fini $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier, si ce n'est pas nécessaire.

Remarque 1.1.2. Si A admet une *unité à gauche* u_1 :

$$u_1 x = x \text{ pour tout } x \in A$$

et une *unité à droite* u_2 :

$$xu_2 = x \text{ pour tout } x \in A,$$

alors $u_1 = u_2$.

Remarque 1.1.3. Si x admet un *inverse à gauche* y_1, c'est-à-dire que $y_1 x = u$, et un *inverse à droite* y_2, c'est-à-dire que $xy_2 = u$, alors $y_1 = y_2$.

Remarque 1.1.4. Le noyau d'un morphisme d'algèbres est un idéal ; son image est une algèbre.

Exemple d'algèbre 2 (la multiplication triviale)**.** Soit A un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque. Alors la multiplication définie par $xy = 0$ quels que soient $x, y \in A$ munit A d'une structure d'algèbre commutative. Si $A \neq \{0\}$, A n'est pas unifère.

Proposition 1.1.1. *Si $\varphi\colon A \to B$ est un morphisme d'algèbres unifères et $x \in A$ est inversible, alors $\varphi(x)$ est inversible et $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$.*

Démonstration. Si x est inversible, alors

$$\varphi(x^{-1})\varphi(x) = \varphi(x^{-1}x) = \varphi(u_A) = u_B$$

et aussi $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = u_B$. □

1.2 Définition d'une algèbre involutive

Définition 1.2.1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif muni d'une morphisme de corps involutif $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$, qu'on appellera *conjugaison* :

$$\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu},\ \overline{\lambda\mu} = \bar{\lambda}\bar{\mu},\ \bar{\bar{\lambda}} = \lambda.$$

(*i*) Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. Une *involution* de A est une application semilinéaire, antimultiplicative et involutive $x \mapsto x^*$ de A dans A :

$$(x + y)^* = x^* + y^*,\ (\lambda x^*) = \bar{\lambda} x^*,\ (xy)^* = y^* x^*,\ (x^*)^* = x.$$

L'élément x^* est *l'adjoint* de x. Une algèbre *involutive* est une algèbre munie d'une involution.

(*ii*) Une partie B de A est *autoadjointe* si $x^* \in B$ pour tout $x \in B$; si B est une sous-algèbre, on dit aussi que B est une *sous-algèbre involutive.*

(*iii*) Si $x^* = x$, x est *hermitien.*

(*iv*) S'il existe $y_1, \dots, y_k \in A$ tels que $x = y_1^* y_1 + \dots + y_k^* y_k$, x est *positif.*

(*v*) Si $xx^* = x^* x$, x est *normal.*

(*vi*) Si A admet une unité u et $x^* x = xx^* = u$, x est *unitaire.*

(*vii*) Si B est une deuxième algèbre involutive et $\varphi\colon A \to B$ est un morphisme d'algèbres tel que $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ pour tout $x \in A$, on dit que φ est un *morphisme d'algèbres involutives*.

Exemple d'algèbre 3. Si $\mathbb{K}$ est muni d'un morphisme de corps involutif, alors la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}$ peut être munie de l'involution définie par $x^* = \bar{x}$.

Remarque 1.2.1. On peut munir tout corps $\mathbb{K}$ de l'automorphisme involutif identité, défini par $\bar{\lambda} = \lambda$. Dans ce cas, toute $\mathbb{K}$-algèbre commutative peut être munie de l'involution identité, définie par $x^* = x$, mais nous essaierons de ne pas exclure d'autres corps, comme les extensions de corps de degré 2, si ce n'est pas nécessaire.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'unique morphisme de corps involutif est l'identité. Le corps $\mathbb{C}$ admet exactement deux morphismes de corps involutifs, l'identité et la conjugaison. Nous n'allons considérer que $\mathbb{R}$ muni de l'identité et $\mathbb{C}$ muni de la conjugaison dans ce cours.

- Dans le cas de l'algèbre $\mathbb{R}$, tout élément est hermitien, un élément positif est un nombre positif et les seuls éléments unitaires sont 1 et -1.
- Dans le cas de l'algèbre $\mathbb{C}$, un élément hermitien est un nombre réel, un élément positif est un nombre réel positif et un élément unitaire est un nombre complexe de module 1.

Remarque 1.2.2. Si A est une algèbre commutative involutive, tout élément de A est normal.

Remarque 1.2.3. Le noyau d'un morphisme d'algèbres involutives est un idéal autoadjoint ; son image est une algèbre involutive. L'image d'un élément hermitien, positif, normal est respectivement un élément hermitien, positif, normal.

Proposition 1.2.1. *Soit A une algèbre involutive munie d'une unité u. Alors $u^* = u$. Si $x \in A$, alors x est inversible si et seulement si x^* est inversible et alors $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.*

Deuxième chapitre

Algèbres linéaires

2.1 Algèbres de matrices

2.1.1 Algèbre des matrices $n \times n$

Exemple d'algèbre 4. L'algèbre $\mathscr{M}_n$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. La multiplication est définie par

$$(xy)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj} \quad \text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2. \tag{2.1}$$

Si $n \geqslant 2$, cette algèbre n'est pas commutative. L'unité de $\mathscr{M}_n$ est la matrice identité, notée Id. Si $\mathbb{K}$ est muni d'une morphisme de corps involutif, l'application définie par

$$(x^*)_{ij} = \overline{x_{ji}} \quad \text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$$

est une involution de $\mathscr{M}_n$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette involution est la transposition ; alors les éléments hermitiens, positifs et unitaires de $\mathscr{M}_n$ sont respectivement les matrices symétriques, positives et orthogonales. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cette involution est l'adjonction ; alors les éléments hermitiens, positifs et unitaires de $\mathscr{M}_n$ sont respectivement les matrices hermitiennes, positives et unitaires. La formule de la comatrice montre qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

2.1.2 Algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans une algèbre

Exemple d'algèbre 5. Soit A une algèbre. L'algèbre $\mathscr{M}_n(A)$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans A est munie de la multiplication définie par (2.1). Elle est unifère si et seulement si A est unifère et alors son unité est la matrice diagonale dont chaque coefficient diagonal est l'unité de A. Si A est une algèbre involutive, l'application définie par

$$(x^*)_{ij} = x^*_{ji} \quad \text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$$

est une involution de $\mathscr{M}_n(A)$. Si A est l'algèbre $\mathscr{M}_m$, alors l'application qui à $x \in \mathscr{M}_n(\mathscr{M}_m)$ associe la matrice par blocs $y \in \mathscr{M}_{nm}$ définie par

$$y_{(i-1)m+k,(j-1)m+l} = (x_{ij})_{kl} \quad \text{pour tout } \big((i,j),(k,l)\big) \in [\![1,n]\!]^2 \times [\![1,m]\!]^2$$

est un isomorphisme d'algèbres unifères involutives.

2.1.3 Limite inductive des $\mathscr{M}_n(A)$

Exemple d'algèbre 6. Soit A une algèbre. Si $n \leqslant m$, alors $\mathscr{M}_n(A)$ est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathscr{M}_m(A)$ formée des matrices à coefficients nuls hors du coin $n \times n$ en haut à gauche. En identifiant $\mathscr{M}_n(A)$ à cette sous-algèbre, on peut former la somme et le produit d'une matrice de taille n avec une matrice de taille m dans $\mathscr{M}_m(A)$. Ces opérations munissent $\mathscr{M}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{M}_n(A)$ d'une structure d'algèbre. $\mathscr{M}_\infty(A)$ est la *limite inductive des $\mathscr{M}_n(A)$ pour $n \to \infty$*. Si $A \neq \{0\}$, elle n'est pas unifère. Si A est involutive, $\mathscr{M}_\infty(A)$ l'est aussi.

2.2 Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel

2.2.1 Morphisme et quotient d'espaces vectoriels

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $\mathbb{K}$-linéaire x de E dans F est un *morphisme d'espaces vectoriels*. On dit aussi que x est un *opérateur*. On note $\ker x = \{v \in E : x(v) = 0\}$ le *noyau* de x et $\operatorname{im} x = x(E) = \{w \in F : \exists\, v \in E\ x(v) = w\}$ l'*image* de x. Si x est une bijection, alors l'application réciproque $y\colon F \to E$ est $\mathbb{K}$-linéaire : c'est l'opérateur inverse de x et on note $y = x^{-1}$.
Si S est un sous-espace vectoriel de E, le *quotient E/S* est l'espace vectoriel des classes d'équivalence modulo S. Si E/S est de dimension finie, alors sa dimension est la *codimension* de S dans E. Notons $v + S$ la classe de v modulo S et soit

$$\begin{aligned} \pi\colon\ E &\to E/S \\ v &\mapsto v + S \end{aligned}$$

l'application quotient canonique. Pour tout opérateur $x\colon E \to F$ de noyau S, il existe une *factorisation canonique* unique

$$\begin{tikzcd} E/S \arrow[r, "\tilde{x}"] & \operatorname{im} x \arrow[d, "\iota"] \\ E \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "x"] & F \end{tikzcd}$$

où ι est l'inclusion. En effet, si $v - v_1 \in S$, alors $x(v) = x(v_1)$: on peut donc définir $\tilde{x}$ de sorte que le diagramme commute. Si $x = \iota \circ y \circ \pi$, alors $y(v + S) = \tilde{x}(v + S)$ pour tout $v \in E$: donc $y = \tilde{x}$. De plus, $\tilde{x}$ est un isomorphisme : $\tilde{x}$ est injectif puisque si $\tilde{x}(v + S) = 0$, alors $x(v) = 0$ et $v \in S$. En particulier, $\dim \operatorname{im} x = \dim E/S$ si ces espaces sont de dimension finie.
Le *conoyau* de x est $\operatorname{coker} x = F/\operatorname{im} x$. Donc, si E et F sont de dimension finie égale, on a le *théorème du rang* :

$$\dim \operatorname{coker} x = \dim F - \dim \operatorname{im} x = \dim \ker x.$$

2.2.2 Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel

Exemple d'algèbre 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $\mathscr{L}(E)$ est une algèbre muni de la multiplication définie par

$$(x \circ y)(v) = x(y(v)) \quad \text{pour tout } v \in E : \tag{2.2}$$

c'est la composition des applications. Cette algèbre n'est pas commutative, sauf si la dimension de E est 0 ou 1. L'unité de $\mathscr{L}(E)$ est l'endomorphisme identité, noté $\operatorname{Id}\colon v \mapsto v$. Un opérateur x est un élément inversible si et seulement si x est une bijection. Si E est de dimension finie, alors x est une bijection dès que x est injectif. Si E n'est pas de dimension finie, c'est faux : soit $(v_j)_{j \in I}$ une base de E, soit $i \in I$ et $\sigma\colon I \to I \setminus \{i\}$ une bijection. Alors l'opérateur défini par $x(v_j) = v_{\sigma(j)}$ est injectif sans être surjectif.

Soit $x \in \mathscr{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E *stable* par x : $x(F) \subset F$. Alors la *restriction de x à F* est l'endomorphisme $x|_F \in \mathscr{L}(F)$ défini par $x|_F(v) = x(v)$ pour tout $v \in F$.
Si A est une algèbre, l'application $L\colon A \mapsto \mathscr{L}(A)$ définie par $L_x(y) = xy$ est un morphisme d'algèbres. Si A admet une unité u, ce morphisme est injectif : en effet, si $L_x = 0$, alors $L_x(u) = x = 0$.

2.3 Algèbre des opérateurs adjoignables sur un espace A-hermitien

2.3.1 Espace A-hermitien

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif muni d'un morphisme de corps involutif $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ et soit A une $\mathbb{K}$-algèbre involutive. E est un *espace A-hermitien* si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une application

$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to A$ appelée *produit intérieur* qui est linéaire à gauche et *A-hermitienne* :

$$\begin{aligned} \langle \lambda v, w \rangle &= \lambda \langle v, w \rangle \,, \\ \langle v_1 + v_2, w \rangle &= \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \,, \\ \langle w, v \rangle &= \langle v, w \rangle^*. \end{aligned}$$

Le produit intérieur est donc semi-linéaire à droite :

$$\begin{aligned} \langle v, \lambda w \rangle &= \langle \lambda w, v \rangle^* = (\lambda \langle w, v \rangle)^* = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle \,, \\ \langle v, w_1 + w_2 \rangle &= \langle w_1 + w_2, v \rangle^* = (\langle w_1, v \rangle + \langle w_2, v \rangle)^* = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle \,. \end{aligned}$$

Si $A = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si le produit intérieur est de plus *défini positif* :

$$\forall\, v \in E \setminus \{0\} \quad \langle v, v \rangle > 0,$$

alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit *scalaire* et E est un espace *préhilbertien* ; on a en particulier l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\forall\, v, w \in E \quad |\langle v, w \rangle| \leqslant \langle v, v \rangle^{1/2} \langle w, w \rangle^{1/2}.$$

Si E est un espace préhilbertien de dimension finie, alors A est un espace *euclidien* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et un espace *hermitien* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Si E est A-hermitien, alors E^n peut être muni du produit intérieur défini par

$$\langle (v_1, \dots v_n), (w_1, \dots w_n) \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, w_k \rangle \,.$$

2.3.2 Orthogonalité intérieure

Si $\langle v, w \rangle = 0$, on dit que v et w sont *orthogonaux* ; on a alors le *théorème de Pythagore* :

$$\langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle \,.$$

Plus généralement, soit S une partie de E. Alors

$$S^{\perp} = \{ w \in E : \forall\, v \in S \;\; \langle v, w \rangle = 0 \}$$

est *l'orthogonal de S dans E*. $S^{\perp}$ est un espace vectoriel et $\operatorname{vect} S \subset (S^{\perp})^{\perp}$. On a $\{0\}^{\perp} = E$.
Si $E^{\perp} = \{0\}$, on dit que le produit intérieur est *non dégénéré*. Un vecteur v est *isotrope* si $\langle v, v \rangle = 0$. Si seul le vecteur nul est isotrope, on dit que le produit intérieur est *anisotrope* : on a alors $S \cap S^{\perp} = \{0\}$. En particulier, tout produit scalaire est anisotrope.

2.3.3 Opérateur adjoignable entre espaces A-hermitiens

Supposons que tous les produits intérieurs considérés sont non dégénérés.
Soient E et F deux espaces A-hermitiens et $x \colon E \to F$. Supposons qu'il existe $x^* \colon F \to E$ tel que

$$\langle x(v), w \rangle = \langle v, x^*(w) \rangle \;\text{ pour tout } v \in E \text{ et } w \in F.$$

On dit que x est *adjoignable*. Alors x^* est unique : c'est l'*adjoint* de x. De plus, x et x^* sont nécessairement $\mathbb{K}$-linéaires et $(x^*)^* = x$. Soit G un troisième espace A-hermitien. Si $y \colon F \to G$ est aussi adjoignable, alors $y \circ x$ l'est et $(y \circ x)^* = x^* \circ y^*$. Si x est inversible, alors x^* est inversible et $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. On a $(\operatorname{im} x)^{\perp} = \ker x^*$. En effet,

$$x^*(w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, v \in E \;\; \langle x^*(w), v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, v \in E \;\; \langle w, x(v) \rangle = 0.$$

On en déduit $\operatorname{im} x^* \subset (\ker x)^{\perp}$. Si $x^* = x^{-1}$, on dit que x est *unitaire*, c'est-à-dire que x est un isomorphisme d'espaces A-hermitiens : x est inversible et

$$\langle x(v), x(w) \rangle = \langle v, w \rangle \qquad \text{pour tous } v, w \in E. \tag{2.3}$$

– Si $A = \mathbb{K} = \mathbb{R}$, x^* est l'opérateur transposé de x et on a

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right). \tag{2.4}$$

– Si $A = \mathbb{K} = \mathbb{C}$, x^* est l'opérateur adjoint de x et on a

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \|v + \mathrm{i}^k w\|^2. \tag{2.5}$$

Les formules (2.4) et (2.5) sont les *formules de polarisation* : elles montrent que si E est un espace préhilbertien, un opérateur x satisfait (2.3) si et seulement si $\langle x(v), x(v)\rangle = \langle v, v\rangle$ pour tout $v \in E$: on dit que x est une *isométrie*.
On note $\mathscr{L}_A(E, F)$ l'ensemble des applications adjoignables.

2.3.4 Algèbre des opérateurs adjoignables

Exemple d'algèbre 8. Soit E un espace muni d'un produit intérieur non dégénéré. Alors $\mathscr{L}_A(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre involutive dont l'unité est Id. Si $A = \mathbb{K}$ et E est de dimension finie, alors $\mathscr{L}_A(E) = \mathscr{L}(E)$ et l'isomorphisme (2.6) est involutif. Plus généralement, notons

$$\begin{aligned} p_k\colon \quad E^n &\to E \\ (v_1, \dots, v_n) &\mapsto v_k. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} p_k^*\colon \ E &\to E^n \\ v_k &\mapsto (0, \dots, 0, v_k, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_A(E^n) &\to \mathscr{M}_n(\mathscr{L}_A(E)) \\ x &\mapsto (p_i \circ x \circ p_j^*)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres unifères involutives puisque c'est une bijection et

$$p_i \circ x \circ y \circ p_j^* = p_i \circ x \circ \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^* \circ p_k\right) \circ y \circ p_j^* = \sum_{k=1}^{n} (p_i \circ x \circ p_k^*) \circ (p_k \circ y \circ p_j^*),$$
$$(p_j \circ x \circ p_i^*)^* = p_i \circ x^* \circ p_j^*.$$

x est un élément hermitien de $\mathscr{L}_A(E)$ si et seulement si

$$\langle x(v), w\rangle = \langle v, x(w)\rangle \text{ pour tous } v, w \in E$$

et un élément normal si et seulement si

$$\langle x(v), x(w)\rangle = \langle x^*(v), x^*(w)\rangle \text{ pour tous } v, w \in E.$$

Proposition 2.3.1. *Soit E un espace muni d'un produit intérieur anisotrope et $x \in \mathscr{L}_A(E)$ normal. Alors $\ker x = \ker x^* = \ker x^* \circ x = \ker x^2$. Donc $\ker x^k \circ x^{*l} = \ker x$ pour tout couple $(k, l) \neq (0, 0)$.*

Démonstration. (i). Prouvons que $\ker x^2 \subset \ker x^* \circ x \subset \ker x$. Si $x^2(v) = 0$, alors ${x^*}^2 \circ x^2(v) = 0$ et donc

$$\left\langle (x^* \circ x)^2(v), v\right\rangle = \langle x^* \circ x(v), x^* \circ x(v)\rangle = 0$$

et $x^* \circ x(v) = 0$. Si $x^* \circ x(v) = 0$, alors $\langle x^* \circ x(v), v\rangle = \langle x(v), x(v)\rangle = 0$ et $x(v) = 0$. Le cas général résulte de ce que $\ker x^{2^{k+1}} \subset \ker {x^*}^{2^k} \circ x^{2^k} \subset \ker x^{2^k}$. ☐

2.4 Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel normé

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Notons $\mathrm{B}_E = \{v \in E : \|v\| \leqslant 1\}$ et $\mathrm{S}_E = \{v \in E : \|v\| = 1\}$ la *boule unité* et la *sphère unité* de E.

2.4.1 Opérateur borné et norme d'opérateur

Soit F un deuxième espace vectoriel normé. Une application $\mathbb{K}$-linéaire continue $x\colon E \to F$ est un *morphisme d'espaces vectoriels normés* ou encore un *opérateur borné*. Alors $\ker x$ est un sous-espace vectoriel fermé de E ; $\operatorname{im} x$ n'est pas fermé en général !
L'espace vectoriel $\mathscr{B}(E,F)$ des opérateurs bornés est normé par la *norme d'opérateur* définie par

$$\|x\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|x(v)\|}{\|v\|} = \sup_{v\in \mathrm{S}_E} \|x(v)\| = \sup_{v\in \mathrm{B}_E} \|x(v)\|.$$

$\|x\|$ est la plus petite constante C telle que $\|x(v)\| \leqslant C\|v\|$ pour tout $v \in E$. C'est aussi la constante de Lipschitz de x.
Soit G est un troisième espace vectoriel normé. Si $x \in \mathscr{B}(E,F)$ et $y \in \mathscr{B}(F,G)$, alors $y\circ x \in \mathscr{B}(E,G)$ et $\|y \circ x\| \leqslant \|y\|\,\|x\|$: en effet, si $v \in \mathrm{B}_E$, alors

$$\|(y\circ x)(v)\| = \|y(x(v))\| \leqslant \|y\|\,\|x(v)\| \leqslant \|y\|\,\|x\|.$$

Supposons que $x \in \mathscr{B}(E,F)$ est une bijection et soit $y\colon F \to E$ l'application réciproque. Alors y est un opérateur qui n'est pas nécessairement borné. En fait, y est borné si et seulement s'il existe c tel que $\|x(v)\| \geqslant c\|v\|$ pour tout $v \in E$; le plus grand c est alors $\|y\|^{-1}$. On dit alors que x est un *opérateur borné inversible*. On note encore $y = x^{-1}$ et on dit que x est un *isomorphisme d'espaces vectoriels normés*. On a néanmoins

Proposition 2.4.1. *Soient E et F deux espaces de Banach et $x \in \mathscr{B}(E,F)$. Alors x est inversible si et seulement si x est une bijection.*

Démonstration. Si x est inversible, x est une bijection. Réciproquement, si x est une bijection, soit $y\colon F \to E$ l'application linéaire inverse de x et montrons que y est continue. Or le graphe de y est

$$\{(w, y(w)) : w \in F\} = \{(x(v), v) : v \in E\}.$$

Par le théorème du graphe fermé, y est continue. □

Le dual $\mathscr{B}(E,\mathbb{K})$ de E est noté E'. C'est un espace de Banach. Par le théorème de Hahn-Banach, on a pour tout $v \in E$

$$\|v\| = \sup_{l\in \mathrm{B}_{E'}} |l\,(v)| = \sup_{l\in \mathrm{S}_{E'}} |l\,(v)|.$$

L'*injection canonique de E dans son bidual* est l'application $\iota_E\colon E \to E''$ définie par $(\iota_E(v))(l) = l(v)$ pour tout $v \in E$ et tout $l \in E'$. Une forme linéaire sur E' est préfaiblement continue si et seulement si elle est de la forme $\iota_E(v)$ pour un $v \in E$.

2.4.2 Orthogonalité duale

Soit E un espace vectoriel normé et S une partie de E. Alors

$$S^\perp = \{l \in E' : \forall v \in S \quad l\,(v) = 0\}$$

est *l'orthogonal de S dans E'*. On a $S^\perp = (\overline{\operatorname{vect} S})^\perp$ et $S^\perp$ est un espace vectoriel préfaiblement fermé : en effet, $S^\perp$ est l'intersection des espaces vectoriels préfaiblement fermés $\ker \iota_E(v) = \{l \in E' : l\,(v) = 0\}$ lorsque v parcourt S.
Soit S une partie de E'. Alors

$$S_\perp = \{v \in E : \forall\, l \in S \quad l\,(v) = 0\}$$

est *l'orthogonal de S dans E*. On a $S_\perp = (\overline{\operatorname{vect} S}^{w^*})_\perp$ et $S_\perp$ est un espace vectoriel fermé : en effet, $S_\perp$ est l'intersection des espaces vectoriels fermés $\ker l = \{v \in E : l\,(v) = 0\}$ lorsque l parcourt S.

Proposition 2.4.2. *Soit E un espace vectoriel normé et S une partie de E. Alors* $(S^{\perp})_{\perp} = \overline{\operatorname{vect} S}$

Démonstration. Si $v \in S$ et $l \in S^{\perp}$, alors $l(v) = 0$: $S \subset (S^{\perp})_{\perp}$ et donc $\overline{\operatorname{vect} S} \subset (S^{\perp})_{\perp}$. Si $v \notin \overline{\operatorname{vect} S}$, il existe $l \in E'$ tel que $l(v) \neq 0$ et $l|_{\overline{\operatorname{vect} S}} = 0$ par le théorème de Hahn-Banach. Donc $l \in S^{\perp}$ et $v \notin (S^{\perp})_{\perp}$. □

De même $(S_{\perp})^{\perp} \subset \overline{\operatorname{vect} S}^{w^*}$ et on peut aussi montrer qu'il y a égalité.

2.4.3 Quotient d'espaces vectoriels normés

Proposition 2.4.3. *Soit E un espace vectoriel normé et S un sous-espace vectoriel de E. Notons*

$$d(v, S) = \inf_{s \in S} \|v - s\|$$

la distance de $v \in E$ à S.

(*i*) $\|v + S\| = d(v, S)$ *est une semi-norme sur E/S.*

(*ii*) *Si S est fermé, alors c'est une norme. En particulier, l'image par l'application quotient canonique π de la boule unité ouverte de E est la boule unité ouverte de E/S : on dit que π est une* surjection métrique.

(*iii*) *Si E est un espace de Banach et S est fermé, alors E/S est un espace de Banach.*

Démonstration. (*i*). Si $v - v_1 \in S$, alors $d(v, S) = d(v_1, S)$: donc $\|v + S\|$ est bien défini. Si $\lambda \neq 0$, $\|\lambda v - s\| = |\lambda| \, \|v - \lambda^{-1} s\|$ et donc $\|\lambda v + S\| = |\lambda| \, \|v + S\|$. De plus,

$$\|v_1 + s_1\| + \|v_2 + s_2\| \geqslant \|(v_1 + v_2) + (s_1 + s_2)\|$$

et donc $\|v_1 + S\| + \|v_2 + S\| \geqslant \|v_1 + v_2 + S\|$.
(*ii*). $\|v + S\| = 0 \;\Leftrightarrow\; d(v, S) = 0 \;\Leftrightarrow\; v \in \overline{S} \;\Leftrightarrow\; v \in S$. Si $\|v + S\| < 1$, il existe $s \in S$ tel que $\|v + s\| < 1$.
(*iii*). Montrons que toute série normalement convergente dans E/S converge : soient $v_n \in E$ tels que $\sum \|v_n + S\|$ converge. Quitte à ajouter à v_n un élément de S, on peut supposer que $\|v_n\| \leqslant \|v_n + S\| + 2^{-n}$. Alors $\sum \|v_n\|$ converge et comme E est complet, $\sum v_n$ converge vers un élement $v \in E$. Donc $\sum (v_n + S) = \sum \pi(v_n)$ converge vers $\pi(v)$. □

Si $x \in \mathscr{B}(E, F)$ considérons la factorisation canonique (attention ! $\operatorname{im} x$ n'est pas fermé dans F en général)

$$\begin{array}{ccc} E/\ker x & \xrightarrow{\tilde{x}} & \operatorname{im} x \\ {\scriptstyle\pi}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\iota} \\ E & \xrightarrow{x} & F. \end{array}$$

Alors $\|\tilde{x}\| = \|x\|$: en effet, $\|\tilde{x}(v + \ker x)\| = \|x(v)\| = \|x(v + s)\|$ pour tout $s \in \ker x$ et donc

$$\|\tilde{x}(v + \ker x)\| = \inf_{s \in S} \|x(v + s)\| \leqslant \inf_{s \in S} \|x\| \, \|v + s\| = \|x\| \, \|v + \ker x\|.$$

Si de plus E est un espace de Banach et $\operatorname{im} x$ est complet, $\tilde{x}$ est une bijection entre espaces de Banach et a donc un inverse $\tilde{x}^{-1}$ borné. Cela donne la proposition suivante.

Proposition 2.4.4. *Soient E et F deux espaces de Banach et $x \in \mathscr{B}(E, F)$.*

(*i*) *L'image de x est fermée si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $w \in \operatorname{im} x$ il existe $v \in E$ tel que $x(v) = w$ et $\|w\| \geqslant c\|v\|$.*

(*ii*) *x est injectif et d'image fermée si et seulement s'il existe $c > 0$ telle que pour tout $v \in E$ on a $\|x(v)\| \geqslant c\|v\|$.*

(*iii*) *x est surjectif si et seulement si x est une* application ouverte *: il existe une constante c telle que $c\mathrm{B}_F \subset x(\mathrm{B}_E)$.*

Démonstration. (i). L'image de x est fermée si et seulement si $\tilde{x}^{-1}$ est borné : il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $w \in \operatorname{im} x$ on a $c\|\tilde{x}^{-1}(w)\| \leqslant \|w\|$. Or $\|\tilde{x}^{-1}(w)\|$ est l'infimum des $\|v\|$ pour v image réciproque de w par x.
(ii). L'opérateur x est injectif si et seulement si pour tout $v \in E$, v est l'unique image réciproque de $x(v)$ par x.
(iii). Si x est surjectif, la partie (i) montre qu'il existe $c > 0$ tel que tout $w \in F$ de norme inférieure à c a une image réciproque de norme inférieure à 1. □

Proposition 2.4.5. *Soit E un espace vectoriel normé et S un sous-espace vectoriel fermé de E.*

(i) *$(E/S)'$ est isométriquement isomorphe à $S^\perp$.*

(ii) *$E'/S^\perp$ est isométriquement isomorphe à S'.*

Démonstration. (i). On vérifie que L'application $l \mapsto l \circ \pi$ est un isomorphisme isométrique entre $(E/S)'$ et $S^\perp$.
(ii). L'application de restriction

$$\begin{aligned} E' &\to S' \\ l &\mapsto l|_S \end{aligned}$$

est une surjection métrique par le théorème de Hahn-Banach. Son noyau est $S^\perp$: sa factorisation canonique définit donc un isomorphisme isométrique entre $E'/S^\perp$ et S'. □

2.4.4 Opérateur transposé

Définition 2.4.1. Soient E et F des espaces vectoriels normés et $x \in \mathscr{B}(E, F)$. L'*opérateur transposé* $x' \colon F' \to E'$ est défini par

$$(x'(l))(v) = l \circ x(v).$$

On appelle aussi x' l'opérateur adjoint à x, qu'il ne faut pas confondre avec l'opérateur adjoint au sens du paragraphe 2.6.2.

Proposition 2.4.6. *L'application $x \mapsto x'$ est isométrique, linéaire et antimultiplicative :*

$$\|x'\| = \|x\|,\ (\lambda x)' = \lambda x',\ (x + y)' = x' + y',\ (x \circ y)' = y' \circ x'.$$

Si $F = E$, $\mathrm{Id}'_E = \mathrm{Id}_{E'}$. De plus,
- $(\operatorname{im} x')_\perp = \ker x$.
- $(\operatorname{im} x)^\perp = \ker x'$ *et donc* $\overline{\operatorname{im} x} = (\ker x')_\perp$.
- *Si l'image de x est fermée, alors $(\operatorname{coker} x)'$ est isométriquement isomorphe à $\ker x'$. En particulier, si $\ker x'$ est de dimension finie, alors $\operatorname{im} x$ est de codimension finie et*

$$\dim \operatorname{coker} x = \dim \ker x'.$$

Démonstration. $v \in \ker x \Leftrightarrow \forall\, l \in E'\ l \circ x(v) = 0 \Leftrightarrow \forall\, l \in E'\ (x'(l))(v) = 0 \Leftrightarrow v \in (\operatorname{im} x')_\perp$ et $l \in \ker x' \Leftrightarrow x'(l) = 0 \Leftrightarrow \forall\, v \in E\ (x'(l))(v) = 0 \Leftrightarrow \forall\, v \in E\ l \circ x(v) = 0 \Leftrightarrow l \in (\operatorname{im} x)^\perp$. Alors $(\ker x')_\perp = ((\operatorname{im} x)^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{im} x}$. Si $\operatorname{im} x$ est fermé, alors $(\operatorname{coker} x)'$ est isométriquement isomorphe à $(\operatorname{im} x)^\perp = \ker x'$. □

Proposition 2.4.7. *Soit $x \in \mathscr{B}(E, F)$. Alors $x'' \circ \iota_E = \iota_F \circ x$: on a le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "x''"] & F'' \\ E \arrow[u, "\iota_E"] \arrow[r, "x"] & F. \arrow[u, "\iota_F"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Si $v \in E$ et $l \in F'$, alors

$$x'' \circ \iota_E(v)\,(l) = \iota_E(v)\,(x'(l)) = x'(l)\,(v) = l\,(x(v)) = \iota_F \circ x(v)\,(l)\,.$$ □

Proposition 2.4.8. *Soit $x \in \mathscr{B}(E,F)$. Si x est inversible, alors x' est inversible et $(x')^{-1} = (x^{-1})'$. Si E et F sont des espaces de Banach, alors la réciproque est vraie.*

Démonstration. Si $x^{-1} = y$, alors $x' \circ y' = (y \circ x)' = \mathrm{Id}_E' = \mathrm{Id}_{E'}$ et de même $y' \circ x' = \mathrm{Id}_{F'}$: donc $y' = (x')^{-1}$. Réciproquement, si x' est inversible, alors x'' est inversible. Notons $\iota_E \colon E \to E''$ l'injection canonique de E dans son bidual. Alors $x'' \circ \iota_E = \iota_F \circ x$: donc x est injectif et $\iota_F(\operatorname{im} x) = x''(\iota_E(E))$. Comme $\iota_E(E)$ est fermé et x'' est inversible, $\operatorname{im} x$ est fermé. Donc $\operatorname{im} x = (\ker x')_\perp$ et comme x' est injectif, x est surjectif. Si $E = F$, on a $(\lambda \mathrm{Id}_E - x)' = \lambda \mathrm{Id}_{E'} - x'$. □

2.4.5 Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel normé

Exemple d'algèbre 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Les opérateurs bornés sur E forment un espace vectoriel normé $\mathscr{B}(E)$ qui est une algèbre muni de la composition comme en (2.2). Comme Id est continu, Id est l'unité de $\mathscr{B}(E)$. Supposons que E est un espace de Banach. Alors un opérateur borné sur E est inversible si et seulement si x est bijectif. Mais en général, un opérateur injectif n'est pas surjectif : si E est un espace de suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que l'opérateur de décalage à droite x qui à la suite $(v_0, v_1, \dots)$ associe la suite $(0, v_0, v_1, \dots)$ est bien défini, alors x est injectif sans être surjectif.

2.4.6 Opérateur compact

Définition 2.4.2. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $x \in \mathscr{B}(E,F)$.
- x est un opérateur *compact* si l'image par x de la boule unité de E est relativement compacte dans F : $\overline{x(\mathrm{B}_E)}$ est compact. On note $\mathscr{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts.
- x est un opérateur *de rang fini* si son image est de dimension finie.

Proposition 2.4.9. *$\mathscr{K}(E,F)$ est un espace vectoriel qui contient les opérateurs de rang fini. Soit G un troisième espace vectoriel normé et $x \in \mathscr{B}(E,F)$, $y \in \mathscr{B}(F,G)$. Si x est compact ou y est compact, alors $y \circ x$ est compact. Donc $\mathscr{K}(E) = \mathscr{K}(E,E)$ est un idéal.*

Démonstration. On a $(\lambda x)(\mathrm{B}_E) = \lambda x(\mathrm{B}_E)$ et $(x+y)(\mathrm{B}_E) \subset x(\mathrm{B}_E) + y(\mathrm{B}_E)$; comme l'homothétique d'un compact est compact et la somme de deux compacts est compacte, $\mathscr{K}(E)$ est un espace vectoriel. Un opérateur de rang fini est compact puisqu'une partie bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est relativement compacte. Si x est compact, alors $(y \circ x)(\mathrm{B}_E) = y(x(\mathrm{B}_E))$ est relativement compact parce que $x(\mathrm{B}_E)$ l'est. Si y est compact, alors $(y \circ x)(\mathrm{B}_E) \subset y(\|x\|\mathrm{B}_E) = \|x\| y(\mathrm{B}_E)$ est relativement compact. □

Proposition 2.4.10. *Si E et F sont des espaces de Banach, alors $\mathscr{K}(E,F)$ est fermé.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite d'opérateurs compacts qui tend vers x dans $\mathscr{B}(E,F)$ et montrons que $x(B_E)$ est relativement compact. Comme E est complet, il suffit de montrer que $x(\mathrm{B}_E)$ est précompact. Soit $\varepsilon > 0$ et n tel que $\|x - x_n\| \leqslant \varepsilon$. Recouvrons $x_n(\mathrm{B}_E)$ par un nombre fini N de boules $\mathrm{B}(x_n(v_k), \varepsilon)$ avec $v_1, \dots, v_N \in \mathrm{B}_E$. Alors $x(\mathrm{B}_E) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}(x(v_k), 3\varepsilon)$: si $v \in \mathrm{B}_E$, il existe k tel que
$$\|x(v) - x(v_k)\| \leqslant \|x(v) - x_n(v)\| + \|x_n(v) - x_n(v_k)\| + \|x_n(v_k) - x(v_k)\| \leqslant 3\varepsilon. \qquad \square$$

Corollaire 2.4.11. *Si E et F sont des espaces de Banach et $x \in \mathscr{B}(E,F)$ est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini, alors x est compact.*

De nombreux espaces de Banach F satisfont la réciproque : $\mathscr{K}(E,F)$ est l'adhérence des opérateurs de rang fini dans $\mathscr{B}(E,F)$ pour tout espace de Banach E ; on dit alors que F a la *propriété d'approximation.*

Proposition 2.4.12. *Soient E et F des espaces de Banach. Un opérateur $x \in \mathscr{B}(E,F)$ est compact si et seulement si son transposé x' l'est.*

Démonstration. Notons τ la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de F. Comme

$$\|x'(l)\| = \sup_{v\in \mathrm{B}_E} |(x'(l))\,(v)| = \sup_{v\in \mathrm{B}_E} |l\,(x(v))| = \sup_{w\in \overline{x(\mathrm{B}_F)}} |l\,(w)|,$$

$x'\colon (F',\tau) \to E'$ est continue si x est compact. Comme $\mathrm{B}_{F'}$ est équicontinue, la topologie τ restreinte à $\mathrm{B}_{F'}$ coïncide avec la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire la topologie préfaible. Or $\mathrm{B}_{F'}$ est préfaiblement compacte : donc $x'(\mathrm{B}_{F'})$ est compact (et pas seulement relativement !) Réciproquement, si x' est compact, alors x'' est compact et donc $\iota_F \circ x = x'' \circ \iota_E$ est compact et $\overline{\iota_F(x(\mathrm{B}_E))}$ est compact. Comme $\iota_F(F)$ est fermé dans F'', $\overline{x(\mathrm{B}_E)}$ est compact. □

Proposition 2.4.13. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soient $E_0 \subset E$ et $F_0 \subset F$ deux sous-espaces vectoriels denses. Soit $x_0 \in \mathscr{K}(E_0, F_0)$ et $x \in \mathscr{B}(E,F)$ son unique prolongement par continuité. Alors $x \in \mathscr{K}(E,F)$ et $\operatorname{im} x \subset F_0$.*

Démonstration. Soit (v_n) une suite bornée dans E. Il existe des $v_n^0 \in E_0$ tels que $v_n - v_n^0 \to 0$. Alors $(x(v_n^0))$ admet une sous-suite $(x(v_{k_n}^0))$ convergente : mais alors $(x(v_{k_n}))$ converge. Donc x est compact. Si $v \in E$, v est limite d'une suite de $v_n^0 \in E_0$; comme x est compact, on peut supposer que $(x(v_n^0))$ converge vers un élément $w \in F_0$: donc $x(v) = w$. □

2.5 Espaces vectoriels de dimension finie

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Alors le dual *algébrique* de E est $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et on peut définir les notions d'orthogonal et d'opérateur transposé comme dans les sections 2.4.2 et 2.4.4.

Supposons maintenant que E est de dimension finie. Alors les propositions 2.4.2, 2.4.5, 2.4.6 et 2.4.7 restent vraies en notant E' le dual algébrique de E et en omettant ce qui réfère à la norme comme les adhérences et le mot “isométrique”. Le théorème de la base incomplète permet d'éviter l'usage du théorème de Hahn-Banach dans la démonstration de la proposition 2.4.2 : si S est un sous-espace vectoriel de E, alors on montre que $\dim S^\perp = \dim E - \dim S$; donc $\dim\,(S^\perp)_\perp = \dim S$ et comme $S \subset (S^\perp)_\perp$, on a $(S^\perp)_\perp = S$.

Si E est de dimension n, soit $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une base de E de base duale $(l_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$:

$$l_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{pour tous } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(E) &\to \mathscr{M}_n \\ x &\mapsto \big(l_i \circ x(v_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \end{aligned} \tag{2.6}$$

est un isomorphisme d'algèbres unifères. En effet, c'est une bijection et

$$l_i \circ \mathrm{Id}(v_j) = l_i(v_j) = \delta_{ij},$$

$$l_i \circ x \circ y(v_j) = l_i \circ x(y(v_j)) = l_i \circ x\left(\sum_{k=1}^n l_k \circ y(v_j) v_k\right) = \sum_{k=1}^n l_i \circ x(v_k)\, l_k \circ y(v_j).$$

Exemple 2.5.1. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{K}_{n-1}[t]$ des polynômes de degré au plus $n-1$ et soit

$$\begin{aligned} l_i\colon\ \mathbb{K}_{n-1}[t] &\to \mathbb{K} \\ p &\mapsto p^{(i)}(0) \end{aligned}$$

pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. Si $p = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1}$, alors $p^{(i)}(0) = i!a_i$ et donc

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} p^{(i)}(0)\frac{t^i}{i!}.$$

Donc $\{l_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la base duale de la base des polynômes $v_j = \dfrac{t^j}{j!}$. Considérons l'opérateur x de dérivation. Alors $x(v_0) = x(1) = 0$ et $x(v_j) = v_{j-1}$. Donc $l_i \circ x(v_j) = \delta_{i\,j-1}$ et la matrice associée à x est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes et $\mathscr{B}(E,F) = \mathscr{L}(E,F)$. En particulier, E' est le dual algébrique de E et E' a la même dimension que E.

2.6 Algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes et E un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien. Alors

$$\|v\| = \langle v, v\rangle^{1/2}$$

définit une norme sur E. Si E muni de cette norme est complet, on dit que E est un *espace de Hilbert*.

2.6.1 Projection orthogonale et théorème de représentation de Fischer-Riesz

Proposition 2.6.1 (théorème de projection)**.** *Soit E un espace de Hilbert et S une partie convexe fermée de E. Pour tout $v \in E$, il existe un unique point $w \in S$ tel que $\|w - v\|$ est minimal.*

Démonstration. Soit $d = \inf\limits_{w\in S} \|w - v\|$. Si $v_1, v_2 \in S$, alors

$$\begin{aligned} \|v_1 - v\|^2 + \|v_2 - v\|^2 &= 2\left(\left\|\frac{v_1+v_2}{2} - v\right\|^2 + \left\|\frac{v_1-v_2}{2}\right\|^2\right) \\ &\geqslant 2d^2 + \frac{\|v_1 - v_2\|^2}{2} \end{aligned}$$

par l'identité du parallélogramme et parce que $\dfrac{v_1+v_2}{2} \in S$. Donc

$$\|v_1 - v_2\|^2 \leqslant 2\left(\|v_1 - v\|^2 - d^2\right) + 2\left(\|v_2 - v\|^2 - d^2\right).$$

En particulier, si $\|v_1 - v\| = \|v_2 - v\| = d$, alors $v_1 = v_2$; si (v_n) est une suite dans S telle que $\|v_n - v\| \to d$, alors (v_n) est une suite de Cauchy. □

Proposition 2.6.2. *Soit E un espace de Hilbert et S un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors il existe $p_S \in \mathscr{B}(E)$ tel que $p_S(v) = v$ pour tout $v \in S$ et $p_S(v) = 0$ pour tout $v \in S^\perp$: p_S est la* projection orthogonale *sur S. On a $p_S^2 = p_S$ et $p_S^* = p_S$. De plus $\mathrm{Id} - p_S = p_{S^\perp}$: on a $\|v\|^2 = \|p_S(v)\|^2 + \|p_{S^\perp}(v)\|^2$ et on écrit $E = S \oplus_2 S^\perp$. Si $S \neq \{0\}$, alors $\|p_S\| = 1$.*

Démonstration. On a $S \cap S^\perp = 0$. Soit $v \in E$ et soit $v_1 \in S$ le point tel que $\|v_1 - v\| = d$ est minimal. Montrons que $v_2 = v_1 - v \in S^\perp$. Soit $w \in S$ et $\epsilon \in \mathbb{K}$ de module 1. Comme $f\colon t \mapsto \|v_2 + t\epsilon w\|^2 = d^2 + 2t\,\mathrm{Re}(\epsilon\,\langle w, v_2\rangle) + t^2\|w\|^2$ atteint son minimum en 0, $f'(0) = 2\,\mathrm{Re}(\epsilon\,\langle w, v_2\rangle) = 0$. Donc $\langle w, v_2\rangle = 0$. On a ainsi $v = v_1 + v_2$ et $\|v\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$. Les applications $p_S\colon v \mapsto v_1$ et $p_{S^\perp}\colon v \mapsto v_2$ sont donc des opérateurs bornés de norme au plus 1. □

En particulier, la factorisation canonique de $p_{S^\perp}$ définit un isomorphisme isométrique entre E/S et $S^\perp$ qui permet d'identifier ces deux espaces.

Corollaire 2.6.3. *Soit E un espace de Hilbert et S un sous-espace vectoriel fermé de E. $S^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E et $(S^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{vect} S}$.*

Proposition 2.6.4. *Soient E, F deux espaces de Hilbert et $x \in \mathscr{B}(E, F)$.*
– x est inversible à gauche si et seulement si x est injectif d'image fermée.
– x est inversible à droite si et seulement si x est surjectif.

Démonstration. Dans le premier cas, la factorisation canonique de x définit un opérateur borné inversible $\tilde{x}\colon E \to \operatorname{im} x$ et $v \mapsto \tilde{x}^{-1}(p_{\operatorname{im} x}(v))$ est un inverse à gauche de x. Dans le deuxième cas, la factorisation canonique de x définit un opérateur borné inversible $\tilde{x}\colon (\ker x)^\perp \to F$ et $v \mapsto \tilde{x}^{-1}(v)$ est un inverse à droite de x. □

Proposition 2.6.5 (théorème de représentation de Fischer-Riesz)**.** *Soit E un espace de Hilbert. L'application*

$$\begin{aligned} \Phi_E\colon\ & E \to E' \\ & w \mapsto \langle \cdot, w \rangle \end{aligned}$$

est une bijection semilinéaire isométrique : toute forme linéaire continue l sur E est de la forme $l = \Phi_E(v)$ pour un unique $v \in E$ et

$$\Phi_E(w_1 + w_2) = \Phi_E(w_1) + \Phi_E(w_2),\ \ \Phi_E(\lambda w) = \bar{\lambda}\Phi_E(w),$$
$$\|\Phi_E(w)\| = \sup_{v \in \mathrm{B}_E} |\langle v, w \rangle| = \|w\|.$$

Démonstration. La dernière égalité résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et montre que Φ_E est isométrique et donc injective. Montrons que Φ_E est surjective. Soit $l \in E'$. Si $l = 0$, $l = \Phi_E(0)$. Sinon, le noyau S de l est un sous-espace vectoriel fermé propre de E et donc $S^\perp \neq \{0\}$: soit $w \in \mathrm{B}_{S^\perp}$. Soit $v \in E$ et soient $v_1 \in S$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $v = v_1 + \lambda w$. Alors $\langle v, w \rangle = \lambda$ et $l(v) = \lambda l(w) = \left\langle v, \overline{l(w)} w \right\rangle$. □

Cette application permet donc d'identifier E' avec E. En particulier,

$$\{l \in E' : l\,(v) = 0\} = \Phi_E\Big(\{w \in E : \langle v, w \rangle = 0\}\Big)$$

et donc l'orthogonal d'une partie de E au sens du paragraphe 2.4.2 correspond à son orthogonal au sens du paragraphe 2.3.2 dans cette identification.

2.6.2 Adjoint d'un opérateur sur un espace de Hilbert

Soit F un deuxième espace de Hilbert et $x \in \mathscr{B}(E, F)$. Pour chaque $w \in E$, l'application $v \mapsto \langle x(v), w \rangle$ est une forme linéaire continue sur E : il existe donc un unique élément noté $x^*(w) \in E$ tel que $\langle x(v), w \rangle = \langle v, x^*(w) \rangle$. L'application $w \mapsto x^*(w)$ est $\mathbb{K}$-linéaire et continue : si $\|w\| \leqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} \sup_{w \in \mathrm{B}_F} \|x^*(w)\| &= \sup_{w \in \mathrm{B}_F} \sup_{v \in \mathrm{B}_E} |\langle v, x^*(w) \rangle| \\ &= \sup_{v \in \mathrm{B}_E} \sup_{w \in \mathrm{B}_F} |\langle x(v), w \rangle| \\ &= \sup_{v \in \mathrm{B}_E} \|x(v)\| = \|x\|. \end{aligned}$$

x^* est l'adjoint de x et donc $\mathscr{B}(E, F) \subset \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. En fait, on a $\Phi_E \circ x^* = x' \circ \Phi_F$.
Comme $\langle x(v), x(v) \rangle = \langle x^* \circ x(v), v \rangle$ et $\|x^* \circ x\| \leqslant \|x^*\|\,\|x\|$, on a $\|x\|^2 = \|x^* \circ x\|$. Cette propriété est très profonde. En particulier, si x est unitaire, alors $\|x\| = 1$.
On a $\overline{\operatorname{im} x^*} = (\ker x)^\perp$.

2.6.3 Système orthonormé et base hilbertienne

Si E est un espace vectoriel normé quelconque et S est un ensemble quelconque, on dit que la série $\sum_{s\in S} v_s$ à valeurs dans E converge vers $v \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $S_1 \subset S$ fini tel que pour tout $S_2 \supset S_1$ fini on a

$$\Big\| v - \sum_{s\in S_2} v_s \Big\| < \varepsilon.$$

Soit E un espace préhilbertien. Une partie $S \subset \mathrm{S}_E$ est un *système orthonormé* si ses éléments sont orthogonaux deux à deux. Soit $v \in E$. Alors

$$\sum_{w\in S} |\langle v, w\rangle|^2 \leqslant \|v\|^2.$$

C'est l'*inégalité de Bessel*. Si E est un espace de Hilbert, la série

$$\sum_{w\in S} \langle v, w\rangle\, w$$

converge vers $p_{\overline{\operatorname{vect} S}}(v)$. Un système orthonormé S est une *base hilbertienne* si $\overline{\operatorname{vect} S} = E$. Le *théorème de la base hilbertienne* énonce que tout système orthonormé peut être complété en une base hilbertienne. Si S est une base hilbertienne, alors

$$\langle v_1, v_2\rangle = \sum_{w\in S} \langle v_1, w\rangle \langle w, v_2\rangle\,,$$
$$\|v\|^2 = \sum_{w\in S} |\langle v, w\rangle|^2.$$

C'est l'*égalité de Parseval*.

2.6.4 Algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert

Voici deux exemples d'espaces de Hilbert.

– L'espace $\ell_2(I)$ des suites de carré sommable muni du produit scalaire défini par

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i\in I} v_i \overline{w_i}.$$

La base canonique de $\ell_2(I)$ est la base hilbertienne des e_i, $i \in I$, définis par $(\mathrm{e}_i)_j = \delta_{ij}$.

– Si (T, μ) est un espace mesuré, l'espace $\mathrm{L}^2(\mu)$ des classes d'équivalence de fonctions de carré Lebesgue-intégrable pour l'égalité presque partout, muni du produit scalaire défini par

$$\langle v, w\rangle = \int_T v(t)\overline{w(t)}\,\mathrm{d}t.$$

L'exemple précédent est le cas particulier de la mesure de comptage. Considérons $T = \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, le cercle unité du plan complexe. L'application $t \mapsto (2\pi)^{-1} \arg t$ est un homéomorphisme de $\mathbb{T}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dont l'inverse est $\vartheta \mapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\vartheta}$: on peut donc identifier fonctions mesurables 1-périodiques et fonctions mesurables sur $\mathbb{T}$. Munissons $\mathbb{T}$ de la mesure μ définie par

$$\mu(A) = m\Big[\vartheta \in [0, 1[: \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\vartheta} \in A\Big],$$

où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. μ est la *mesure de Haar normalisée* du groupe $(\mathbb{T}, \cdot)$: cela veut dire que μ est invariante par translation et $\mu(\mathbb{T}) = 1$. En effet, pour tout $t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\tau} \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}\mu(tA) &= m\Big[\vartheta \in [0, 1[: \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\vartheta} \in tA\Big]\\ &= m\Big[\vartheta \in [0, 1[: \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(-\tau+\vartheta)} \in A\Big]\\ &= m\Big[\vartheta \in [\tau, \tau + 1[: \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\vartheta} \in A\Big] = \mu(A).\end{aligned}$$

Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$, alors

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\vartheta}\right)\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Si $s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\tau} \in \mathbb{T}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} f(st)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\tau+\vartheta)}\right)\,\mathrm{d}\vartheta = \int_\tau^{\tau+1} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\vartheta}\right)\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\mathbb{T}} f(t)\,\mathrm{d}t\\
\int_{\mathbb{T}} f(t^{-1})\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\vartheta}\right)\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{-1} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\vartheta}\right)\,\mathrm{d}(-\vartheta) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Alors les classes e_n, $n \in \mathbb{Z}$, des fonctions définies par $t \mapsto t^n$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mu)$ et les coefficients $\langle v, \mathrm{e}_n\rangle$ de v sont les coefficients de Fourier de v.

Exemple d'algèbre 10. Soit E un espace de Hilbert. L'algèbre $\mathscr{B}(E)$ est une algèbre unifère involutive.

Proposition 2.6.6. *Soit E un espace de Hilbert et x un opérateur borné normal sur E.*

(*i*) *Si x est d'image fermée, alors E est la somme directe orthogonale de $\ker x$ et de $\operatorname{im} x$. De plus, la restriction de x à $\operatorname{im} x$ est un isomorphisme d'espaces de Banach. En fait, $\operatorname{im} x^k \circ x^{*l} = \operatorname{im} x$ pour tout couple $(k, l) \neq (0, 0)$.*

(*ii*) *x est inversible si et seulement si x est inversible à gauche, si et seulement si x est inversible à droite, si et seulement s'il existe c tel que $\|x(v)\| \geqslant c\|v\|$ pour tout $v \in E$.*

Démonstration. (*i*). On a $\operatorname{im} x = (\ker x^*)^\perp = (\ker x)^\perp$. Donc $x|_{\operatorname{im} x}$ est injectif. Si $v \in E$, $v = v_1 + x(v_2)$ avec $x(v_1) = 0$ et $v_2 \in E$: alors $x(v) = x \circ x(v_2)$ et donc $x|_{\operatorname{im} x}$ est surjectif. Par la proposition 2.4.1, $x|_{\operatorname{im} x}$ est un élément inversible de l'espace de Hilbert $\mathscr{B}(\operatorname{im} x)$. De plus, $x^*(v) = x^* \circ x(v_2) = x \circ x^*(v_2)$
(*ii*). Si x est inversible à gauche, alors x est injective et d'image fermée et donc x est surjective. Si x est inversible à droite, alors x est surjective et donc injective. □

Troisième chapitre

Calcul fonctionnel rationnel

3.1 Calcul fonctionnel polynomial

3.1.1 Polynôme en un élément d'une algèbre

Soit A une algèbre et soit $x \in A$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, l'associativité de la multiplication permet de définir sans ambiguïté l'élément

$$x^k = \overbrace{x \cdots x}^{k \text{ fois}}.$$

On peut alors former

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \ldots \tag{3.1}$$

pour toute suite de coefficients $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ dont le *support* $\{k : a_k \neq 0\}$ est un ensemble fini : si n est le maximum de cet ensemble, alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ se réduit à une somme d'au plus n termes non nuls. Si $(b_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ est aussi une suite de coefficients à valeurs dans $\mathbb{K}$ de support fini, alors la bilinéarité de la multiplication donne

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k\Big)\Big(\sum_{l=1}^{\infty} b_l x^l\Big) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_k b_l x^k x^l \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_k b_l x^{k+l} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{k+l=n} a_k b_l\Big) x^n \\
&= a_1 b_1 x^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) x^3 + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) x^4 + \ldots
\end{aligned}$$

puisque toutes les sommes infinies comportent en fait un nombre fini de termes. Si A admet une unité u, on pose $x^0 = u$ et on peut former

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 u + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \ldots \tag{3.2}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\Big)\Big(\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k+l=n} a_k b_l\Big) x^n \qquad (3.3) \\
&= a_0 b_0 u + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots
\end{aligned}$$

3.1.2 Algèbre de semi-groupe

Ces calculs motivent l'introduction de l'algèbre suivante.

Exemple d'algèbre 11. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{K}[\mathbb{N}]$ des suites $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ dont le support est fini et munissons-le de la multiplication définie par

$$(a * b)_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} :$$

$a*b$ est la *convolée* de a et b. Muni de la convolution, cet espace est une algèbre commutative. L'unité de cette algèbre est la suite u dont le seul terme non nul est le terme d'indice 0, qui vaut 1 : en effet, $\sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k} = a_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

L'exemple 11 est l'*algèbre de semi-groupe* du semi-groupe commutatif $(\mathbb{N}, +)$. Si T est un semi-groupe quelconque, on peut encore construire l'algèbre de semi-groupe $\mathbb{K}[T]$ de la même manière.

3.1.3 Algèbre des polynômes

Exemple d'algèbre 12 (suite de l'exemple d'algèbre 11)**.** Soit t la suite dont le seul terme non nul est le terme d'indice 1, qui vaut 1. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, t^k est la suite dont le seul terme non nul est le terme d'indice k, qui vaut 1 : $(t^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}[\mathbb{N}]$ et on a pour tout $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[\mathbb{N}]$

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k$$

(la somme est en fait finie.) Muni de cette base, cette algèbre est l'*algèbre* $\mathbb{K}[t]$ *des polynômes par rapport à l'indéterminée* t avec la multiplication habituelle. L'unité t^0 de cette algèbre est notée 1 et l'élément a_0t^0 est noté a_0. On a donc pour $p = a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n$ et $q = b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_mt^m$

$$pq = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)t + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)t^2 + \cdots + a_nb_mt^{n+m}.$$

3.1.4 Calcul fonctionnel polynomial

Les équations (3.1) et (3.2) mènent à la définition suivante.

Définition 3.1.1. Supposons que A admet une unité u. Soit $x \in A$. Pour tout

$$p = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n \in \mathbb{K}[t],$$

on pose

$$p(x) = a_0u + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A.$$

L'application $p \mapsto p(x)$ est appelée le *calcul fonctionnel polynomial de* x (l'adjectif perd l'accent circonflexe du nom commun.) On note $\mathbb{K}[x]$ l'image de ce morphisme.

- Prenons $A = \mathbb{K}$: alors l'application qui à $x \in \mathbb{K}$ associe $p(x) \in \mathbb{K}$ est la *fonction polynomiale* associée à p. On dit que x est un *zéro* de p si $p(x) = 0$.
- Prenons $A = \mathbb{K}[t]$ et $x \in \mathbb{K}[t]$: alors le polynôme $p(x)$ est noté $p \circ x$: c'est le polynôme *composé* de p et de x.

Définition 3.1.2. Soit A une algèbre munie d'une unité u et $S \subset A$. L'*algèbre unifère engendrée par* S est la plus petite sous-algèbre de A contenant u et S.

Proposition 3.1.1. *Soit A une algèbre unifère et $x \in A$. Le calcul fonctionnel polynomial de x est l'unique morphisme d'algèbres unifères de $\mathbb{K}[t]$ dans A qui transforme le polynôme t en x. $\mathbb{K}[x]$ est l'algèbre unifère engendrée par x.*

Démonstration. Le calcul (3.3) montre que le calcul fonctionnel polynomial de x est un morphisme d'algèbres unifères. Réciproquement, si $\varphi\colon \mathbb{K}[t] \to A$ est un morphisme tel que $\varphi(1) = u$ et $\varphi(t) = x$, alors $\varphi(t^k) = x^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par multiplicativité. On a alors par linéarité

$$\varphi(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = a_0 u + a_1 x + \cdots + a_n x^n. \qquad \square$$

Le noyau du calcul fonctionnel polynomial de x est *l'idéal annulateur de* x. En général, il est réduit à $\{0\}$. S'il ne l'est pas, il est de la forme $p\mathbb{K}[t]$ avec $p \in \mathbb{K}[t] \setminus \{0\}$ puisque $\mathbb{K}[t]$ est un anneau principal : p est le *polynôme minimal* de x.
Si A est de dimension finie, alors tout x admet un polynôme minimal. Le théorème de Cayley-Hamilton montre que le polynôme minimal d'une matrice x ou d'un opérateur sur un espace de dimension finie divise le polynôme défini par la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \mathrm{dét}(\lambda \,\mathrm{Id} - x)$.

Proposition 3.1.2. *Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'algèbres unifères. Pour tout $x \in A$ et tout $p \in \mathbb{K}[t]$ on a $\varphi(p(x)) = p(\varphi(x))$.*

Démonstration. $\varphi(a_0 u_A + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0\varphi(u_A) + a_1\varphi(x) + \cdots + a_n\varphi(x^n) = a_0 u_B + a_1\varphi(x) + \cdots + a_n\varphi(x)^n$. $\square$

En particulier, si φ est le morphisme (1.1), on obtient que $p(\lambda u) = p(\lambda)u$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

3.2 Algèbre quotient

Définition 3.2.1. Soit I un idéal d'une $\mathbb{K}$-algèbre A. Si $x - x_1, y - y_1 \in I$, alors $x(y - y_1), (x - x_1)y_1 \in I$ et donc $xy - x_1 y_1 \in I$. L'application $(x + I, y + I) \mapsto (xy + I)$ est donc bien définie et munit le $\mathbb{K}$-espace vectoriel A/I d'une multiplication : on obtient *l'algèbre quotient de A par I.*
– Si A admet une unité u, alors $u + I$ est l'unité de A/I.
– Supposons que A est une algèbre involutive et que I est autoadjoint. Si $x - x_1 \in I$, alors $x^* - x_1^* \in I$. L'application $x + I \mapsto x^* + I$ est donc bien définie et munit A/I d'une involution.

L'application quotient canonique

$$\begin{aligned} \pi\colon\ & A \to A/I \\ & x \mapsto x + I \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres surjectif de noyau I. Si A est unifère ou involutive, π est un morphisme d'algèbres unifères ou involutives. Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'algèbres de noyau I et considérons sa factorisation canonique

$$\begin{tikzcd} A/I \arrow[r, "\tilde\varphi"] & \operatorname{im}\varphi \arrow[d, "\iota"] \\ A \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\varphi"] & B. \end{tikzcd}$$

Alors $\tilde\varphi$ est un morphisme d'algèbres bijectif.

3.3 Calcul fonctionnel rationnel

3.3.1 Algèbre des fractions rationnelles

L'exemple suivant va nous permettre de définir le calcul fonctionnel rationnel.

Exemple d'algèbre 13. Notons $\dfrac{p}{q}$ le couple $(p, q) \in \mathbb{K}[t] \times (\mathbb{K}[t] \setminus \{0\})$. Les opérations définies par

$$\lambda\frac{p}{q} = \frac{\lambda p}{q}, \quad \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{q_1 q_2}, \quad \frac{p_1}{q_1}\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$

munissent $\mathbb{K}[t] \times (\mathbb{K}[t] \setminus \{0\})$ d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre dont l'unité est $\dfrac{1}{1}$. Notons

$$I = \left\{ \frac{0}{q} : q \in \mathbb{K}[t] \setminus \{0\} \right\} :$$

I est un idéal et on a $\dfrac{p_1}{q_1} - \dfrac{p_2}{q_2} \in I$ si et seulement si $p_1 q_2 = p_2 q_1$. On peut donc former l'algèbre quotient

$$\mathbb{K}(t) = \Big(\mathbb{K}[t] \times (\mathbb{K}[t] \setminus \{0\})\Big)/I.$$

Cette algèbre est l'*algèbre des fractions rationnelles par rapport à l'indéterminée t*. Si $p = p_1 d$ et $q = q_1 d$, alors $\dfrac{p}{q} - \dfrac{p_1}{q_1} \in I$: toute fraction rationnelle r admet donc un représentant $\dfrac{p}{q}$ tel que p et q sont premiers entre eux et ce représentant est unique si on suppose de plus que q est un polynôme unitaire ; les *zéros* de r sont alors les zéros de p et les *pôles* de r sont les zéros de q. L'application qui à $p \in \mathbb{K}[t]$ associe la classe de $\dfrac{p}{1}$ dans $\mathbb{K}(t)$ est un morphisme d'algèbres unifères injectif par lequel on identifie $\mathbb{K}[t]$ à une sous-algèbre de $\mathbb{K}(t)$.

3.3.2 Calcul fonctionnel rationnel

Si $p_1 q_2 = p_2 q_1$ et $q_1(x)$ et $q_2(x)$ sont inversibles, alors

$$p_1(x) q_1(x)^{-1} = p_2(x) q_2(x)^{-1}.$$

On peut donc poser la définition suivante sans ambiguïté.

Définition 3.3.1. Supposons que A est unifère. Soit $x \in A$ et $r \in \mathbb{K}(t)$. Si r admet un représentant $\dfrac{p}{q}$ tel que $q(x)$ est inversible, on dit que $r(x)$ est *bien défini* et on pose

$$r(x) = p(x) q(x)^{-1}.$$

L'application $r \mapsto r(x)$ est appelée le *calcul fonctionnel rationnel de x*. On note $\mathbb{K}(x)$ l'image de ce morphisme.

- Prenons $A = \mathbb{K}$: alors $r(x)$ est bien défini si et seulement si x n'est pas un pôle de r et l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \setminus \{\text{pôles de } r\} &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto r(x) \end{aligned}$$

  est la fonction rationnelle associée à r.
- Prenons $x \in \mathbb{K}(t)$: alors la fraction rationnelle $r(x)$ est notée $r \circ x$: c'est la fraction rationnelle *composée* de r et de x. Calculons $r \circ x$ si r est le polynôme $a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ et $\dfrac{p}{q}$ est un représentant de x : alors

$$r \circ x = a_0 \frac{1}{1} + a_1 \frac{p}{q} + \cdots + a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + I = \frac{a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_n p^n}{q^n} + I$$

  et $r \circ x$ est bien défini sauf si x est une constante égale à un pôle de r.

Définition 3.3.2. Soit A une algèbre munie d'une unité u et $S \subset A$. L'*algèbre pleine engendrée par S* est la plus petite sous-algèbre B de A contenant u et S telle que tout élément de B inversible dans A soit inversible dans B.

Proposition 3.3.1. *Supposons que A est unifère. Soit $x \in A$.*

(*i*) *Le calcul fonctionnel rationnel de x est l'unique morphisme d'algèbres unifères de l'algèbre des fractions rationnelles bien définies en x dans A qui transforme t en x.*

(*ii*) *Si $s(x)$ et $r(s(x))$ sont bien définis, alors $(r \circ s)(x)$ est bien défini et $(r \circ s)(x) = r(s(x))$.*

(*iii*) *Si $\varphi\colon A \to B$ est un morphisme d'algèbres unifères et $r(x)$ est bien défini, alors $r(\varphi(x))$ est bien défini et $r(\varphi(x)) = \varphi(r(x))$.*

(*iv*) *$\mathbb{K}(x)$ est l'algèbre pleine engendrée par x.*

Démonstration. (i). Montrons que le calcul fonctionnel rationnel de x est un morphisme d'algèbres unifères. Si $r_1(x)$ et $r_2(x)$ sont bien définis, soient $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ des représentants tels que $q_1(x)$ et $q_2(x)$ sont inversibles. Alors $(q_1q_2)(x)$ est inversible et on a successivement

$$\begin{gathered} r_1(x)q_1(x) = p_1(x) \\ r_2(x)q_2(x) = p_2(x) \\ \big(r_1(x) + r_2(x)\big)q_1(x)q_2(x) = p_1(x)q_2(x) + p_2(x)q_1(x) \\ r_1(x) + r_2(x) = (p_1q_2 + p_2q_1)(x)\big((q_1q_2)(x)\big)^{-1} = (r_1 + r_2)(x) \\ r_1(x)r_2(x)q_1(x)q_2(x) = p_1(x)p_2(x) \\ r_1(x)r_2(x) = (p_1p_2)(x)\big((q_1q_2)(x)\big)^{-1} = (r_1r_2)(x) \end{gathered}$$

en utilisant le calcul fonctionnel polynomial. Réciproquement, si φ est un morphisme d'algèbres unifères tel que $\varphi(t) = x$, alors $\varphi(p) = p(x)$ pour tout $p \in \mathbb{K}[t]$. Si r admet un représentant $\frac{p}{q}$ avec $q(x)$ inversible, alors

$$p(x) = \varphi(p) = \varphi(rq) = \varphi(r)\varphi(q) = \varphi(r)q(x)$$

et donc $\varphi(r) = p(x)q(x)^{-1}$.
(ii). Si $s(x)$ est bien défini et $r \in \mathbb{K}[t]$, alors la formule (3.3.2) montre que $(r \circ s)(x)$ est bien défini. L'application $r \mapsto (r \circ s)(x)$ est un morphisme d'algèbres unifères qui transforme t en $s(x)$ puisque c'est la composée du calcul fonctionnel polynomial de s avec le calcul fonctionnel rationnel de x. Par unicité, c'est le calcul fonctionnel polynomial de $s(x)$ et donc $(r \circ s)(x) = r(s(x))$ pour tout $r \in \mathbb{K}[t]$. Soit $\frac{p}{q}$ un représentant de r tel que $q(s(x))$ est inversible. Alors

$$r(s(x)) = p(s(x))q(s(x))^{-1} = (p \circ s)(x)\big((q \circ s)(x)\big)^{-1} = (r \circ s)(x).$$

(iii). Soit $\frac{p}{q}$ un représentant de r tel que $q(x)$ est inversible. Alors $q(\varphi(x)) = \varphi(q(x))$ est inversible et

$$p(\varphi(x))q(\varphi(x))^{-1} = \varphi(p(x))\varphi(q(x)^{-1}) = \varphi(r(x)). \qquad \square$$

(iv). Montrons que tout élément de $\mathbb{K}(x)$ inversible dans A est inversible dans $\mathbb{K}(x)$: si $p(x)q(x)^{-1}$ est inversible dans A, alors $p(x)$ est inversible dans A et l'inverse $q(x)p(x)^{-1}$ de $p(x)q(x)^{-1}$ appartient à $\mathbb{K}(x)$. Si on note B l'algèbre pleine engendrée par x, on a donc $B \subset \mathbb{K}(x)$. Réciproquement, soient $p, q \in \mathbb{K}[t]$. On a $p(x), q(x) \in B$, et si $q(x)$ est inversible dans A, $q(x)^{-1} \in B$ et donc $p(x)q(x)^{-1} \in B$. Donc $\mathbb{K}(x) \subset B$.

Quatrième chapitre

Algèbres de fonctions

4.1 Algèbre des fonctions continues sur un espace localement compact, nulles à l'infini

Un espace topologique T dont tout point admet un voisinage compact est dit *localement compact*. Le *compactifié d'Alexandroff* $\tilde{T}$ de T est la réunion de T avec un point noté ∞, munie de la topologie suivante : un fermé de $\tilde{T}$ est soit un compact de T soit la réunion de ∞ avec un fermé de T.
– Les voisinages ouverts de ∞ sont donc les complémentaires des compacts de T.
– Si T est compact, $\{\infty\}$ est ouvert dans $\tilde{T}$: ∞ est un point isolé de $\tilde{T}$.
– Si T est compact et $t \in T$, un fermé de T est soit un compact de $T \setminus \{t\}$ soit la réunion de t avec un fermé de $T \setminus \{t\}$: T est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff de $T \setminus \{t\}$ avec t le point ∞.

Exemple d'algèbre 14. Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes et T un espace localement compact. On dit qu'une fonction $x\colon T \to \mathbb{K}$ est *nulle à l'infini* si sa limite en ∞ vaut 0 : pour tout $\varepsilon > 0$, $\{t \in T : |x(t)| \geqslant \varepsilon\}$ est compact. Si T est compact, toute fonction x est donc nulle à l'infini. Une fonction continue sur T à valeurs dans $\mathbb{K}$ nulle à l'infini est bornée et l'espace vectoriel $\mathscr{C}_0(T)$ de ces fonctions est normé en posant $\|x\| = \max_{t\in T}|x(t)|$; de plus, $\mathscr{C}_0(T)$ est complet. C'est une algèbre commutative munie de la multiplication des fonctions définie par

$$(xy)(t) = x(t)y(t) \quad \text{pour tout } t \in T. \tag{4.1}$$

En effet, si $\varepsilon > 0$, alors $\{t \in T : |x(t)y(t)| \geqslant \varepsilon\} \subset \{t \in T : |x(t)|\,\|y\| \geqslant \varepsilon\}$. Si T est compact, on note aussi $\mathscr{C}(T)$ cet espace. Si T est discret, on le note aussi $c_0(T)$. Cette algèbre est involutive munie de l'involution définie par

$$x^*(t) = \overline{x(t)} \quad \text{pour tout } t \in T. \tag{4.2}$$

x est hermitien si et seulement si x est à valeurs réelles, et x est positif si et seulement si x est à valeurs positives. L'application qui à $x \in \mathscr{C}_0(T)$ associe son prolongement par continuité $\tilde{x} \in \mathscr{C}(\tilde{T})$ défini par

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in T \\ 0 & \text{si } t = \infty \end{cases} \tag{4.3}$$

est un morphisme d'algèbres involutives injectif qui permet d'identifier $\mathscr{C}_0(T)$ avec l'idéal des éléments de $\mathscr{C}(\tilde{T})$ nuls en ∞. On démontre en topologie que si $K \subset T$ est compact, alors il existe $x \in \mathscr{C}_0(T)$ telle que $x(t) = 1$ pour tout $t \in K$ (c'est une conséquence du théorème de Tietze-Urysohn.) Si u est l'unité de $\mathscr{C}_0(T)$, alors $u(t) = 1$ pour tout $t \in T$. En effet, il existe $x \in \mathscr{C}_0(T)$ telle que $x(t) = 1$, et si $ux = x$, alors $u(t)1 = 1$. Notons $\mathbb{1}$ la fonction constamment égale à 1 : elle est nulle à l'infini si et seulement si T est compact. Donc $\mathscr{C}_0(T)$ est unifère si et seulement si T est compact. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, x est unitaire si et seulement si x vaut 1 ou -1 sur chaque composante connexe de T. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, x est unitaire si et seulement si x est à valeurs dans $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, le cercle unité du plan complexe.

Proposition 4.1.1. *Soit T compact et $x \in \mathscr{C}(T)$. L'élément x est inversible si et seulement si x ne s'annule pas et alors $x^{-1}(t) = x(t)^{-1}$ pour tout $t \in T$.*

Démonstration. Si $xy = \mathbb{1}$, $x(t) \neq 0$ et $y(t) = \dfrac{1}{x(t)}$ pour tout $t \in T$. Réciproquement, si x ne s'annule pas, alors la fonction définie par $y(t) = \dfrac{1}{x(t)}$ est continue. □

Proposition 4.1.2. *Soit T compact, $x \in \mathscr{C}(T)$ et $r \in \mathbb{K}(t)$. $r(x)$ est bien défini si et seulement si r n'a pas de pôle dans $x(T)$ et $r(x)$ est la composée $r \circ x \colon t \mapsto r(x(t))$ de x avec la fonction rationnelle associée à r.*

Démonstration. Pour chaque $t \in T$, l'application $x \mapsto x(t)$ est un morphisme d'algèbres unifères. Donc $(r(x))(t) = r(x(t))$. □

En fait, $r(x)$ est bien défini si et seulement si la fonction rationnelle associée à r est bien définie sur $x(T)$. Cela montre qu'on peut étendre le calcul fonctionnel rationnel aux fonctions continues sur le compact $x(T)$.

4.2 Algèbre des classes de fonctions mesurables bornées

4.2.1 Algèbre des fonctions mesurables bornées

Exemple d'algèbre 15. Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes et (T, μ) un espace mesuré. L'ensemble des fonctions mesurables bornées sur T est un espace vectoriel noté $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ et normé en posant $\|x\| = \sup_{t \in T} |x(t)|$; de plus, $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ est complet, et même fermé dans $\mathbb{K}^T$ muni de la topologie produit, appelée topologie de la convergence simple. C'est une algèbre commutative involutive muni de la multiplication des fonctions définie comme en (4.1) et de l'involution définie comme en (4.2). L'unité de $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ est $\mathbb{1}$. Si μ est la mesure de comptage, on note aussi $\ell^\infty(T)$ cet espace ; μ est une mesure borélienne si on munit T de la topologie discrète. Si T est un espace localement compact et μ est une mesure borélienne, alors $\mathscr{C}_0(T)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ qui est dense pour la topologie de la convergence simple.

Proposition 4.2.1. *Soit $x \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$. x est inversible si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x(t)| \geqslant \varepsilon$ pour tout $t \in T$.*

Démonstration. Soit y mesurable bornée telle que $xy = \mathbb{1}$. Alors $x(t) \neq 0$ et $y(t) = \dfrac{1}{x(t)}$ pour tout $t \in T$. Donc $|x(t)| \geqslant \left(\sup_{t \in T} |y(t)|\right)^{-1}$. □

Proposition 4.2.2. *Soit $x \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ et $r \in \mathbb{K}(t)$. $r(x)$ est bien défini si et seulement si r n'a pas de pôle dans $\overline{x(T)}$ et $r(x)$ est la composée $r \circ x \colon t \mapsto r(x(t))$ de x avec la fonction rationnelle associée à r.*

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{K}[t]$. Alors $q(x)$ est la composée $q \circ x \colon t \mapsto q(x(t))$ de x avec la fonction polynomiale associée à q. Si $\lambda \in \overline{x(T)}$, alors $q(\lambda) \in \overline{q(x(T))}$. Donc $q(x)$ est inversible si et seulement si q n'a pas de zéro dans $\overline{x(T)}$. □

En fait, $r(x)$ est bien défini si et seulement si la fonction rationnelle associée à r est bien définie et bornée sur $x(T)$. Cela montre qu'on peut étendre le calcul fonctionnel rationnel aux fonctions mesurables bornées sur $x(T)$.

4.2.2 Algèbre des classes de fonctions mesurables bornées

Exemple d'algèbre 16 (suite de l'exemple d'algèbre 15)**.** Soit I l'ensemble des fonctions mesurables bornées x nulles presque partout, c'est-à-dire que $\mu[x \neq 0] = 0$. Alors I est un espace vectoriel fermé parce qu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. I est en fait un idéal autoadjoint : on peut donc former l'algèbre quotient $\mathscr{L}^\infty(\mu)/I$ des classes d'équivalence de fonctions mesurables bornées pour l'égalité presque partout. Cette algèbre, notée $\mathrm{L}^\infty(\mu)$, est commutative et involutive et son unité, encore notée $\mathbb{1}$, est la classe de $\mathbb{1}$. Lorsqu'on considère un élément de $\mathrm{L}^\infty(\mu)$, on choisit en général tacitement une fonction qui en est un représentant, à moins que cela prête à confusion. Si aucun ouvert de T n'est de mesure nulle, alors toute fonction continue nulle presque partout est nulle : donc l'application qui à $x \in \mathscr{C}_0(T)$ associe sa classe dans $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ est un morphisme d'algèbres unifères involutives injectif qui permet d'identifier $\mathscr{C}_0(T)$ à une sous-algèbre de $\mathrm{L}^\infty(\mu)$.

Proposition 4.2.3. *Soit $x \in \mathrm{L}^\infty(\mu)$. x est inversible si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mu[|x| < \varepsilon] = 0$.*

Démonstration. Si $\mu[|x| < \varepsilon] = 0$, x admet un représentant $\tilde{x}$ tel que $|\tilde{x}(t)| \geqslant \varepsilon$ pour tout $t \in T$, et donc inversible. Réciproquement, si $\mu[|x| < \varepsilon] > 0$, alors x n'a pas de représentant inversible. □

Définition 4.2.1. L'*image essentielle* de $x \in \mathrm{L}^\infty(\mu)$ est

$$\operatorname{im\,ess} x = \{\lambda \in \mathbb{K} : \forall\, \varepsilon > 0 \ \mu[|\lambda - x| < \varepsilon] > 0\}.$$

Proposition 4.2.4. *Soit $x \in \mathrm{L}^\infty(\mu)$. L'image essentielle de x est compacte et $\mu[x \notin \operatorname{im\,ess} x] = 0$.*

Démonstration. Le complémentaire de $\operatorname{im\,ess} x$ est la réunion de toutes les boules ouvertes B de centre $\lambda \in \mathbb{K}$ et de rayon $\varepsilon > 0$ telles que $\mu[x \in B] = 0$. Cette réunion se réduit à une réunion dénombrable de boules ouvertes. □

Proposition 4.2.5. *Soit $x \in \mathrm{L}^\infty(\mu)$ et $\tilde{x} \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ un représentant de x tel que $\tilde{x}(T) \subset \operatorname{im\,ess} x$. Soit $r \in \mathbb{K}(t)$. $r(x)$ est bien défini si et seulement si r n'a pas de pôle dans $\operatorname{im\,ess} x$, et $r(x)$ est la classe de la composée $r \circ \tilde{x} \colon t \mapsto r(\tilde{x}(t))$ de $\tilde{x}$ avec la fonction rationnelle associée à r.*

Démonstration. Soit $\pi\colon \mathscr{L}^\infty(\mu) \to \mathrm{L}^\infty(\mu)$ l'application quotient canonique. Si r n'a pas de pôle dans $\operatorname{im\,ess} x$, $\pi(r(\tilde{x})) = r(\pi(\tilde{x})) = r(x)$. Soit $q \in \mathbb{K}[t]$ et λ un zéro de q. Soit $y \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ un représentant de x. Si $\lambda \in \operatorname{im\,ess} x$, alors $\forall\, \varepsilon > 0$ $\mu[|q(y)| < \varepsilon] > 0$ et donc $q(y)$ n'est pas inversible. □

Soit $x \in \mathrm{L}^\infty(\mu)$ et $y \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$. Si $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ sont deux représentants de x, alors les fonctions mesurables bornées $y \circ \tilde{x}_1$ et $y \circ \tilde{x}_2$ sont égales presque partout : on peut donc définir $y \circ x$ sans ambiguïté et étendre le calcul fonctionnel polynomial aux fonctions mesurables bornées. Par contre, si y_1 est égale à y presque partout, alors $y \circ x$ n'est pas nécessairement égal à $y_1 \circ x$.

4.3 Algèbres de groupe

Soit $\mathbb{K}$ le corps des complexes.

4.3.1 Algèbre $\ell^1(\mathbb{Z})$

Exemple d'algèbre 17. Soit $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'espace des suites bi-infinies absolument convergentes. Si $x, y \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n|\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(|x_k| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_{-k+n}|\right)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k y_{-k+n}|\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k+l=n} |x_k y_l|\right)\end{aligned}$$

car la somme de séries absolument convergentes ne dépend pas de l'ordre de sommation. Donc

$$x * y = \Big(\sum_{k+l=n} x_k y_l\Big)_{n\in\mathbb{Z}}$$

est un élément de $\ell^1(\mathbb{Z})$: c'est la *convolée* de x et y. Muni de la convolution, $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une algèbre commutative. Vérifions par exemple la distributivité de la convolution : si $x, y, z \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors $x * y$, $x * z$, $y + z$ et $x * (y + z)$ sont dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ et on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k+l=n} x_k y_l + \sum_{k+l=n} x_k z_l = \sum_{k+l=n} x_k y_l + x_k z_l = \sum_{k+l=n} x_k (y_l + z_l).$$

On a utilisé la formule de la somme de deux séries convergentes et la distributivité de la multiplication de $\mathbb{K}$; on n'indique pas l'ordre de sommation des séries parce qu'elles sont absolument convergentes. L'unité de $\ell^1(\mathbb{Z})$ est la suite u dont tous les termes sont nuls sauf le terme d'indice 0, qui vaut 1. En effet, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k y_{l-k} = y_l$ pour chaque $l \in \mathbb{Z}$. L'application définie par $x^*_n = \overline{x_{-n}}$ est une involution de $\ell^1(\mathbb{Z})$. Considérons l'application

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\mathbb{Z}}\colon\ \ell^1(\mathbb{Z}) &\to \mathscr{C}(\mathbb{T})\\ x &\mapsto \Big(\hat{x}\colon t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n\Big)\end{aligned}$$

Elle est bien définie car la série converge uniformément par rapport à t. $\mathscr{F}_{\mathbb{Z}}$ est la *transformation de Fourier* du groupe discret $(\mathbb{Z}, +)$ et $\hat{x}$ est la somme de la série de Fourier x. On a

$$\begin{aligned}\widehat{x * y}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{k+l=n} x_k y_l\Big) t^n\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k+l=n} (x_k t^k)(y_l t^l)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n t^n = \hat{x}(t)\hat{y}(t)\end{aligned}$$

puisque la somme de séries absolument convergentes ne dépend pas de l'ordre de sommation. De plus $\widehat{u} = \mathbb{1}$ et

$$\widehat{x^*}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{x_{-n}} t^n = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{-n} t^{-n}} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n} = \hat{x}^*(t)$$

Donc $\mathscr{F}_{\mathbb{Z}}$ est un morphisme d'algèbres unifères involutives de $\ell^1(\mathbb{Z})$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{T})$. L'image de $\mathscr{F}_{\mathbb{Z}}$ est l'algèbre involutive des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ dont la série de Fourier converge normalement. Comme elle contient les $t \mapsto t^n$, elle est dense. Elle n'est pas fermée : on peut utiliser le théorème de Banach-Steinhaus pour le voir ; on peut aussi montrer que la série de Fourier $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\log n}}{n} t^n$ converge uniformément.

L'exemple 17 est l'*algèbre de groupe* du groupe commutatif discret $(\mathbb{Z}, +)$. Si T est un groupe discret quelconque, on peut encore construire l'algèbre de groupe $\ell^1(T)$ de la même manière.

4.3.2 Algèbre $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$

Exemple d'algèbre 18. Soit $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ l'espace de Banach des classes de fonctions intégrables sur $\mathbb{T}$. Si $x, y \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, alors

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{T}} |x(t)|\,\mathrm{d}t\Big)\Big(\int_{\mathbb{T}} |y(s)|\,\mathrm{d}s\Big) &= \int_{\mathbb{T}} \Big(|x(t)| \int_{\mathbb{T}} |y(t^{-1}s)|\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} |x(t)y(t^{-1}s)|\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

par le théorème de Fubini. Donc

$$x * y(s) = \int_{\mathbb{T}} x(t)y(t^{-1}s)\,\mathrm{d}t$$

existe pour presque tout s et définit un élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$: c'est la *convolée* de x et y. Muni de la convolution, $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ est une algèbre commutative. L'application définie par

$$x^*(t) = \overline{x(t^{-1})} \text{ presque partout}$$

est une involution de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_{\mathbb{T}} \colon\ \mathrm{L}^1(\mathbb{T}) &\to \mathrm{c}_0(\mathbb{Z}) \\ x &\mapsto \hat{x} = \Big(\int_{\mathbb{T}} x(t)t^{-n}\,\mathrm{d}t \Big)_{n\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Elle est bien définie par le lemme de Riemann-Lebesgue. $\mathscr{F}_{\mathbb{T}}$ est la *transformation de Fourier* du groupe compact $(\mathbb{T},\cdot)$ et $\hat{x}$ est la série de Fourier de x. On a

$$\begin{aligned} \widehat{x*y}(n) &= \int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} x(t)y(t^{-1}s)\,\mathrm{d}t \Big) s^{-n}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} \big(x(t)t^{-n}\big)\big(y(t^{-1}s)(t^{-1}s)^{-n}\big)\,\mathrm{d}t \Big) \mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{T}} \Big(x(t)t^{-n} \int_{\mathbb{T}} y(t^{-1}s)(t^{-1}s)^{-n}\,\mathrm{d}s \Big) \mathrm{d}t \\ &= \Big(\int_{\mathbb{T}} x(t)t^{-n}\,\mathrm{d}t \Big) \Big(\int_{\mathbb{T}} y(s)s^{-n}\,\mathrm{d}s \Big) = \hat{x}(n)\hat{y}(n) \end{aligned}$$

par le théorème de Fubini et

$$\widehat{x^*}(n) = \int_{\mathbb{T}} \overline{x(t^{-1})}t^{-n}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_{\mathbb{T}} x(t^{-1})t^{n}\,\mathrm{d}t} = \overline{\int_{\mathbb{T}} x(t)t^{-n}\,\mathrm{d}t} = \hat{x}^*(n) :$$

donc $\mathscr{F}_{\mathbb{T}}$ est un morphisme d'algèbres involutives de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ dans $\mathrm{c}_0(\mathbb{Z})$. Si $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors

$$\int_{\mathbb{T}} \hat{x}(t)t^{-n}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k \Big) t^{-n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k \int_{\mathbb{T}} t^{k-n}\,\mathrm{d}t = x_n.$$

En identifiant les fonctions continues à leur classe dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, on a donc $\mathscr{F}_{\mathbb{T}} \circ \mathscr{F}_{\mathbb{Z}}(x) = x$. En particulier, $\mathscr{F}_{\mathbb{Z}}$ est injective et $\mathscr{F}_{\mathbb{T}}$ est d'image dense. Elle n'est pas fermée : on peut utiliser le théorème de Banach-Steinhaus pour le voir ; on peut aussi montrer que $\big(\mathrm{signe}(n)/\log(|n|+2)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas la série de Fourier d'une fonction intégrable.
$\mathscr{F}_{\mathbb{T}}$ est injective : c'est le théorème d'unicité de la série de Fourier. Cela résulte aussi du fait qu'on peut identifier $\mathscr{F}'_{\mathbb{T}}$ à $\mathscr{F}_{\mathbb{Z}}$, qui est d'image dense. En fait, si $x \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ et $l \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n\hat{x}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n \int_{\mathbb{T}} x(t)t^{-n}\,\mathrm{d}t \\ = \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n t^{-n} \Big) x(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} \hat{l}(t^{-1})x(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Si $y \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$, posons $(s(y))(t) = \check{y}(t) = y(t^{-1})$. Soit π le morphisme injectif qui permet d'identifier une fonction continue sur $\mathbb{T}$ avec sa classe dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$. Alors (4.4) montre que $\mathscr{F}'_{\mathbb{T}} = \pi \circ s \circ \mathscr{F}_{\mathbb{Z}}$.
Si $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ avait une unité u, alors $\hat{u}(n) = 1$ pour tout n, ce qui est impossible.

L'exemple 18 est l'*algèbre de groupe* du groupe commutatif compact $(\mathbb{T},\cdot)$. Si T est un groupe localement compact quelconque, on peut encore munir T d'une mesure de Haar et construire l'algèbre de groupe $\mathrm{L}^1(T)$ de la même manière.

Cinquième chapitre

Spectre

5.1 Spectre

5.1.1 Spectre dans une algèbre unifère

Définition 5.1.1. Supposons que A admet une unité u et soit $x \in A$. Un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur spectrale* de x si $\lambda u - x$ n'est pas inversible. Le *spectre* de x est l'ensemble de ses valeurs spectrales. Ce spectre sera noté $\operatorname{spec} x$, ou $\operatorname{spec}_A x$ s'il y a un risque de confusion. Son complémentaire est l'*ensemble résolvant* de x et noté $\operatorname{rés} x$. Soit R_λ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{\lambda - t}$. La *résolvante* de x est la fonction

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(x)\colon\ \operatorname{rés} x &\to A\\ \lambda &\mapsto \mathrm{R}_\lambda(x) = (\lambda u - x)^{-1}.\end{aligned}$$

Si $a \in \mathbb{K}$, alors $\operatorname{spec}(au + x) = a + \operatorname{spec} x$. Si $b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors $\operatorname{spec}(bx) = b \operatorname{spec} x$; c'est encore vrai si $b = 0$ lorsque $\operatorname{spec} x$ n'est pas vide. Si x est inversible, alors $\operatorname{spec}(x^{-1}) = (\operatorname{spec} x)^{-1}$. On obtient ainsi que

$$\operatorname{spec}\Big((au + bx)(cu + dx)^{-1}\Big) = \left\{\frac{a + b\lambda}{c + d\lambda} : \lambda \in \operatorname{spec} x\right\}$$

sauf si $\dfrac{a + bt}{c + dt}$ est constant et $\operatorname{spec} x$ est vide.

- Si $A = \mathbb{K}$, alors $\operatorname{spec} x = \{x\}$: en effet, $\lambda - x$ est inversible si et seulement si $\lambda - x \neq 0$.
- Si $A = \mathscr{M}_n$ ou $A = \mathscr{L}(E)$ ave E de dimension n, $\operatorname{spec} x$ est l'ensemble des λ tels que $\operatorname{dét}(\lambda \operatorname{Id} - x) = 0$ et a donc au plus n éléments, et au moins un élément si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos.

Proposition 5.1.1. *Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'algèbres unifères et $x \in A$. Alors $\operatorname{spec}_B \varphi(x) \subset \operatorname{spec}_A x$.*

Démonstration. Si $\lambda u_A - x$ est inversible, alors $\varphi(\lambda u_A - x) = \lambda u_B - \varphi(x)$ l'est aussi. □

Proposition 5.1.2. *Si A est une algèbre involutive unifère et $x \in A$, $\operatorname{spec} x^* = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \operatorname{spec} x\}$.*

- Si x est hermitien, $\operatorname{spec} x$ est stable par conjugaison.
- Si x est unitaire, $\operatorname{spec} x$ est stable par $\lambda \mapsto \overline{\lambda^{-1}}$.

5.1.2 Première moitié du théorème spectral

Proposition 5.1.3. *Soit A un algèbre unifère. Soit $x \in A$ et $r \in \mathbb{K}(t)$ tel que $r(x)$ est bien défini. Si $\lambda \in \operatorname{spec} x$, alors $r(\lambda) \in \operatorname{spec} r(x)$: on a*

$$r(\operatorname{spec} x) \subset \operatorname{spec} r(x).$$

Démonstration. Si r est un polynôme et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors il existe un polynôme s tel que $r(\lambda)-r=(\lambda-t)s$ et donc $r(\lambda)u-r(x)=(\lambda u-x)s(x)$. Si $r(\lambda)u-r(x)$ est inversible, alors $\lambda u-x$ est inversible :

$$(\lambda u-x)s(x)\big(r(\lambda)u-r(x)\big)^{-1}=s(x)\big(r(\lambda)u-r(x)\big)^{-1}(\lambda u-x)=u$$

Soit r une fraction rationnelle et $\dfrac{p}{q}$ un représentant de r avec $q(x)$ inversible. Soit $\lambda \in \operatorname{spec} x$: alors $q(\lambda) \neq 0$ et $r(\lambda)u-r(x)$ est inversible si et seulement si $r(\lambda)q(x)-p(x)$ est inversible ; or $0=r(\lambda)q(\lambda)-p(\lambda) \in \operatorname{spec} r(\lambda)q(x)-p(x)$. □

5.1.3 Deuxième moitié du théorème spectral

Proposition 5.1.4. *Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et A une algèbre unifère. Soit $x \in A$ et $r \in \mathbb{K}(t)$. Si $r(x)$ est bien défini, alors*

$$\operatorname{spec} r(x)=r(\operatorname{spec} x)$$

sauf dans le cas où à la fois $\operatorname{spec} x$ *est vide et r est constant.*

Démonstration. Soit $\dfrac{p}{q}$ un représentant de r avec $q(x)$ inversible. Soit $\mu \in \mathbb{K}$. Si r n'est pas constante, la décomposition de $\mu q-p$ en facteurs premiers donne

$$\mu-\frac{p}{q}=\frac{\mu q-p}{q}=\frac{a\prod_{\lambda\in\Lambda}(t-\lambda)^{\alpha_\lambda}}{q}$$

avec $\Lambda=\{\lambda \in \mathbb{K} : r(\lambda)=\mu\}$ et α_λ la multiplicité du zéro λ dans $\mu q-p$. Alors

$$\mu u-r(x)=aq(x)^{-1}\prod_{\lambda\in\Lambda}(x-\lambda u)^{\alpha_\lambda} :$$

Donc $\mu u-r(x)$ est inversible si et seulement si $x-\lambda u$ est inversible pour tout $\lambda \in \Lambda$: $\mu \in \operatorname{spec} r(x)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \operatorname{spec} x$ tel que $r(\lambda)=\mu$. Cette égalité reste vraie lorsque r est une constante si $\operatorname{spec} x$ n'est pas vide. □

5.1.4 Calcul fonctionnel rationnel dans un corps algébriquement clos

Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors on peut préciser quand $r(x)$ est bien défini grâce à l'algèbre suivante.

Exemple d'algèbre 19. Soit $T \subset \mathbb{K}$ et $\mathbb{K}(t)_T$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans T. C'est une sous-algèbre unifère de $\mathbb{K}(t)$.

Proposition 5.1.5. *Supposons que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et que A est unifère. Soit $x \in A$.*

- (i) *L'élément $r(x)$ est bien défini si et seulement si r n'a pas de pôle dans le spectre de x : $x \in \mathbb{K}(t)_{\operatorname{spec} x}$.*
- (ii) *Le calcul fonctionnel rationnel de x est l'unique morphisme d'algèbres unifères de $\mathbb{K}(t)_{\operatorname{spec} x}$ dans A qui transforme t en x.*
- (iii) *Si $r \in \mathbb{K}(t)_{\operatorname{spec} x}$ et $s \in \mathbb{K}(t)_{\operatorname{spec} r(x)}$, alors $s(r(x))=(s\circ r)(x)$.*

Démonstration. (i). Soit $\dfrac{p}{q}$ le représentant de r tel que p et q sont deux polynômes premiers entre eux. Alors $q \neq 0$ et donc $q(x)$ est inversible si et seulement si $0 \notin q(\operatorname{spec} x)$. □

5.2 Spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel

Proposition 5.2.1. *Soit E un espace vectoriel et $x \in \mathscr{L}(E)$. Si λ est valeur propre de x, alors λ est valeur spectrale de x. λ est valeur spectrale sans être valeur propre si et seulement si $\lambda \operatorname{Id} - x$ est injectif non surjectif.*

Démonstration. Si $\lambda \operatorname{Id} - x$ n'est pas injectif, alors $\lambda \operatorname{Id} - x$ n'est pas bijectif. □

Si E est de dimension finie, alors toute valeur spectrale est valeur propre.

Lemme 5.2.2 (lemme de décomposition des noyaux)**.** *Soient $p_1, p_2 \in \mathbb{K}[t]$ et $x \in \mathscr{L}(E)$. Si p_1 et p_2 sont premiers entre eux, alors $\ker(p_1 p_2)(x) = \ker p_1(x) \oplus \ker p_2(x)$.*

Démonstration. Il existe q_1, $q_2 \in \mathbb{K}[t]$ tels que $q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1$. Alors $(q_1 p_1)(x) + (q_2 p_2)(x) = \operatorname{Id}$. Donc tout $v \in E$ s'écrit

$$v = \Big((q_1 p_1)(x)\Big)(v) + \Big((q_2 p_2)(x)\Big)(v) = \Big(q_1(x) \circ p_1(x)\Big)(v) + \Big(q_2(x) \circ p_2(x)\Big)(v).$$

Si $v \in \ker p_1(x) \cap \ker p_2(x)$, on en déduit que $v = 0$. Si $v \in \ker(p_1 p_2)(x)$, alors

$$\Big(p_2(x) \circ p_1(x)\Big)(v) = \Big(p_1(x) \circ p_2(x)\Big)(v) = 0$$

et on en déduit que v s'écrit comme la somme d'un élément de $\ker p_2(x)$ avec un élément de $\ker p_1(x)$. Réciproquement, $\ker p_1(x) \cup \ker p_2(x) \subset \ker(p_1 p_2)(x)$. □

Corollaire 5.2.3. *Soit $x \in \mathscr{L}(E)$. Les sous-espaces propres de x sont en somme directe. Si x admet un polynôme minimal p, toute valeur spectrale de x est valeur propre et les racines de p forment le spectre de x.*

Démonstration. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors $\lambda_1 - t, \ldots, \lambda_n - t$ sont des polynômes premiers entre eux. Si λ est valeur spectrale, alors $p(\lambda) \in \operatorname{spec} p(x)$ et donc $p(\lambda) = 0$. Réciproquement, si $p(\lambda) = 0$, alors $p = (\lambda - t)q$ et donc $(\lambda \operatorname{Id} - x) \circ q(x) = 0$ et $\operatorname{im} q(x) \subset \ker \lambda \operatorname{Id} - x$. Or $q(x) \neq 0$ parce que p est minimal. □

Théorème 5.2.4 (réduction de Jordan)**.** *Considérons les suites de sous-espaces de E définies par $N_k = \ker x^k$ et $I_k = \operatorname{im} x^k$. Alors*

(i) $N_k \subset N_{k+1}$ *et* $I_{k+1} \subset I_k$.

(ii) *S'il existe m minimal tel que $N_m = N_{m+1}$, alors $N_l = N_m$ pour tout $l \geqslant m$. De plus $x(N_m) \subset N_m$ et $N_m \cap I_m = \{0\}$.*

(iii) *S'il existe n minimal tel que $I_{n+1} = I_n$, alors $I_l = I_n$ pour tout $l \geqslant n$. De plus $x(I_n) = I_n$ et $N_n + I_n = E$.*

(iv) *Supposons que de tels m et n existent. Alors $m = n$ et donc $E = N_m \oplus I_m$. De plus,*
- *la restriction de x à I_m est inversible ;*
- *soit $y = x|_{N_m}$ la restriction de x à N_m : alors $\ker y = \ker x$ et $\operatorname{coker} y$ est isomorphe à $\operatorname{coker} x$. En particulier, si N_m est de dimension finie, alors $\operatorname{coker} x$ est de dimension finie et on a le théorème du rang :*

$$\dim \operatorname{coker} x = \dim \ker x.$$

Démonstration. (*i*). Comme

$$x^k(v) = 0 \;\Rightarrow\; x^{k+1}(v) = 0,$$

on a $N_k \subset N_{k+1}$. Comme

$$v = x^{k+1}(w) \;\Rightarrow\; v = x^k(x(w)),$$

on a $I_{k+1} \subset I_k$.
(*ii*). On a

$$v \in N_{k+1} \;\Leftrightarrow\; x^{k+1}(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^k(x(v)) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(v) \in N_k$$

et donc, si $N_k = N_{k+1}$, alors $N_{k+1} = N_{k+2}$ et $x(N_k) \subset N_k$. Si v est tel que $x^m(v) = 0$ et qu'il existe $w \in E$ avec $v = x^m(w)$, alors $x^{2m}(w) = 0$ et donc $x^m(w) = 0$ et $v = 0$.

(iii). On a
$$v \in I_{k+1} \;\Leftrightarrow\; \exists\, w \in E \;\, v = x^{k+1}(w) = x(x^k(w)) \;\Leftrightarrow\; v \in x(I_k)$$
et donc, si $I_k = I_{k+1}$, alors $I_{k+1} = I_{k+2}$ et $x(I_k) = I_k$. Soit $v \in E$. Comme $I_{2n} = I_n$, il existe $w \in E$ tel que $x^n(v) = x^{2n}(w)$. Donc $v - x^n(w) \in N_n$ et $v = (v - x^n(w)) + x^n(w)$.
(iv). Supposons $m \leqslant n$: alors $N_n = N_m$; montrons que $I_m \subset I_n$ et donc $m \geqslant n$. Si $v \in I_m$, soient $v_1 \in N_n$ et $v_2 \in I_n$ tels que $v = v_1 + v_2$: comme $I_n \subset I_m$, $v_1 \in N_m \cap I_m$ et donc $v_1 = 0$ et $v = v_2$. Supposons $m \geqslant n$: alors $I_m = I_n$; montrons que $N_m \subset N_n$ et donc $m \leqslant n$. Si $v \in N_m$, soient $v_1 \in N_n$ et $v_2 \in I_n$ tels que $v = v_1 + v_2$: comme $N_n \subset N_m$, $v_2 \in N_m \cap I_m$ et donc $v_2 = 0$ et $v = v_1$.
On a déjà montré que $x(I_m) = I_m$ et donc la restriction de x à I_m est un opérateur bien défini et surjectif. Montrons que cet opérateur est injectif. Soit $v \in I_m$ tel que $x(v) = 0$ et soit w tel que $v = x^m(w)$. Alors $x^{m+1}(w) = 0$ et comme $N_{m+1} = N_m$, $x^m(w) = 0$ et donc $v = 0$.
On a $\ker y = N_m \cap \ker x = N_m \cap N_1 = N_m$. Comme $\operatorname{im} y \subset \operatorname{im} x$, l'opérateur
$$\begin{aligned} \Phi\colon\; N_m/\operatorname{im} y &\to E/\operatorname{im} x \\ v + \operatorname{im} y &\mapsto v + \operatorname{im} x \end{aligned}$$
est bien défini. Montrons que Φ est injectif. Soit $v \in N_m$ tel que $\Phi(v + \operatorname{im} y) = 0 + \operatorname{im} x$. Alors $v \in \operatorname{im} x$; soit $w \in E$ tel que $v = x(w)$ et soient $w_1 \in N_m$ et $w_2 \in I_m$ tels que $w = w_1 + w_2$. Alors $v = y(w_1) + x(w_2)$ et donc $x(w_2) \in N_m \cap I_m$. Donc $x(w_2) = 0$ et $v \in \operatorname{im} y$. Montrons que Φ est surjectif. Soit $v \in E$; il existe $v_1 \in N_m$ et $v_2 \in I_m$ tels que $v = v_1 + v_2$. Alors $v_2 \in x(I_m)$ et $v + \operatorname{im} x = v_1 + \operatorname{im} x = \Phi(v_1 + \operatorname{im} y)$.
Si N_m est de dimension finie, alors $\dim N_m = \dim \ker y + \dim \operatorname{im} y$. □

5.3 Spectre d'un opérateur normal sur un espace A-hermitien

Proposition 5.3.1. *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit intérieur anisotrope et $x \in \mathscr{L}_A(E)$ normal.*

- (i) *Si v est vecteur propre de x associé à la valeur propre λ, alors v est vecteur propre de x^* associé à la valeur propre $\bar\lambda$: l'espace propre de x pour λ égale l'espace propre de x^* pour $\bar\lambda$; de plus, l'espace propre de x pour λ égale l'espace spectral de x pour λ : $\ker(\lambda \operatorname{Id} - x)^n = \ker \lambda \operatorname{Id} - x$ pour tout $n \geqslant 1$.*
- (ii) *Deux espaces propres de x associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*
- (iii) *Si x est hermitien, alors toute valeur propre de x est réelle.*

Démonstration. (i) se déduit de la proposition 2.3.1 parce que $\lambda \operatorname{Id} - x$ est normal si x est normal et donc $\ker \lambda \operatorname{Id} - x = \ker \bar\lambda \operatorname{Id} - x^*$.
(ii). Si $v \in \ker \lambda \operatorname{Id} - x$ et $w \in \ker \mu \operatorname{Id} - x$, alors
$$\lambda \langle v, w\rangle = \langle x(v), w\rangle = \langle v, x^*(w)\rangle = \langle v, \bar\mu w\rangle = \mu \langle v, w\rangle$$
et donc $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$.
(iii). Si $v \in \ker \lambda \operatorname{Id} - x$, alors $\lambda \langle v, v\rangle = \langle x(v), v\rangle = \langle v, x(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar\lambda \langle v, v\rangle$: donc $\langle v, v\rangle \operatorname{Im} \lambda = 0$. □

5.4 Adjonction d'une unité

Définition 5.4.1. Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. Sur l'ensemble $A^1 = \mathbb{K} \times A$, définissons les lois de composition suivantes :
$$\begin{aligned} \lambda(\mu, x) &= (\lambda\mu, \lambda x) \\ (\lambda, x) + (\mu, y) &= (\lambda + \mu, x + y) \\ (\lambda, x)(\mu, y) &= (\lambda\mu, \lambda y + \mu x + xy). \end{aligned}$$
Alors A^1 est une $\mathbb{K}$-algèbre unifère et $u^1 = (1, 0)$ est l'unité de A^1. Si A est involutive, on munit A^1 de l'involution définie par
$$(\lambda, x)^* = (\bar\lambda, x^*).$$
On dit que A^1 est l'algèbre *déduite de A par adjonction d'une unité*.

L'ensemble $\{0\} \times A$ est un idéal de A^1 : c'est l'image de l'application

$$\begin{aligned} \iota\colon\ A &\to A^1 \\ x &\mapsto (0, x), \end{aligned}$$

qui est un morphisme d'algèbres injectif au moyen duquel on identifie A et $\{0\} \times A$. Notons

$$\begin{aligned} \delta\colon\quad A^1 &\to \mathbb{K} \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda : \end{aligned} \tag{5.1}$$

c'est un morphisme d'algèbres unifères. On peut résumer l'adjonction d'une unité par la suite exacte scindée

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} A^1 \xrightarrow{\delta} \mathbb{K} \to 0.$$

L'élément (λ, x) est noté $\lambda + x$.

Définition 5.4.2. Si A et B sont des algèbres, le *produit* $A \times B$ est une algèbre muni de la multiplication

$$(a, b)(a', b') = (aa', bb').$$

Si A admet une unité u_A et B admet une unité u_B, alors (u_A, u_B) est l'unité de $A \times B$. Si A et B sont involutives, alors (x^*, y^*) est l'adjoint de l'élément (x, y).

Lemme 5.4.1. *Si A admet une unité u, alors*

$$\begin{aligned} \varphi\colon\quad A^1 &\to \mathbb{K} \times A \\ \lambda + x &\mapsto (\lambda, \lambda u + x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres unifères qui est involutif si A est involutif.

Dans l'exemple d'algèbre 14,

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_0(T)^1 &\to \mathscr{C}(\tilde{T}) \\ \lambda + x &\mapsto \lambda \mathbb{1} + x \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres unifères involutives. Dans l'exemple d'algèbre 18, l'unité adjointe peut être réalisée comme la mesure de Dirac δ_1 en 1 en identifiant $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ à un sous-espace vectoriel fermé du dual de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$.

Proposition 5.4.2. *Soit A une algèbre et $x \in A$. Soit $r \in \mathbb{K}(t)$. Si $r(0 + x)$ est bien défini et r s'annule en 0, alors $r(0 + x) \in A$.*

Démonstration. Soit δ le morphisme d'algèbres unifères (5.1). Alors

$$\delta(r(0 + x)) = r(\delta(0 + x)) = r(0) = 0.$$

□

On peut ainsi définir un calcul fonctionnel rationnel lorsque A n'est pas nécessairement unifère.

5.5 Spectre dans une algèbre non nécessairement unifère

Lemme 5.5.1. *Si A et B sont des algèbres unifères et $(a, b) \in A \times B$, alors*

$$\operatorname{spec}_{A\times B}(a, b) = \operatorname{spec}_A a \cup \operatorname{spec}_B b.$$

Démonstration. $\lambda(u_A, u_B) - (a, b) = (\lambda u_A - a, \lambda u_B - b)$ est inversible dans $A \times B$ si et seulement si $\lambda u_A - a$ est inversible dans A et $\lambda u_B - b$ est inversible dans B. □

Définition 5.5.1. Soit A une algèbre et $x \in A$. On note $\operatorname{spec}^1 x$ le *spectre de $0 + x$ relativement à l'algèbre unifère A^1 déduite de A par adjonction d'une unité.*

Proposition 5.5.2. *Soit A une algèbre et $x \in A$.*

(*i*) $0 \in \operatorname{spec}^1 x$.

(*ii*) *Si* $\varphi\colon A \to B$ *est un morphisme d'algèbres, alors* $\operatorname{spec}^1_B \varphi(x) \subset \operatorname{spec}^1_A x$*.*

(*iii*) *Si* A *admet une unité* u*,* $\operatorname{spec}^1 x = \{0\} \cup \operatorname{spec} x$*.*

(*iv*) *Si* A *est involutive, alors* $\operatorname{spec}^1 x^* = \overline{\operatorname{spec}^1 x}$*.*

Démonstration. (*i*). En effet, si $\lambda + y \in A^1$, alors $(\lambda + y)(0 + x) = 0 + (\lambda x + yx) \neq 1 + 0$.
(*ii*). Il suffit de vérifier que l'application qui à $\lambda + x \in A^1$ associe $\lambda + \varphi(x) \in B^1$ est un morphisme d'algèbres unifères.
(*iii*) résulte des lemmes 5.4.1 et 5.5.1. □

5.6 Spectre de fonction

5.6.1 Spectre dans $\mathscr{C}_0(T)$

Proposition 5.6.1. (*i*) *Si* T *est compact et* $x \in \mathscr{C}(T)$*, alors* $\operatorname{spec} x = x(T)$*.*

(*ii*) *Si* T *est localement compact et* $x \in \mathscr{C}_0(T)$*, alors* $\operatorname{spec}^1 x = \{0\} \cup x(T)$*.*

Démonstration. Si T est compact, l'élément $\lambda\mathbb{1} - x$ est inversible si et seulement s'il ne s'annule pas. Si T est localement compact, alors x s'identifie à $\tilde{x} \in \mathscr{C}(\tilde{T})$ définie par

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in T \\ 0 & \text{si } t = \infty \end{cases}$$ □

5.6.2 Spectre dans $\mathrm{L}^\infty(\mu)$

Proposition 5.6.2. *Si* $x \in \mathrm{L}^\infty(\mu)$*, alors* $\operatorname{spec} x = \operatorname{im\,ess} x$*.*

Démonstration. $\lambda\mathbb{1} - x$ est inversible si et seulement si $\exists\, \varepsilon > 0\ \mu[|\lambda - x| < \varepsilon] = 0$. □

5.7 Spectre dans les algèbres de groupe

– Soit $x \in \ell_1(\mathbb{Z})$. Alors

$$\operatorname{spec} x \supset \operatorname{spec} \hat{x} = \Big\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n : t \in \mathbb{T} \Big\},$$

parce que $\mathscr{F}$ est un morphisme d'algèbres et par la proposition 5.1.1. On a en fait égalité : c'est le théorème de Wiener qui résultera de la théorie de Gelfand.

– Soit $x \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Alors de même

$$\operatorname{spec}^1 x \supset \operatorname{spec}^1 \hat{x} = \{0\} \cup \Big\{ \int_{\mathbb{T}} x(t) t^{-n}\, \mathrm{d}t : n \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

La théorie de Gelfand montrera qu'on a égalité.

5.8 Spectre dans une algèbre de Banach

Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes.

5.8.1 Algèbre normée et algèbre de Banach

Dans chacun de nos exemples d'algèbre qui est aussi un espace normé, l'inégalité $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ vaut : la multiplication est une application bilinéaire bornée. Soit A une algèbre et considérons le morphisme d'algèbres $L\colon A \mapsto \mathscr{B}(A)$ défini par $L_x(y) = xy$.

– Considérons une algèbre A qui est aussi un espace de Banach, telle que la multiplication est séparément continue : pour chaque $x \in A$, les opérateurs $y \mapsto xy$ et $y \mapsto yx$ sont bornés. Soit $S = \{L_x : x \in \mathrm{B}_A\}$. Pour chaque $y \in A$, $\{L_x(y) : x \in \mathrm{B}_A\}$ est borné. Par le théorème de Banach-Steinhaus, S est borné :

$$\exists C \geqslant 0 \quad \forall x, y \in A \quad \|xy\| \leqslant C\|x\|\|y\|. \tag{5.2}$$

Donc la multiplication est une application bilinéaire bornée.

– Considérons une algèbre A qui est aussi un espace normé, telle que (5.2) vaut.

  – Si A admet une unité u, alors L est un isomorphisme d'algèbres unifères et d'espaces normés sur une sous-algèbre fermée de $\mathscr{B}(A)$ contenant Id. En effet,

$$C\|x\| \geqslant \|L_x\| \geqslant \left\| L_x\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right\| = \frac{\|x\|}{\|u\|}.$$

  On a alors

$$\|L_x \circ L_y\| \leqslant \|L_x\|\,\|L_y\| \quad \text{et} \quad \|L_u\| = 1.$$

  – Si A n'est pas unifère, notons qu'on peut munir A^1 d'une norme qui étend la norme sur A : posons $\|\lambda + x\| = |\lambda| + \|x\|$. Alors (5.2) vaut aussi pour A^1 et la même discussion montre que $L^1\colon A \mapsto \mathscr{B}(A^1)$ définie par $L^1_x(\lambda + y) = (0 + x)(\lambda + y)$ est un isomorphisme d'algèbres et d'espaces normés sur une sous-algèbre fermée de $\mathscr{B}(A^1)$. On a alors

$$\|L^1_x \circ L^1_y\| \leqslant \|L^1_x\|\,\|L^1_y\|.$$

Cette discussion donne des conditions très générales auxquelles A est, pour une norme équivalente, une algèbre normée au sens de la définition suivante.

Définition 5.8.1. (i) Une *algèbre normée* est une algèbre A qui est aussi un espace vectoriel normé, telle que la multiplication satisfait $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.

(ii) A est une *algèbre normée unifère* si A est une algèbre normée et A admet une unité u telle que $\|u\| = 1$.

(iii) Si A est de plus complet, on dit que A est une *algèbre de Banach*.

(iv) Si A et B sont deux algèbres normées, on appelle *morphisme d'algèbres normées* de A dans B un morphisme d'algèbres $\varphi\colon A \to B$ tel que φ soit borné.

L'algèbre $\mathscr{B}(E)$ est normée si E est un espace normé, et une algèbre de Banach si E est un espace de Banach.
Si A est munie d'une involution qui est continue, alors, quitte à remplacer la norme de A par la norme équivalente définie par $\max(\|x\|, \|x^*\|)$, on peut poser la définition suivante.

Définition 5.8.2. (i) A est une *algèbre normée involutive* si A est une algèbre involutive qui est une algèbre normée et $\|x^*\| = \|x\|$ pour tout $x \in A$.

(ii) A est une *algèbre stellaire* si A est une algèbre de Banach involutive telle que $\|x^*x\| = \|x\|^2$ pour tout $x \in A$.

Remarque 5.8.1. Si A est une algèbre de Banach telle que $\|x\|^2 \leqslant \|x^*x\|$, alors A est une algèbre stellaire. Si une algèbre stellaire admet une unité u, alors nécessairement $\|u\| = 1$.

Les algèbres de groupe, l'algèbre du disque et H^∞ sont des algèbres normées involutives. Les algèbres suivantes sont stellaires : $\mathscr{C}_0(T)$, $\mathscr{L}^\infty(\mu)$, $\mathrm{L}^\infty(\mu)$, et $\mathscr{B}(E)$ si E est un espace de Hilbert.

5.8.2 Inverse, résolvante et spectre dans une algèbre de Banach

Proposition 5.8.1. *Soit A une algèbre normée unifère et $x \in A$. Si la série $\sum x^k$ converge dans A, alors $u - x$ est inversible et*

$$(u - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Si $\|x\| < 1$, *cette série converge normalement ; si elle converge dans* A,

$$\left\|(u-x)^{-1}-u\right\| \leqslant \frac{\|x\|}{1-\|x\|}.$$

Démonstration. Soit $x_n = u+x+\cdots+x^n$. Alors $(u-x)x_n = x_n(u-x) = u-x^{n+1}$. Comme $x^{n+1} \to 0$, on a $(u-x)x_n = x_n(u-x) \to u$. Comme la série $\sum x^k$ converge et la multiplication est séparément continue, on a

$$(u-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)(u-x) = u.$$

Si $\|x\| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\|x^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|x\|^k = \frac{1}{1-\|x\|}$. De plus, $(u-x)^{-1}-u = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. □

Corollaire 5.8.2. *Soit* A *une algèbre de Banach unifère. Alors* A^{-1} *est ouvert. Soit* $x \in A$. *Alors* $\operatorname{rés} x$ *est un voisinage ouvert de l'infini. La résolvante de* x *est développable en série entière au voisinage de tout point de* $\operatorname{rés} x$ *et*

$$\left\|\mathrm{R}_\lambda(x)-\lambda^{-1}u\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|^2}\frac{\|x\|}{1-|\lambda|^{-1}\|x\|} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

pour $|\lambda| > \|x\|$.

Démonstration. Si $x \in A^{-1}$ et $\|x-y\| < \|x^{-1}\|^{-1}$, alors $y = (u-(x-y)x^{-1})x$ est inversible : donc A^{-1} est ouvert. En particulier, si $\lambda \in \operatorname{rés} x$ et $|\lambda-\mu| < \|(\lambda u-x)^{-1}\|^{-1}$, alors $\mu u - x$ est inversible et

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_\mu(x) = (\mu u-x)^{-1} &= (\lambda u-x)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left((\lambda-\mu)(\lambda u-x)^{-1}\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda u-x)^{-k-1}(\lambda-\mu)^k.\end{aligned}$$

Si $|\mu|\,\|x\| < 1$, la série $\sum x^k\mu^k$ converge vers $(u-\mu x)^{-1}$. Posons $\lambda = 1/\mu$. Comme $(u-\mu x)^{-1} = \lambda(\lambda u-x)^{-1}$, $\lambda \in \operatorname{rés} x$ si $|\lambda| > \|x\|$ et

$$\|\lambda(\lambda u-x)^{-1}-u\| \leqslant |\lambda^{-1}|\,\|x\|(1-|\lambda^{-1}|\,\|x\|)^{-1}.$$ □

Soit $\lambda \in \operatorname{spec} x$ et $n \geqslant 1$. Alors cette démonstration donne $|\lambda| \leqslant \|x\|$; comme $\lambda^n \in \operatorname{spec} x^n$, on a aussi $|\lambda^n| \leqslant \|x^n\|$ et donc $|\lambda| \leqslant \|x^n\|^{1/n}$.

Définition 5.8.3. Soit A une algèbre normée et $x \in A$. Le *rayon spectral* de x est $\operatorname{rs}(x) = \inf_{n\geqslant 1}\|x^n\|^{1/n}$.

Corollaire 5.8.3. *Soit* A *une algèbre de Banach unifère et* $x \in A$. *Alors le spectre de* x *est une partie fermée du disque fermé de centre* 0 *et de rayon* $\operatorname{rs}(x)$.

Corollaire 5.8.4. *Soit* A *une algèbre de Banach unifère et* $x \in A$. *Si* $\|x\| = \|x^{-1}\| = 1$, *alors* $\operatorname{spec} x \subset \mathbb{T}$. *C'est le cas en particulier si* A *est une algèbre stellaire et* x *est unitaire.*

Démonstration. On a $\operatorname{spec} x$, $\operatorname{spec}(x^{-1}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 1\}$ et donc

$$\operatorname{spec} x = \left(\operatorname{spec}(x^{-1})\right)^{-1} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant 1\}.$$

Donc $\operatorname{spec} x \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. □

5.9 Spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel normé

Définition 5.9.1. Soit E un espace vectoriel normé et $x \in \mathscr{B}(E)$. Un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre approchée de* x s'il existe une suite (v_n) dans S_E telle que $\lambda v_n - x(v_n) \to 0$.

Toute valeur propre approchée est valeur spectrale. Supposons que E est un espace de Banach.

- λ est valeur propre approchée de x sans être une valeur propre si et seulement si $\lambda \operatorname{Id} - x$ est injectif d'image non fermée.
- λ est valeur spectrale de x sans être une valeur propre approchée si et seulement si $\lambda \operatorname{Id} - x$ est injectif d'image fermée différente de E.

Proposition 5.9.1. *Soit E un espace de Banach et x à la frontière de $\mathscr{B}(E)^{-1}$. Alors 0 est valeur propre approchée de x.*

Démonstration. Comme $\mathscr{B}(E)^{-1}$ est ouvert, x est non inversible limite d'une suite d'opérateurs x_n inversibles. Alors $\|x_n^{-1}\|$ n'est pas borné : sinon, il existerait n tel que $\|x_n - x\| < \|x_n^{-1}\|^{-1}$ et donc x serait inversible. On peut donc supposer que $\|x_n^{-1}\| \to \infty$. Il existe donc une suite d'éléments w_n de norme 1 telle que $\|x_n^{-1}(w_n)\| \to \infty$. Posons $v_n = \dfrac{x_n^{-1}(w_n)}{\|x_n^{-1}(w_n)\|}$. Alors $v_n \in \mathrm{S}_E$ et $x_n(v_n) \to 0$. Donc $x(v_n) \to 0$. □

Corollaire 5.9.2. *Soit E un espace de Banach et $x \in \mathscr{B}(E)$. Si λ est à la frontière de* $\operatorname{spec} x$, *alors λ est valeur propre approchée de x.*

Proposition 5.9.3. *Soit $x \in \mathscr{B}(E)$ et $r \in \mathbb{K}(t)$ tel que $r(x)$ est bien défini. Si λ est valeur propre approchée de x associée à (v_n), alors $r(\lambda)$ est valeur propre approchée de $r(x)$ associée à (v_n).*

Démonstration. Commençons par montrer le résultat lorsque r est un polynôme et faisons une récurrence sur le degré de r. Si r est une constante a_0, l'énoncé devient trivial. Soit r de degré $n \geqslant 1$ et de terme constant a_0, et posons $s = \dfrac{r - a_0}{t}$. Si $\lambda v_n - x(v_n) \to 0$ et $s(\lambda)v_n - s(x)(v_n) \to 0$, alors, par continuité de x, on a successivement

$$\begin{gathered} s(\lambda)x(v_n) - x \circ s(x)(v_n) \to 0 \\ (ts)(\lambda)v_n - (ts)(x)(v_n) \to 0 \\ r(\lambda)v_n - r(x)(v_n) \to 0. \end{gathered}$$

Soit à présent $\dfrac{p}{q}$ un représentant de r avec p et q premiers entre eux. Alors $q(\lambda)v_n - q(x)(v_n) \to 0$ et par continuité de $r(x)$, $q(\lambda)r(x)(v_n) - p(x)(v_n) \to 0$. Or $p(\lambda)v_n - p(x)(v_n) \to 0$ et donc $q(\lambda)r(x)(v_n) - p(\lambda)v_n \to 0$. En particulier, $q(\lambda) \neq 0$ puisque sinon $p(\lambda) \neq 0$. Donc $r(x)(v_n) - r(\lambda)v_n \to 0$. □

Proposition 5.9.4. *Soit E un espace de Banach et $x \in \mathscr{B}(E)$. Le spectre de x' dans $\mathscr{B}(E')$ égale le spectre de x dans $\mathscr{B}(E)$.*

Démonstration. On a $(\lambda \operatorname{Id}_E - x)' = \lambda \operatorname{Id}_{E'} - x'$. □

5.10 Spectre d'un opérateur borné sur un espace de Hilbert

Proposition 5.10.1. *Soit E un espace de Hilbert et soit $x \in \mathscr{B}(E)$ normal. Alors toute valeur spectrale de x est valeur propre approchée de x.*

5.10.1 Spectre et image numérique

Définition 5.10.1. Soit E un espace de Hilbert et soit $x \in \mathscr{B}(E)$. L'*image numérique* de x est

$$\mathrm{W}(x) = \{\langle x(v), v\rangle : v \in \mathrm{S}_E\}.$$

Le *rayon numérique* de x est $\mathrm{w}(x) = \sup_{\lambda \in \mathrm{W}(x)} |\lambda|$.

On a $\mathrm{W}(x^*) = \{\bar\lambda : \lambda \in \mathrm{W}(x)\}$; si $a, b \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{W}(a \operatorname{Id} + bx) = a + b\,\mathrm{W}(x)$.

Proposition 5.10.2. *Soit E un espace de Hilbert et $x \in \mathscr{B}(E)$. Alors* $\operatorname{spec} x \subset \overline{\mathrm{W}(x)}$.

Démonstration. $\overline{\mathrm{W}(x)}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{K}$. Si $\lambda \notin \overline{\mathrm{W}(x)}$, alors $d = \inf_{\mu \in \mathrm{W}(x)} |\lambda - \mu| > 0$. On a donc pour tout $v \in \mathrm{S}_E$

$$d \leqslant |\lambda - \langle v, x(v)\rangle| = |\langle v, (\lambda \operatorname{Id} - x)(v)\rangle| \leqslant \|(\lambda \operatorname{Id} - x)(v)\|. \tag{5.3}$$

On en déduit que $\lambda \operatorname{Id} - x$ induit un isomorphisme d'espaces normés entre E et $\operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - x)$. Donc $\operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - x)$ est complet et par conséquent fermé dans E. De plus (5.3) montre que $(\operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - x))^\perp$ est réduit à $\{0\}$ puisque sinon, cet espace contiendrait un élément v de norme 1 qui donnerait $d \leqslant 0$. Donc $\lambda \operatorname{Id} - x$ est inversible et $\lambda \notin \operatorname{spec} x$. ☐

Proposition 5.10.3. *Soit $x \in \mathscr{B}(E)$ et soit $\Phi(v, w) = \langle x(v), w\rangle$ la forme bilinéaire associée.*

(*i*) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, x est hermitien si et seulement si Φ est une forme hermitienne, si et seulement si* $\mathrm{W}(x) \subset \mathbb{R}$.

(*ii*) *Si x est hermitien,* $\mathrm{w}(x) = \|x\|$.

(*iii*) *Si $\mathrm{W}(x) \subset \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire que Φ est une forme hermitienne positive, alors on a pour tout $v \in E$*

$$\|x(v)\| \leqslant \|x\|^{1/2} \langle x(v), v\rangle^{1/2}.$$

(*iv*) *Si x est hermitien, alors $\lambda = \inf_{v \in \mathrm{S}_E} \langle x(v), v\rangle$ est valeur propre approchée de x ; si cet infimum est atteint en un élément v, alors λ est valeur propre de x associée au vecteur propre v. De même pour $\mu = \sup_{v \in \mathrm{S}_E} \langle x(v), v\rangle$.*

Démonstration. (*i*). Si x est hermitien, alors $\Phi(v, v) = \overline{\Phi(v, v)}$ et donc $\mathrm{W}(x) \subset \mathbb{R}$. Réciproquement, si $\mathrm{W}(x) \subset \mathbb{R}$, alors pour tout ϵ de module 1

$$\Phi(v + \epsilon w, v + \epsilon w) = \Phi(v, v) + \epsilon\Phi(w, v) + \bar\epsilon\Phi(v, w) + \Phi(w, w) \in \mathbb{R} \tag{5.4}$$

et donc

$$\epsilon\Big(\Phi(w, v) - \overline{\Phi(v, w)}\Big) + \bar\epsilon\Big(\Phi(v, w) - \overline{\Phi(w, v)}\Big) = 0$$

En posant successivement $\epsilon = 1$ et $\epsilon = \mathrm{i}$, on obtient $\Phi(v, w) = \overline{\Phi(w, v)}$ et donc $\langle x(v), w\rangle = \langle v, x(w)\rangle$.
(*ii*). Si $\epsilon \in \mathbb{K}$ est de module 1, on a par (5.4)

$$\Phi(v + \epsilon w, v + \epsilon w) - \Phi(v - \epsilon w, v - \epsilon w) = 4 \operatorname{Re}(\bar\epsilon\Phi(v, w)).$$

Par l'identité du parallélogramme,

$$4 \operatorname{Re}(\bar\epsilon\Phi(v, w)) \leqslant \mathrm{w}(x)\|v + \epsilon w\|^2 + \mathrm{w}(x)\|v - \epsilon w\|^2 = \mathrm{w}(x)(2\|v\|^2 + 2\|w\|^2).$$

et donc $\|x\| = \sup_{v \in \mathrm{B}_E} \sup_{w \in \mathrm{B}_E} \max_{|\epsilon| = 1} \operatorname{Re}(\bar\epsilon\Phi(v, w)) \leqslant \mathrm{w}(x) \leqslant \|x\|$.
(*iii*). Si $\mathrm{W}(x) \subset \mathbb{R}^+$, Φ est une forme hermitienne positive et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}\|x(v)\|^2 = \langle x(v), x(v)\rangle = \Phi(v, x(v)) &\leqslant \Phi(v, v)^{1/2}\Phi(x(v), x(v))^{1/2} \\ &\leqslant \langle x(v), v\rangle^{1/2} \|x\|^{1/2}\|x(v)\|.\end{aligned}$$

(*iv*). Soit (v_n) une suite dans S_E telle que $\langle x(v_n), v_n\rangle \to \lambda$: alors $\mathrm{W}(x - \lambda \operatorname{Id}) = \mathrm{W}(x) - \lambda \subset \mathbb{R}^+$ et $\langle (x - \lambda \operatorname{Id})(v_n), v_n\rangle \to 0$. L'inégalité (*iii*) donne alors $(x - \lambda \operatorname{Id})(v_n) \to 0$; si $\langle (x - \lambda \operatorname{Id})(v), v\rangle = 0$, elle donne $(x - \lambda \operatorname{Id})(v) = 0$. ☐

Corollaire 5.10.4. *Soit $x \in \mathscr{B}(E)$ hermitien.*
– *Le spectre de x est une partie fermée de $\left[\inf_{v\in \mathrm{S}_E} \langle x(v), v\rangle, \sup_{v\in \mathrm{S}_E} \langle x(v), v\rangle\right]$ et contient les bornes de cet intervalle.*
– *x a une valeur propre approchée réelle de valeur absolue $\|x\|$.*
– *Si $r \in \mathbb{K}(t)_{\operatorname{spec} x}$, alors $\operatorname{spec} r(x) = r(\operatorname{spec} x)$.*

Démonstration. Notons qu'en particulier $\operatorname{spec} x$ n'est pas vide. Il reste à fournir la deuxième moitié du théorème spectral dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Il suffit de montrer que $p(x)$ est inversible pour tout $p = a_0 + a_1 t + t^2$ irréductible. Comme $p = a_0 - \frac{a_1^2}{4} + \left(\frac{a_1}{2} + t\right)^2$, on a pour tout $v \in \mathrm{S}_E$

$$\langle p(x)(v), v\rangle = a_0 - \frac{a_1^2}{4} + \left\langle \left(\frac{a_1}{2} + x\right)^2 (v), v\right\rangle \geqslant a_0 - \frac{a_1^2}{4} > 0. \qquad \square$$

Remarque 5.10.1. Si x est normal et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, x a une valeur spectrale de module $\|x\|$. Ce résultat sera démontré beaucoup plus tard : je ne connais pas de démonstration simple qui reposerait sur l'étude de $\mathrm{W}(x)$.

5.10.2 Calcul fonctionnel continu d'un opérateur hermitien

Soit x hermitien et $p = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathbb{K}[t]$. Alors $p(x)^* = p^*(x)$ avec $p^* = \overline{a_0} + \overline{a_1} t + \cdots + \overline{a_n} t^n$ et donc $\|p(x)\|^2 = \|p(x)^* \circ p(x)\| = \|(p^* p)(x)\|$. Comme $(p^* p)(x)$ est hermitien, le corollaire 5.10.4 donne

$$\|p(x)\|^2 = \operatorname{rs}(p^* p)(x) = \max_{\lambda\in \operatorname{spec} x} |(p^* p)(\lambda)| = \max_{\lambda\in \operatorname{spec} x} \overline{p(\lambda)} p(\lambda) = \max_{\lambda\in \operatorname{spec} x} |p(\lambda)|^2.$$

Donc le calcul fonctionnel polynomial définit une isométrie du sous-espace vectoriel dense de $\mathscr{C}(\operatorname{spec} x)$ formé des fonctions polynomiales dans $\mathscr{B}(E)$. Il s'étend de manière unique en une isométrie de $\mathscr{C}(\operatorname{spec} x)$ dans $\mathscr{B}(E)$ qui est encore un morphisme d'algèbres.

Définition 5.10.2. Soit E un espace de Hilbert et $x \in \mathscr{B}(E)$ hermitien. Soit $f \in \mathscr{C}(\operatorname{spec} x)$. Soit (p_n) une suite de fonctions polynomiales telles que $p_n \to f$. On pose

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x).$$

L'application $f \mapsto f(x)$ est appelée le *calcul fonctionnel continu de x*.

On a donc démontré la proposition suivante.

Proposition 5.10.5. *Soit $x \in \mathscr{B}(E)$ hermitien. Le calcul fonctionnel continu de x est l'unique morphisme d'algèbres normées unifères de $\mathscr{C}(\operatorname{spec} x)$ dans $\mathscr{B}(E)$ qui transforme la fonction $t \mapsto t$ en x. De plus, c'est un morphisme d'algèbres involutives et une isométrie à valeurs dans les opérateurs normaux.*

Proposition 5.10.6. *Soit x hermitien et $f \in \mathscr{C}(\operatorname{spec} x)$.*

(*i*) *Si λ est valeur propre approchée de x associée à (v_n), alors $f(\lambda)$ est valeur propre approchée de $f(x)$ associée à (v_n).*

(*ii*) $\operatorname{spec} f(x) = f(\operatorname{spec} x)$.

(*iii*) *Supposons f à valeurs réelles. Alors $f(x)$ est hermitien. Si $g \in \mathscr{C}(\operatorname{spec} f(x))$, alors $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.*

Démonstration. (*i*). Soit (f_n) une suite de fonctions polynomiales tendant vers f. Alors $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$, $f_n(x) \to f(x)$ et $f_n(\lambda)v_n - (f_n(x))(v_n) \to 0$. Donc $f(\lambda)v_n - (f(x))(v_n) \to 0$.
(*ii*). Si $\lambda \in \operatorname{spec} x$, alors λ est valeur propre approchée de x et donc $f(\lambda)$ est valeur propre approchée de $f(x)$: donc $f(\lambda) \in \operatorname{spec} f(x)$. Si $\lambda \notin f(\operatorname{spec} x)$, $(\lambda - f)^{-1} \in \mathscr{C}(\operatorname{spec} x)$ et donc $(\lambda \operatorname{Id} - f(x))^{-1}$ est bien défini : $\lambda \notin \operatorname{spec} f(x)$.
(*iii*). Soit $y = f(x)$. Alors y est hermitien. Si $g \in \mathscr{C}(\operatorname{spec} f(x))$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}(\operatorname{spec} x)$. Considérons $g \mapsto g \circ f(x)$. C'est un morphisme d'algèbres normées unifères qui transforme la fonction $t \mapsto t$ en y. Par unicité, c'est le calcul fonctionnel continu de y et donc $g \circ f(x) = g(y)$. $\square$

5.10.3 Opérateur positif

Proposition 5.10.7. *Soit $x \in \mathscr{B}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) *x est positif.*

(*ii*) *x est hermitien et $\mathrm{W}(x) \subset \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire que Φ est une forme hermitienne positive.*

(*iii*) *x est hermitien et de spectre positif.*

(*iv*) *Il existe y hermitien tel que $x = y^2$.*

On peut de plus supposer que y est positif et alors y est unique : c'est la racine carrée *de x.*

Démonstration. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Si $x = y_1^* y_1 + \cdots + y_k^* y_k$, alors $\langle xv, v\rangle = \langle y_1 v, y_1 v\rangle + \cdots + \langle y_k v, y_k v\rangle \geqslant 0$.
(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Si $\mathrm{W}(x) \subset \mathbb{R}^+$, alors aussi $\operatorname{spec} x \in \mathbb{R}^+$.
(*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*). Le calcul fonctionnel continu permet de définir l'hermitien de spectre positif $\sqrt{x}$: alors $\sqrt{x}^2 = (\cdot^2 \circ \sqrt{\cdot})(x) = x$.
Si y est positif tel que $y^2 = x$, alors y est hermitien de spectre positif et $y = (\sqrt{\cdot} \circ \cdot^2)(y) = \sqrt{y^2} = \sqrt{x}$. ☐

5.10.4 Décomposition polaire

Définition 5.10.3. Soit $x \in \mathscr{B}(E)$. Le *module* de x est l'opérateur $|x| = \sqrt{x^* \circ x}$.

Proposition 5.10.8. *Soit $x \in \mathscr{B}(E)$. Il existe un unique $u \in \mathscr{B}(E)$ tel que $x = u \circ |x|$ et $\ker u = \ker x$. Alors u définit un opérateur unitaire entre $\overline{\operatorname{im}|x|}$ et $\overline{\operatorname{im} x}$.*

La décomposition $x = u \circ |x|$ s'appelle la *décomposition polaire* de x.

Démonstration. Notons que

$$\big\||x|(v)\big\|^2 = \big\langle |x|^2(v), v\big\rangle = \langle x^* \circ x(v), v\rangle = \langle x(v), x(v)\rangle = \|x(v)\|^2.$$

En particulier, $\ker|x| = \ker x$. Pour définir $u_0 \in \mathscr{B}(\operatorname{im}|x|, E)$ tel que $x = u_0 \circ |x|$, il faut et il suffit de poser $u_0(|x|(v)) = x(v)$. Alors u_0 est une isométrie qui se prolonge de manière unique à $u_1 \in \mathscr{B}(\overline{\operatorname{im}|x|}, E)$, qui est une isométrie d'image $\overline{\operatorname{im} x}$. Comme $\operatorname{im}|x|^\perp = \ker|x| = \ker x$, l'unique prolongement $u \in \mathscr{B}(E)$ de u_1 tel que $\ker u = \ker x$ est défini par $u(v) = u_0(p_{\overline{\operatorname{im}|x|}}(v))$. ☐

5.11 Spectre d'un opérateur compact

5.11.1 Lemme de Riesz

Proposition 5.11.1. *Soit E un espace vectoriel normé et S un sous-espace vectoriel fermé propre de E. Pour tout $\delta > 0$ il existe $v \in E$ de norme 1 tel que $d(v, S) > 1 - \delta$.*

Démonstration. Soit $\delta > 0$ et $w \in E \backslash S$. Alors $d(w, S) > 0$ puisque S est fermé : posons $w_s = \dfrac{w - s}{\|w - s\|}$ pour chaque $s \in S$. Alors

$$d(w_s, S) = \inf_{s' \in S} \left\| \frac{w - s}{\|w - s\|} - s' \right\| = \frac{\inf_{s' \in S} \big\|w - s - \|w - s\| s'\big\|}{\|w - s\|} = \frac{d(w, S)}{\|w - s\|}.$$

On peut donc prendre $v = w_s$ si on choisit $s \in S$ tel que $\|w - s\| < \dfrac{d(w, S)}{1 - \delta}$. ☐

Corollaire 5.11.2. *Soit E un espace vectoriel normé. Si B_E est relativement compact, alors E est de dimension finie.*

Démonstration. Supposons que E n'est pas de dimension finie : construisons par récurrence une suite (v_n) dans B_E telle que $\|v_n - v_m\| > 1/2$ pour toute paire d'indices n, m distincts. Soit v_1 quelconque ; si $(v_1, \ldots, v_n)$ a été choisi, soit S l'espace vectoriel engendré par $v_1, \ldots, v_n$. Alors S est un sous-espace vectoriel fermé propre de E puisque S est de dimension finie. Par le lemme de Riesz, il existe v_{n+1} tel que $d(v_{n+1}, S) > 1/2$: en particulier, $\|v_{n+1} - v_k\| > 1/2$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
Mais alors toute sous-suite (v'_n) de (v_n) satisfait encore $\|v'_n - v'_m\| > 1/2$: donc aucune sous-suite de (v_n) ne converge et B_E n'est pas relativement compact. $\square$

5.11.2 Alternative de Fredholm

L'alternative de Fredholm est une généralisation de la résolution de systèmes de n équations linéaires à n inconnues. Soit $x \in \mathscr{M}_n$ et $w \in \mathbb{K}^n$ et considérons le système

$$\begin{cases} x_{11}\, v_1 & + & \ldots & + & x_{1n}\, v_n & = & w_1 \\ \ \vdots\ v_1 & + & \ldots & + & \vdots\ v_n & = & \vdots \\ x_{n1}\, v_1 & + & \ldots & + & x_{nn}\, v_n & = & w_n. \end{cases} \tag{5.5}$$

Identifions $v \in \mathbb{K}^n$ avec le vecteur colonne $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et x avec l'opérateur sur $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ défini par $x(v) = xv$. Alors le système (5.5) s'écrit $x(v) = w$. Dire que ce système a une solution quel que soit w, c'est dire que x est surjectif, et dire que la solution est unique, c'est dire que x est injectif. Le théorème du rang dit que la codimension de l'image de x égale la dimension de son noyau. En particulier, x est inversible dès que x est injectif.

Théorème 5.11.3. *Soit E un espace de Banach et $x \in \mathscr{K}(E)$. Soit $\lambda \neq 0$. On a l'alternative suivante :*
– soit $\lambda \operatorname{Id} - x$ *est inversible,*
– soit $\ker \lambda \operatorname{Id} - x \neq \{0\}$,
c'est-à-dire que toute valeur spectrale non nulle de x est valeur propre de x. De plus, $\ker \lambda \operatorname{Id} - x$ *est de dimension finie,* $\operatorname{im} \lambda \operatorname{Id} - x$ *est de codimension finie et* $\lambda \operatorname{Id} - x$ *satisfait le théorème du rang :*

$$\dim \ker \lambda \operatorname{Id} - x = \dim \operatorname{coker} \lambda \operatorname{Id} - x = \dim \ker \lambda \operatorname{Id} - x'.$$

Ce théorème donne la méthode suivante pour résoudre l'équation inhomogène $x(v) = \lambda v + w$ si $\lambda \neq 0$.
- Si l'équation homogène $x(v) = \lambda v$ a comme solution unique $v = 0$, alors équation inhomogène $x(v) = \lambda v + w$ a une solution v unique pour tout $w \in E$.
- Sinon, les solutions de l'équation homogène $x(v) = \lambda v$ forment un espace vectoriel E de dimension finie n et les solutions de l'équation $x'(l) = \lambda l$ forment aussi un espace vectoriel F de dimension n. Alors l'équation inhomogène $x(v) = \lambda v + w$ a une solution v si et seulement si $w \in F_\perp$; l'ensemble des solutions est alors $v + E$.
  Concrètement, si on choisit une base $(v_1, \ldots, v_n)$ pour E et une base $(l_1, \ldots, l_n)$ pour F, alors l'équation inhomogène $x(v) = \lambda v + w$ a une solution particulière v si et seulement si $l_1(w) = \ldots l_n(w) = 0$ et l'ensemble des solutions est alors $\{v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n\}$.

En effet, si l'équation homogène $x(v) = \lambda v$ a comme solution unique $v = 0$, alors $x - \lambda \operatorname{Id}$ est injectif et donc inversible ; sinon $\dim \ker \lambda \operatorname{Id} - x' = \dim \ker \lambda \operatorname{Id} - x$ et $\operatorname{im} \lambda \operatorname{Id} - x = (\ker \lambda \operatorname{Id} - x)_\perp$.

5.11.3 Théorème spectral des opérateurs compacts

Théorème 5.11.4. *Soit E un espace de Banach et $x \in \mathscr{K}(E)$.*

(*i*) *Si E est de dimension infinie, alors $0 \in \operatorname{spec} x$; 0 n'est pas nécessairement valeur propre de x.*

(*ii*) $\operatorname{spec} x \setminus \{0\}$ *est soit vide soit fini soit dénombrable avec 0 comme unique valeur d'adhérence.*

(*iii*) *Si $\lambda \in \operatorname{spec} x \setminus \{0\}$, alors λ est valeur propre de x ; il existe $m_\lambda(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $N_\lambda(x) =$* $\ker(\lambda \operatorname{Id} - x)^{m_\lambda(x)}$ *et $I_\lambda(x) = \operatorname{im}(\lambda \operatorname{Id} - x)^{m_\lambda(x)}$ sont des espaces vectoriels fermés invariants par x, $N_\lambda(x)$ est de dimension finie, E est la somme directe de $N_\lambda(x)$ et $I_\lambda(x)$, et* $\lambda \operatorname{Id} - x|_{I_\lambda(x)}$ *est un isomorphisme d'espaces de Banach.*

Corollaire 5.11.5. *Soit E un espace de Banach et $E_0 \subset E$ un sous-espace vectoriel dense. Soit $x_0 \in \mathscr{K}(E_0)$ et $x \in \mathscr{K}(E)$ son unique prolongement par continuité. Alors* $\operatorname{spec} x_0 = \operatorname{spec} x$ *et pour tout $\lambda \in \operatorname{spec} x_0 \setminus \{0\}$, $m_\lambda(x_0) = m_\lambda(x)$ et $N_\lambda(x_0) = N_\lambda(x)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 2.4.13 et le théorème 5.11.4. □

La démonstration des théorèmes 5.11.3 et 5.11.4 est découpée en quatre lemmes et utilise la réduction de Jordan. Soit $\lambda \neq 0$. Alors $\lambda \operatorname{Id} - x = \lambda(\operatorname{Id} - \lambda^{-1}x)$ et quitte à considérer $\lambda^{-1}x$, on peut supposer que $\lambda = 1$. Soit $y = \operatorname{Id} - x$. Intuitivement, la compacité de x signifie que x est petit par rapport à Id : on dit que y *est une perturbation compacte de l'identité.*

Lemme 5.11.6. $\ker y$ *est de dimension finie.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la boule unité de $\ker y$ est relativement compacte. Soit (v_n) une suite dans $\mathrm{B}_{\ker y}$. Alors $(x(v_n))$ admet une sous-suite $(x(v'_n))$ convergente. Comme $y(v'_n) = 0$, $x(v'_n) = v'_n$ et donc (v'_n) converge. □

Lemme 5.11.7. *Soit S un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors $y(S)$ est un sous-espace vectoriel fermé. En particulier,* $\operatorname{im} y$ *est un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie.*

Démonstration. Soit $\hat{y}\colon S \to F$ l'opérateur y restreint à S et considérons la factorisation canonique

$$\begin{array}{ccc} S/\ker \hat{y} & \xrightarrow{\tilde{y}} & y(S) \\ \uparrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\hat{y}} & S. \end{array}$$

Alors $\tilde{y}$ est une bijection continue. Pour montrer que $y(S)$ est fermé, il suffit de montrer que $y(S)$ est complet. Comme $S/\ker \hat{y}$ est complet, il suffit de montrer que $\tilde{y}^{-1}$ est continue. Procédons par l'absurde et supposons au contraire qu'il existe une suite (v_n) dans F telle que $\|v_n + \ker \hat{y}\| = 1$ et $\hat{y}(v_n) \to 0$. Donc $\inf\limits_{w \in \ker \hat{y}} \|v_n + w\| = 1$. Quitte à ajouter à v_n un élément de $\ker \hat{y}$, on peut supposer que $\|v_n\| \leqslant 2$. Alors $(x(v_n))$ admet une sous-suite $(x(v'_n))$ convergente et comme $v'_n = \hat{y}(v'_n) + x(v'_n)$, (v'_n) converge vers un élément $v \in F$. Alors $\|v + \ker \hat{y}\| = 1$ et $\hat{y}(v) = 0$: c'est contradictoire. En particulier, $\operatorname{im} y$ est fermé. Comme x' est aussi compact, $\ker y'$ est de dimension finie et donc $\operatorname{im} y$ est de codimension finie par la proposition 2.4.6. □

Lemme 5.11.8. *Considérons les suites de sous-espaces de E définies par $N_k = \ker y^k$ et $I_k = \operatorname{im} y^k$. Alors*

(*i*) *N_k est de dimension finie ; I_k est fermé et de codimension finie.*

(*ii*) *Il existe un p tel que $N_k = N$ pour tout $k \geqslant p$ et $I_k = I$ pour tout $k \geqslant p$.*

Démonstration. (*i*) résulte des lemmes précédents parce que y^k est encore une perturbation compacte de l'identité :

$$y^k = (\operatorname{Id} - x)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-x)^j = \operatorname{Id} - x \circ \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-x)^{j-1}.$$

(*ii*). Supposons que $N_k \neq N_{k+1}$ pour tout k. Alors, par le lemme de Riesz, pour tout k il existe $v_k \in N_{k+1}$ de norme 1 tel que $d(v_k, N_k) > 1/2$. Mais alors, si $l < k$,

$$\|x(v_k) - x(v_l)\| = \|v_k - y(v_k) - v_l + y(v_l)\| \geqslant d(v_k, N_k) > \frac{1}{2}$$

et donc $(x(v_k))$ n'a pas de sous-suite convergente : c'est absurde. Supposons que $I_k \neq I_{k-1}$ pour tout k. Alors, par le lemme de Riesz, pour tout k il existe $v_k \in I_{k-1}$ de norme 1 tel que $d(v_k, I_k) > 1/2$. Mais alors, si $l > k$,

$$\|x(v_k) - x(v_l)\| = \|v_k - y(v_k) - v_l + y(v_l)\| \geqslant d(v_k, I_k) > \frac{1}{2}$$

et donc $(x(v_k))$ n'a pas de sous-suite convergente : c'est absurde. □

Lemme 5.11.9. *(i) N est un espace de dimension finie, I est fermé et de codimension finie et $E = N \oplus I$.*

(ii) $y(N) \subset N$.

(iii) $y(I) = I$ et la restriction de y à I est un isomorphisme d'espaces de Banach.

(iv) On a $\dim \operatorname{coker} y = \dim \ker y$.

Démonstration. Tout cela résulte de la réduction de Jordan (théorème 5.2.4) grâce au lemme précédent. La restriction de y à I est inversible par la proposition 2.4.1. □

Démonstration du théorème spectral des opérateurs compacts. (i). Si $0 \notin \operatorname{spec} x$, x est inversible et donc $x \circ x^{-1} = \mathrm{Id}$ est compact. Donc E est de dimension finie. L'opérateur de Volterra sur $\mathscr{C}[0,1]$ est compact et injectif.
(ii). Il s'agit de montrer que $\{\lambda \in \operatorname{spec} x : |\lambda| > \varepsilon\}$ est fini pour chaque $\varepsilon > 0$. Supposons au contraire que x a une infinité de valeurs propres λ_k deux à deux distinctes de module supérieur à ε. Pour chaque k soit v_k vecteur propre associé à λ_k. Alors les v_k sont linéairement indépendants par le lemme 5.2.2 de décomposition des noyaux. Soit E_k l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Par le lemme de Riesz, pour tout k il existe $w_k \in E_k$ de norme 1 tel que $d(w_k, E_{k-1}) > 1/2$. Comme $x(E_k) \subset E_k$ et $(x - \lambda_k)(E_k) \subset E_{k-1}$ pour tout k, on a pour $k > l$

$$\|x(w_k) - x(w_l)\| = \|\lambda_k w_k + (x - \lambda_k)(w_k) - x(w_l)\| \geqslant |\lambda_k| d(w_k, E_{k-1}) > \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc $(x(w_k))$ n'a pas de sous-suite convergente : c'est absurde. □

5.12 Spectre d'un opérateur compact sur un espace de Hilbert

5.12.1 Théorème spectral des opérateurs compacts normaux

Théorème 5.12.1. *Soit E un espace de Hilbert et $x \in \mathscr{K}(E)$. Si x est hermitien, il existe un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{K}$ qui est fini ou dénombrable avec 0 comme unique valeur d'adhérence et des projections orthogonales p_λ sur des espaces vectoriels fermés N_λ deux à deux orthogonaux, de dimension finie sauf éventuellement pour $\lambda = 0$, tels que*

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda p_\lambda, \tag{5.6}$$

En fait, $\Lambda = \operatorname{spec} x$, $N_\lambda = \ker \lambda \mathrm{Id} - x$ et $E = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda}$. En particulier, x a une valeur propre de module $\|x\|$. Ce résultat vaut encore si x est normal lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Démonstration. Supposons que x est compact normal. Soit

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{spec} x} \ker \lambda \mathrm{Id} - x.$$

Alors $x^*(F) \subset F$ et donc, si $v \in F^\perp$ et $w \in F$, $\langle x(v), w\rangle = \langle v, x^*(w)\rangle = 0$, c'est-à-dire que l'espace de Hilbert $F^\perp$ est stable par x. Soit y la restriction de x à $F^\perp$: y n'a pas de valeur propre. Par le théorème spectral des opérateurs compacts, y n'a pas de valeur spectrale non nulle.
Si x est hermitien, y est hermitien et le corollaire 5.10.4 montre que $y = 0$: donc $F^\perp \subset \ker x \subset F$, $F^\perp = \{0\}$ et $\overline{F} = E$.
Si x est normal, considérons $z = y^* \circ y$: z est compact hermitien et $y \circ z = z \circ y$. Si $z \neq 0$, z aurait une valeur propre non nulle λ et $G = \ker \lambda \mathrm{Id} - z$ serait stable par y. Mais alors la restriction de y à l'espace de dimension finie G aurait une valeur propre et donc y aurait une valeur propre. Donc $z = 0$ et $y = 0$.

Si v est une somme finie $\sum v_\lambda$ avec $v_\lambda \in N_\lambda$, alors $x(v) = \sum \lambda v_\lambda$. Soit $v \in E$. Alors $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda$ avec $v_\lambda \in N_\lambda$. Comme x est continu, $x(v) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda p_\lambda(v)$. De plus, pour tout $\Lambda_1 \subset \Lambda$ fini,

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1} \lambda p_\lambda(v) \Big\|^2 &= \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1} |\lambda p_\lambda(v)|^2 \\ &\leqslant \max_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1} |\lambda|^2 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1} |p_\lambda(v)|^2 \\ &\leqslant \Big(\max_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1} |\lambda| \Big)^2 \|v\|^2.\end{aligned}$$

et donc la série $\sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda p_\lambda$ converge dans $\mathscr{B}(E)$. □

Choisissons une base hilbertienne S_λ de N_λ pour chaque $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$: alors S_λ est fini. Soit (v_j) une énumération de $\bigcup_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} S_\lambda$ et soit λ_j tel que $v_j \in N_{\lambda_j}$. Alors

$$x(v) = \sum \lambda_j \langle v, v_j \rangle v_j \quad \text{pour tout } v \in E :$$

x est la somme d'une série d'opérateurs de rang 1.

5.12.2 Théorème spectral des opérateurs compacts

Théorème 5.12.2. *Soit $x \in \mathscr{K}(E)$. Il existe des systèmes orthonormés (v_j) et (w_j) et une suite réelle (s_j) qui décroît vers 0 tels que*

$$x(v) = \sum s_j \langle v, v_j \rangle w_j \quad \textit{pour tout } v \in E. \tag{5.7}$$

En fait, les s_j sont les valeurs propres de $|x|$ répétées selon leur multiplicité et associées avec les vecteurs propres v_j : ce sont les valeurs singulières *de x.*

Démonstration. Soit $x = u \circ |x|$ la décomposition polaire de x. Alors $|x|$ est compact puisque $x^* \circ x$ est compact et $\sqrt{x^* \circ x}$ est limite de polynômes sans terme constant en $x^* \circ x$. Donc $|x|$ est de la forme $|x| = \sum \lambda_j \langle \cdot, v_j \rangle v_j$, où les s_j sont rangées par ordre décroissant et (v_j) est une base hilbertienne de $\overline{\operatorname{im}|x|}$. Comme u est un unitaire de $\overline{\operatorname{im}|x|}$ sur $\overline{\operatorname{im} x}$, les $w_j = u(v_j)$ forment une base hilbertienne de $\overline{\operatorname{im} x}$: on a la représentation (5.7). □

Corollaire 5.12.3. *Tout opérateur compact sur un espace de Hilbert est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

5.12.3 Opérateur compact sur un espace préhilbertien

Soit E un espace vectoriel normé et $x \in \mathscr{B}(E)$. En munissant l'espace vectoriel E d'un produit scalaire, on définit une deuxième norme sur E : notons $\tilde{E}$ l'espace préhilbertien aini défini et $\tilde{x}$ l'opérateur x considéré comme opérateur sur $\tilde{E}$. Supposons que $\tilde{x}$ est compact. Le complété F de $\tilde{E}$ est un espace de Hilbert ; notons y le prolongement par continuité de $\tilde{x}$ à F. Par la proposition 2.4.13, y est compact. Les théorèmes 5.12.1 et 5.12.2 permettent donc d'écrire la décomposition spectrale de $\tilde{x}$.

Sixième chapitre

Algèbres de Banach complexes

6.1 Fonction holomorphe à valeurs dans un espace de Banach complexe

6.1.1 Intégrale curviligne à valeurs dans un espace de Banach

Si T est un espace compact et E est un espace de Banach, notons $\mathscr{C}(T;E)$ l'espace de Banach des fonctions continues de T dans E.

Définition 6.1.1. – Un *chemin* est une application $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Ce chemin est *fermé* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Le *chemin inverse* γ^- est défini par $\gamma^-(t) = \gamma\big(b-(t-a)\big)$.

– Une *subdivision* σ de γ est une suite $(t_1,\dots,t_n)$ telle que $a = t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n = b$. On note $\sigma_k = \gamma(t_k)$ et $\widehat{\sigma_k\sigma_l}$ le chemin $\gamma|_{[t_k,t_l]}$ si $k \leqslant l$, et $\gamma^-\big|_{[t_l,t_k]}$ sinon. La *longueur* de la ligne brisée définie par σ est $l(\sigma) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} |\sigma_{k+1} - \sigma_k|$.

– La *longueur* de γ est $l(\gamma) = \sup\{l(\sigma) : \sigma \text{ subdivise } \gamma\} = \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.

– La *maille* $\|\sigma\|$ de σ est la longueur maximale de $\widehat{\sigma_k\sigma_{k+1}}$ lorsque k parcourt $[\![1,n-1]\!]$.

– Soit E un espace de Banach et $f \in \mathscr{C}(\operatorname{im}\gamma;E)$. La *somme de Riemann* de f sur σ est

$$\mathscr{R}(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n-1} f(\sigma_k)(\sigma_{k+1} - \sigma_k).$$

La longueur de $\widehat{\sigma_k\sigma_{k+1}}$ tend vers 0 lorsque $t_{k+1} - t_k$ tend vers 0.

Théorème 6.1.1. *Soit E un espace de Banach, γ un chemin et $f \in \mathscr{C}(\operatorname{im}\gamma;E)$. Lorsque $\|\sigma\| \to 0$, $\mathscr{R}(f,\sigma)$ converge vers un élément noté* $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$: *c'est l'*intégrale de Riemann *de f sur γ. On a*

(i) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$:

(ii) $\displaystyle\left\|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right\| \leqslant l(\gamma)\max_{z\in\operatorname{im}\gamma}\|f(z)\|$: $\displaystyle\int_\gamma$ *est un opérateur borné de $\mathscr{C}(\operatorname{im}\gamma;E)$ dans E.*

(iii) Si F est un espace de Banach et $x \in \mathscr{B}(E,F)$,

$$x\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \int_\gamma x(f(z))\,\mathrm{d}z.$$

Démonstration. Notons $S_\delta = \overline{\{\mathscr{R}(f,\sigma) : \|\sigma\| < \delta\}}$. Les S_δ sont des fermés emboîtés ; il s'agit de montrer que le diamètre de S_δ est arbitrairement petit. Soient σ,σ' des subdivisions de γ telles que $\|\sigma\|, \|\sigma'\| < \delta$. Soit τ une subdivision qui contient σ et σ' comme sous-suites. Alors $\mathscr{R}(f,\sigma') - \mathscr{R}(f,\sigma)$ est une somme de termes de la forme $(f(\sigma'_j) - f(\sigma_i))(\tau_{k+1} - \tau_k)$, où l'arc $\widehat{\tau_k\tau_{k+1}}$ est inclus dans les arcs $\widehat{\sigma_i\sigma_{i+1}}$ et $\widehat{\sigma'_j\sigma'_{j+1}}$. Alors l'arc $\widehat{\sigma_i\sigma'_j}$ est de longueur inférieure à δ ; *a fortiori* $|\sigma_i - \sigma'_j| < \delta$. Comme $\operatorname{im}\gamma$ est compact, f est uniformément continu : pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir δ de sorte que $|f(z') - f(z)| < \varepsilon$ si $|z' - z| < \delta$. Alors

$$\|\mathscr{R}(f,\sigma') - \mathscr{R}(f,\sigma)\| < \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} |\tau_{k+1} - \tau_k| = \varepsilon l(\tau) \leqslant \varepsilon l(\gamma).$$

(i). Si σ^- est une subdivision $(t_1, \dots, t_n)$ de γ^-, notons σ la subdivision $(b + a - t_n, \dots, b + a - t_1)$ de γ. Alors $\sigma_k = \gamma(b + a - t_{n+1-k}) = \sigma^-_{n+1-k}$ et

$$\mathscr{R}(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n-1} (\sigma^-_{n-k} - \sigma^-_{n+1-k}) f(\sigma^-_{n+1-k}) = \sum_{k=1}^{n-1} (\sigma^-_k - \sigma^-_{k+1}) f(\sigma^-_{k+1}).$$

$$\begin{aligned}\Big\|\mathscr{R}(f,\sigma^-) - \big(-\mathscr{R}(f,\sigma)\big)\Big\| &= \Big\|\sum_{k=1}^{n-1} (\sigma^-_{k+1} - \sigma^-_k)\big(f(\sigma^-_k) - f(\sigma^-_{k+1})\big)\Big\| \\ &\leqslant l(\sigma^-) \max_{|z'-z| \leqslant \|\sigma^-\|} \|f(z') - f(z)\|.\end{aligned}$$

(ii). Il suffit de noter que $\mathscr{R}(f,\sigma) \leqslant l(\sigma) \max_{z \in \operatorname{im}\sigma} \|f(z)\|$ pour toute subdivision σ.

(iii). Il suffit de noter que $x(\mathscr{R}(f,\sigma)) = \mathscr{R}(x \circ f, \sigma)$ pour toute subdivision σ. □

6.1.2 Fonctions holomorphes et faiblement holomorphes

Définition 6.1.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et E un espace de Banach complexe. Une fonction $f : U \to E$ est *holomorphe* si f se développe en série entière à coefficients dans E en tout point $\lambda \in U$: il existe $r > 0$ et $v_0, v_1, \dots \in E$ tels que si $|\mu - \lambda| < r$ alors

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (\mu - \lambda)^n. \tag{6.1}$$

On a une formule pour le rayon de convergence d'une série entière.

Lemme 6.1.2. *Soit E un espace normé et $v_0, v_1, \dots \in E$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum v_n \mu^n$ est $r = \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|^{-1/n} \in [0,\infty]$: si $|\mu| < r$, elle converge normalement ; si $|\mu| > r$, elle diverge.*

Démonstration. Si la série converge, alors $\|v_n\|\,|\mu|^n \to 0$ et les $\|v_n\|\,|\mu|^n$ sont donc bornés par un C. Alors $|\mu| \leqslant \dfrac{C^{1/n}}{\|v_n\|^{1/n}}$ pour tout n. Si $|\mu| < r$, soit $\delta > 0$ et N tel que $|\mu| + \delta < 1/\|v_n\|^{1/n}$ pour $n \geqslant N$. Alors $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \|v_n\|\,|\mu|^n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{|\mu|}{|\mu| + \delta}\right)^n$. □

Proposition 6.1.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, E un espace de Banach complexe et $f : U \to E$.*

(i) *Si f est holomorphe, f est dérivable : pour chaque $\lambda \in U$, il existe un élément de E noté $f'(\lambda)$ tel que*

$$f(\mu) = f(\lambda) + (\mu - \lambda) f'(\lambda) + o(\mu - \lambda),$$

c'est-à-dire que $\left\|\dfrac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} - f'(\lambda)\right\| \xrightarrow[\mu\to\lambda]{} 0.$

(ii) *Si f est dérivable, $l \circ f$ est holomorphe pour toute forme linéaire $l \in E'$: on dit que f est* faiblement holomorphe.

Nous montrerons dans le corollaire 6.3.3 qu'une fonction faiblement holomorphe est holomorphe.

Démonstration. (i). Si $|\mu - \lambda| \leqslant r_1 < r$, alors (6.1) donne

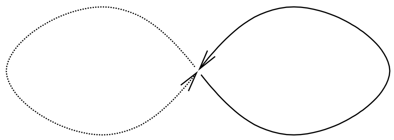
$$\begin{aligned}
f(\mu) &= v_0 + v_1(\mu - \lambda) + O\left(\sum_{n=2}^{\infty} \|v_n\| \, |\mu - \lambda|^n\right) \\
&= v_0 + v_1(\mu - \lambda) + O\Big(|\mu - \lambda|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \|v_n\| \, r_1^{n-2}\Big) \\
&= f(\lambda) + (\mu - \lambda)v_1 + o(\mu - \lambda).
\end{aligned}$$

(ii). Si f est dérivable en λ, on a $l \circ f(\mu) = l \circ f(\lambda) + (\mu - \lambda) l(f'(\lambda)) + o(\mu - \lambda)$. c'est-à-dire que $l \circ f$ est dérivable. □

Définition 6.1.3. – Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert. Un chemin $\gamma \colon [a, b] \to \partial U$ est *positivement orienté relativement à* U si pour tout t tel que $\gamma'(t)$ existe et est non nul, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\gamma(t), \gamma(t) + \mathrm{i}\varepsilon\gamma'(t)[$ soit contenu dans U et $]\gamma(t), \gamma(t) - \mathrm{i}\varepsilon\gamma'(t)[$ ne rencontre pas $\overline{U}$: le vecteur normal à γ en t pointe vers U, de sorte que U est à gauche de γ. γ est *négativement orienté* si γ^- est positivement orienté.
– On dit qu'un compact $L \subset C$ est un *compact à bord orienté* si L est l'adhérence de son intérieur et si ∂L est réunion d'un nombre fini de chemins fermés injectifs $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ positivement orientés et dont l'intersection deux à deux est vide ou composée d'un nombre fini de points. On pose alors

$$\int_{\partial L} f(z) \, \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Remarque 6.1.1. L est encore un compact à bord orienté si les chemins fermés dont ∂L est la réunion ne sont pas injectifs mais ont un nombre fini de points doubles. En effet, de tels chemins sont la réunion finie de chemins fermés injectifs.



Proposition 6.1.4. *Soit $f \colon U \to E$ faiblement holomorphe.*

(i) *(Théorème de Cauchy.) Si L est un compact à bord orienté inclus dans U, alors* $\displaystyle\int_{\partial L} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$.

(ii) *(Théorème de Liouville.) Si $U = \mathbb{C}$ et f est bornée, alors f est constante.*

Démonstration. (i). Pour tout $l \in E'$, $l\left(\displaystyle\int_{\partial L} f(z) \, \mathrm{d}z\right) = \displaystyle\int_{\partial L} l \circ f(z) \, \mathrm{d}z = 0$ par le théorème de Cauchy.
(ii). Pour tout $l \in E'$, $l \circ f$ est entière et bornée ; par le théorème de Liouville, $l \circ f$ est constante : $l \circ f(z) = l \circ f(0)$. Donc $f(z) = f(0)$. □

6.2 Approximation d'un compact de $\mathbb{C}$

Proposition 6.2.1. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ compact et U un voisinage ouvert de K. Il existe un voisinage L de K contenu dans U tel que L est un compact à bord orienté. On dit que* L est entre K et U.

Démonstration. Comme K est compact et $\mathbb{C} \setminus U$ est fermé, $\delta = d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$. Considérons une triangulation du plan qui le découpe en triangles équilateraux (fermés) de côté inférieur à δ. Considérons les triangles qui rencontrent K. Ils sont en nombre fini et K est contenu dans leur réunion L qui ne rencontre pas $\mathbb{C} \setminus U$. K est en fait contenu dans $\mathring{L}$ car si un point du bord d'un triangle est dans K, alors il est dans $\mathring{L}$ parce que K rencontre aussi l'autre ou les cinq autres triangles dont le bord contient ce point. Les bords des triangles qui rencontrent K ne forment pas le bord de L si certains de ces triangles sont adjacents : il faut simplifier les côtés en commun.
Montrons par récurrence sur le nombre n de triangles que toute réunion finie L de triangles de la triangulation est un compact à bord orienté. Si cette réunion est vide ou un seul triangle, c'est trivialement vrai. Considérons un triangle T de la réunion qui contient un point extrémal de L : au moins un côté de T est sur la frontière de L. Soit $\tilde{L}$ la réunion des autres triangles. Par hypothèse de récurrence, $\tilde{L}$ est un compact à bord orienté. L'intersection de $\tilde{L}$ avec T contient 0, 1 ou 2 côtés de T.

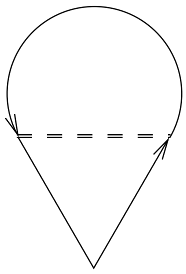


FIGURE 6.1: un côté

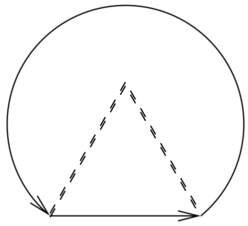


FIGURE 6.2: deux côtés sur le même chemin

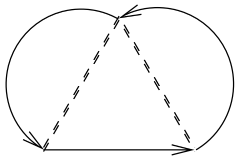


FIGURE 6.3: deux côtés sur des chemins différents

- Si $\tilde{L}$ ne contient pas de côté de T, le bord orienté de L est la réunion du bord orienté de $\tilde{L}$ et du bord orienté de T.
- Si T contient un côté de T, ce côté est sur un unique chemin fermé γ du bord de $\tilde{L}$. On recolle γ et le bord de T en un seul chemin en simplifiant le côté commun (figure 6.1.) Cela donne un chemin simple sauf si γ contient le sommet opposé au côté commun ; dans ce cas, on applique la remarque 6.1.1.
- Si T rencontre $\tilde{L}$ en deux côtés, il y a deux possibilités.
  - Ces deux côtés sont sur le même chemin γ du bord de $\tilde{L}$: on recolle γ et le bord de T en un seul chemin en simplifiant ces deux côtés (figure 6.2.)
  - Ces deux côtés sont sur deux chemins différents du bord de $\tilde{L}$: on recolle ces deux chemins et le bord de T en un seul chemin en simplifiant ces deux côtés (figure 6.3.) Si ces deux chemins se rencontrent en des points qui ne sont pas des sommets de T, il faut appliquer la remarque 6.1.1 au chemin obtenu par recollement. □

6.3 Formule de Cauchy

Rappelons que nous avons démontré que si A est une algèbre de Banach unifère et $x \in A$, alors $\operatorname{rés} x$ est un voisinage ouvert de l'infini et la résolvante $\mathrm{R}(x)$ de x se développe en série entière en tout point de $\operatorname{rés} x$.

Lemme 6.3.1. *Soit A une algèbre de Banach complexe unifère et $x \in A$. Soit r une fraction rationnelle sans pôle dans* $\operatorname{spec} x$ *et L un compact à bord orienté quelconque entre* $\operatorname{spec} x$ *et le complémentaire des pôles de r. Alors*

$$r(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial L} r(z)(zu - x)^{-1} \, \mathrm{d}z. \tag{6.2}$$

Démonstration. Montrons (6.2) pour $r = \mathbb{1}$. Soit D_ϱ un disque de centre 0 et de rayon ϱ tel que $L \subset \mathring{D}_\varrho$. Alors $D_\varrho \setminus L \subset \operatorname{rés} x$ et $\displaystyle\int_{\partial(D_\varrho \setminus L)} = \int_{\partial D_\varrho} - \int_{\partial L}$ car le bord orienté de $D_\varrho \setminus L$ est la réunion du bord orienté de D_ϱ avec le bord de L négativement orienté. Comme la résolvante est holomorphe sur $\operatorname{rés} x$, $\displaystyle\int_{\partial(D_\varrho \setminus L)} \mathrm{R}_z(x) \, \mathrm{d}z = 0$. Comme $\left\| \mathrm{R}_z(x) - z^{-1}u \right\| = o(z^{-1})$, $\mathrm{R}_z(x) \sim z^{-1}u$ lorsque $|z| \to \infty$: on a donc pour $\varrho \to \infty$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial D_\varrho} (zu - x)^{-1} \sim \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial D_\varrho} z^{-1} u \, \mathrm{d}z = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial D_\varrho} \frac{\mathrm{d}z}{z} \right) u = u.$$

Donc $\displaystyle\int_{\partial L} (zu - x)^{-1} \, \mathrm{d}z = u$. Montrons (6.2) pour r fraction rationnelle sans pôle dans $\operatorname{spec} x$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial L} r(z)(zu - x)^{-1} \, \mathrm{d}z - r(x) &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial L} (r(z) - r(x))(zu - x)^{-1} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial L} \frac{r(z) - r}{z - t}(x) \, \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Soit $\dfrac{p}{q}$ un représentant de r avec q sans zéro dans $\operatorname{spec} x$. Comme

$$q(z)\frac{r(z)-r}{z-t} = \frac{p(z)-p}{z-t} - r\frac{q(z)-q}{z-t},$$

$z \mapsto \dfrac{r(z)-r}{z-t}(x)$ est le quotient d'une fonction polynomiale à coefficients dans A par la fonction polynomiale $z \mapsto q(z)$. Donc $z \mapsto \dfrac{r(z)-r}{z-t}(x)$ est holomorphe sur L et

$$\int_{\partial L} \frac{r(z)-r}{z-t}(x)\,\mathrm{d}z = 0. \qquad \square$$

En appliquant ce lemme avec $A = \mathbb{C}$ et $x = \lambda$, on retrouve la formule de Cauchy.

Corollaire 6.3.2. *Pour tout f holomorphe au voisinage d'un compact à bord orienté L et tout $\lambda \in \mathring{L}$*

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} \frac{f(z)}{z-\lambda}\,\mathrm{d}z.$$

Démonstration. On vient de le prouver si f est une fonction rationnelle. Si f est holomorphe, alors

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} \frac{f(z)}{z-\lambda}\,\mathrm{d}z - f(\lambda) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} \frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda}\,\mathrm{d}z = 0.$$

car $z \mapsto \dfrac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda}$ s'étend en une fonction holomorphe au voisinage de L. $\square$

Corollaire 6.3.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, E un espace de Banach complexe et $f\colon U \to E$ faiblement holomorphe.*

(i) f est continue.

(ii) (Formule de Cauchy.) Pour tout compact à bord orienté $L \subset U$ et tout $\lambda \in \mathring{L}$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} \frac{f(z)}{z-\lambda}\,\mathrm{d}z.$$

(iii) f se développe en série entière en tout $\lambda \in U$ sur le plus grand disque ouvert de centre λ contenu dans U.

Démonstration. (i). Soit $\lambda \in U$ et $r > 0$. Soit $r_1 > r$ tel que le disque fermé D de centre λ et de rayon r_1 soit dans U. Soit

$$S = \left\{ \frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda} : 0 < |\mu-\lambda| < r \right\}.$$

Si $l \in E'$ et $|\mu-\lambda| < r$,

$$\begin{aligned} l\left(\frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}\right) &= \frac{l\circ f(\mu) - l\circ f(\lambda)}{\mu-\lambda} \\ &= \frac{1}{\mu-\lambda}\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D} \frac{l\circ f(z)}{z-\mu} - \frac{l\circ f(z)}{z-\lambda}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D} \frac{l\circ f(z)}{(z-\mu)(z-\lambda)}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

et comme $|(z-\mu)(z-\lambda)| > (r_1-r)r_1$, $\{l(v) : v \in S\}$ est borné. Par le théorème de Banach-Steinhaus, S est borné. Donc f est continue.

(ii). Comme f est continue, on peut former l'intégrale de Riemann de $\dfrac{f(z)}{z-\lambda}$: soit L un compact à bord orienté et $\lambda \in \mathring{L}$. Alors

$$l\left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} \frac{f(z)}{z-\lambda}\,\mathrm{d}z\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} \frac{l\circ f(z)}{z-\lambda}\,\mathrm{d}z = l\circ f(\lambda)$$

pour tout $l \in E'$ et donc $f(\lambda) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi} \displaystyle\int_{\partial L} \frac{f(z)}{z-\lambda}\,\mathrm{d}z$.
(iii). Soit $\lambda \in U$ et $r > 0$ tel que le disque fermé L de centre λ et de rayon r soit inclus dans U. Si $\mu \in \mathring{L}$ et $z \in \partial L$, alors

$$\frac{1}{z-\mu} = \frac{1}{z-\lambda}\,\frac{1}{1-\frac{\mu-\lambda}{z-\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu-\lambda)^n}{(z-\lambda)^{n+1}}$$

et cette série converge uniformément en z. Donc

$$f(\mu) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} \frac{f(z)}{z-\mu}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L}\frac{f(z)}{(z-\lambda)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right)(\mu-\lambda)^n. \qquad \square$$

6.4 Calcul fonctionnel holomorphe

6.4.1 Algèbres de fonctions holomorphes

Exemple d'algèbre 20. Soit $T \subset \mathbb{C}$ ouvert. Alors l'ensemble $\mathscr{O}(T)$ des fonctions holomorphes sur T est une algèbre commutative muni de la multiplication des fonctions définie comme en (4.1). L'unité de $\mathscr{O}(T)$ est $\mathbb{1}$.

Exemple d'algèbre 21. Soit $T \subset \mathbb{C}$ compact et $\mathrm{R}(T)$ l'adhérence dans $\mathscr{C}(T)$ des fonctions rationnelles sans pôle dans T. $\mathrm{R}(T)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}(T)$, en général non involutive, qui contient $\mathbb{1}$.

Proposition 6.4.1. *Soit $T \subset \mathbb{C}$ compact.*

(i) *Si $x \in \mathrm{R}(T)$, alors $x|_{\mathring{T}} \in \mathscr{O}(\mathring{T})$.*

(ii) *Si x est holomorphe sur un voisinage ouvert U de T, alors $x|_T \in \mathrm{R}(T)$.*

Démonstration. (i). $x|_{\mathring{T}}$ est limite, uniforme sur tout compact de $\mathring{T}$, de fonctions holomorphes dans $\mathring{T}$.
(ii). Soit L compact à bord orienté entre T et U. Alors $\mathrm{R}_z \in \mathrm{R}(T)$ pour chaque $z \in \partial L$; notons $f = \displaystyle\int_{\partial L} x(z)\,\mathrm{R}_z\,\mathrm{d}z \in \mathrm{R}(T)$. Comme l'évaluation en un point $t \in T$ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{R}(T)$, on a $f(t) = \displaystyle\int_{\partial L}\frac{x(z)}{z-t}\,\mathrm{d}z = x(t)$ par la formule de Cauchy : donc $f = x|_T$. $\square$

6.4.2 Calcul fonctionnel holomorphe

Soit A une algèbre de Banach complexe unifère et $x \in A$. Soit T un voisinage compact de $\operatorname{spec} x$ et L un compact à bord orienté entre $\operatorname{spec} x$ et $\mathring{T}$. Alors, pour toute fraction rationnelle r sans pôle dans T,

$$\|r(x)\| = \left\|\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} r(z)(zu-x)^{-1}\,\mathrm{d}z\right\| \leqslant \frac{l(\partial L)}{2\pi}\max_{z\in\partial L}\left\|(zu-x)^{-1}\right\| \max_{z\in\partial L}|r(z)|.$$

Donc le calcul fonctionnel rationnel définit un opérateur borné sur un sous-espace vectoriel dense de $\mathrm{R}(T)$ dans A. Il s'étend de manière unique en un opérateur borné de $\mathrm{R}(T)$ dans $\mathscr{B}(E)$ qui est encore un morphisme d'algèbres. On peut donc poser la définition suivante sans ambiguïté.

Définition 6.4.1. Soit A une algèbre de Banach complexe unifère et $x \in A$. Soit f holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\operatorname{spec} x$. Il une suite de fractions rationnelles r_n sans pôle dans un voisinage compact $T \subset U$ de $\operatorname{spec} x$ telles que $\max_{t\in T}|r_n(t) - f(t)| \to 0$. On pose

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} r_n(x).$$

L'application $f \mapsto f(x)$ est appelée le *calcul fonctionnel holomorphe de x*.

L'élément $f(x)$ ne dépend donc que des valeurs de f dans un voisinage arbitrairement petit de $\operatorname{spec} x$, c'est-à-dire du « germe de f au voisinage de $\operatorname{spec} x$. »
Si x est une fonction continue ou une fonction mesurable bornée, alors $f(x)$ est la fonction $f \circ x$.
On a donc démontré la proposition suivante.

Théorème 6.4.2. *Soit A une algèbre de Banach complexe unifère et $x \in A$. Soit T un voisinage compact de $\operatorname{spec} x$. Le calcul fonctionnel holomorphe de x est l'unique morphisme d'algèbres de Banach unifères de $\mathrm{R}(T)$ dans A qui transforme la fonction $\lambda \mapsto \lambda$ en x. Pour toute fonction holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\operatorname{spec} x$ et tout compact à bord orienté L entre $\operatorname{spec} x$ et U, on a la formule*

$$f(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial L} f(z)(zu - x)^{-1} \,\mathrm{d}z.$$

La dernière égalité résulte de la continuité de l'intégrale de Riemann.

Théorème 6.4.3. *Soit A une algèbre de Banach unifère complexe, $x \in A$ et f holomorphe au voisinage de $\operatorname{spec} x$.*

(i) $\operatorname{spec} f(x) = f(\operatorname{spec} x)$.

(ii) *Si g est holomorphe au voisinage de $\operatorname{spec} f(x)$, $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.*

(iii) *Si $\varphi\colon A \to B$ est un morphisme d'algèbres de Banach unifères, $f(\varphi(x)) = \varphi(f(x))$.*

Démonstration. Soit U le domaine d'holomorphie de f.
(i). Si $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe g holomorphe sur U tel que $f(\lambda) - f(t) = (\lambda - t)g(t)$. Alors $f(\lambda)u - f(x) = (\lambda u - x)g(x)$: si $\lambda u - x$ n'est pas inversible, $f(\lambda)u - f(x)$ n'est pas inversible. Réciproquement, si $\lambda \notin f(\operatorname{spec} x)$, $\lambda\mathbb{1} - f$ est inversible dans $\mathscr{O}(U)$ et donc $\lambda u - f(x)$ est inversible.
(ii). Soit $y = f(x)$. Soit T un voisinage compact de $\operatorname{spec} y$ inclus dans le domaine d'holomorphie de g. L'application $g \mapsto (g \circ f)(x)$ est un morphisme d'algèbres de Banach unifères de $\mathrm{R}(T)$ dans A qui transforme la fonction $\lambda \mapsto \lambda$ en y. Par unicité, c'est le calcul fonctionnel holomorphe de y : donc $g \circ f(x) = g(y)$.
(iii). Le résultat est vrai si $f \in \mathbb{C}(t)_{\operatorname{spec} x}$. Soit $T \subset U$ un voisinage compact de $\operatorname{spec} x$. Le résultat est donc vrai si $f \in \mathrm{R}(T)$ par continuité du calcul fonctionnel holomorphe. □

Corollaire 6.4.4. *Soit A une algèbre de Banach unifère complexe et $x \in A$. Si f est holomorphe au voisinage de $\operatorname{spec}^1 x$ et nulle en 0, alors $f(0 + x) \in A$.*

Démonstration. Notons $\delta\colon A^1 \to \mathbb{K}$ le morphisme d'algèbres de Banach unifères défini par $\delta(\lambda + x) = \lambda$. Alors $\delta(f(0 + x)) = f(\delta(0 + x)) = f(0) = 0$. □

Proposition 6.4.5. *Soit E un espace de Banach complexe et $x \in \mathscr{B}(E)$. Si λ est valeur propre approchée de x associée à (v_n), alors $f(\lambda)$ est valeur propre approchée de $f(x)$ associée à (v_n) pour toute fonction f holomorphe au voisinage de $\operatorname{spec} x$.*

Proposition 6.4.6. *Soit A une algèbre de Banach unifère complexe. Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert et $f \in \mathscr{O}(U)$.*

(i) *L'ensemble Ω des $x \in A$ tels que $\operatorname{spec} x \subset U$ est ouvert.*

(ii) *L'application qui à $x \in \Omega$ associe $f(x)$ est continue et dérivable.*

(iii) *Soit $x \in A$ et $\varrho = d(\operatorname{spec} x, \mathbb{C} \setminus U)$. Pour tout $y \in A$ tel que $xy = yx$ et $\operatorname{rs}(y - x) < \varrho$, on a $y \in \Omega$,*

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y - x)^n \tag{6.3}$$

et cette série converge normalement.

Démonstration. *(i)*. Soit $x \in \Omega$ et L un compact entre $\operatorname{spec} x$ et U. La résolvante de x est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathring{L}$ et nulle à l'infini : elle est donc majorée sur $\mathbb{C} \setminus \mathring{L}$ par un M. Si $M\|y - x\| < 1$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathring{L}$, alors $zu - y = \left(u - (y - x)(zu - x)^{-1}\right)(zu - x)$ est inversible. Donc $\operatorname{spec} y \subset \mathring{L}$ et $y \in \Omega$.

(ii). Soient $x, y \in \Omega$ et L un compact à bord orienté entre $\operatorname{spec} x \cup \operatorname{spec} y$ et U. Comme

$$\begin{aligned}(zu-y)^{-1} &= (zu-x)^{-1}\Big(u-(y-x)(zu-x)^{-1}\Big)^{-1}\\ &= (zu-x)^{-1}\Big(u+(y-x)(zu-x)^{-1}+o(y-x)\Big),\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}f(y) &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} f(z)(zu-y)^{-1}\,\mathrm{d}z\\ &= f(x)+\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} f(z)(zu-x)^{-1}(y-x)(zu-x)^{-1}\,\mathrm{d}z+o(y-x).\end{aligned} \tag{6.5}$$

(iii). Soit T_ε le voisinage compact $\{\lambda \in \mathbb{C} : d(\lambda, \operatorname{spec} x) \leqslant \varepsilon\}$ de $\operatorname{spec} x$. Soit $\varrho' < \varrho$ et k tel que $\|(y-x)^n\|^{1/n} < \varrho'$ pour $n \geqslant k$. Soit $\varrho'' \in]\varrho', \varrho[$, $\varepsilon < \varrho - \varrho''$ et L un compact à bord orienté entre $T_{\varrho''+\varepsilon}$ et U. Si $t \in T_\varepsilon$ et $z \in \partial L$, $|z-t| \geqslant \varrho''$. Par la continuité du calcul fonctionnel holomorphe, il existe une constante C_ε telle que $\|(zu-x)^{-n}\| \leqslant C_\varepsilon \varrho''^{-n}$. Comme $(y-x)(zu-x)^{-1} = (zu-x)^{-1}(y-x)$, (6.4) donne

$$(zu-y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (zu-x)^{-n-1}(y-x)^n$$

et cette série converge normalement. L'égalité (6.5) donne

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} f(z)(zu-x)^{-n-1}\,\mathrm{d}z\right)(y-x)^n.$$

Par la continuité du calcul fonctionnel holomorphe,

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial L} f(z)(zu-x)^{-n-1}\,\mathrm{d}z = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}. \qquad \square$$

6.5 La résolvante

Théorème 6.5.1. *Soit A une algèbre de Banach unifère et $x \in A$.*

(i) *Le spectre de x est une partie compacte contenue dans le disque de centre* 0 *et de rayon* $\operatorname{rs}(x)$.

(ii) *x a une valeur spectrale de module* $\operatorname{rs}(x)$ *: donc* $\operatorname{spec} x$ *est non vide et* $\operatorname{rs}(x) = \max_{\lambda \in \operatorname{spec} x} |\lambda|$.

(iii) $\|x^n\|^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{rs}(x)$.

Démonstration. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon\ \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = 0 \text{ ou } \mu^{-1} \in \operatorname{rés} x\} &\to A\\ \mu &\mapsto (1-\mu x)^{-1}.\end{aligned}$$

Elle est holomorphe et son développement en série entière en 0 est $\sum x^n \mu^n$, dont le rayon de convergence est $r = \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{-1/n}$. Si $r < \infty$, alors il existe μ de module r tel que $\mu^{-1} \in \operatorname{spec} x$: donc

$$\liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \geqslant \inf_{n\geqslant 1} \|x^n\|^{1/n} = \operatorname{rs}(x) \geqslant \frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

et donc $\|x^n\|^{1/n}$ converge vers $\operatorname{rs}(x)$. Si $r = \infty$, $\|x^n\|^{1/n} \to 0$ puisqu'alors

$$\liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0\,;$$

donc aussi $\operatorname{rs}(x) = 0$. Si $\operatorname{spec} x$ était vide, alors la résolvante de x serait une fonction entière, et elle serait bornée puisqu'elle tend vers 0 à l'infini : par le théorème de Liouville, elle serait constante et donc nulle. C'est absurde. En particulier, si $\operatorname{rs}(x) = 0$, 0 est valeur spectrale. $\square$

Remarque 6.5.1. La convergence de $\|x^n\|^{1/n}$ vers $\inf_{n\geqslant 1} \|x^n\|^{1/n}$ est en fait un corollaire du fait suivant. Si $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de réels positifs qui est sous-multiplicative au sens que $a_{n+m} \leqslant a_n a_m$, alors $a_n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_{n\geqslant 1} a_n^{1/n}$.

Corollaire 6.5.2 (Théorème de Gelfand-Mazur)**.** *Une algèbre de Banach unifère complexe qui est un corps est isomorphe à* $\mathbb{C}$*.*

Démonstration. Montrons que le morphisme d'algèbres de Banach unifères injectif

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ \mathbb{C} &\to A \\ \lambda &\mapsto \lambda u. \end{aligned}$$

est surjectif. Si $x \in A$, $\operatorname{spec} x$ est non vide : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda u - x$ n'est pas inversible. Comme A est un corps, $\lambda u - x = 0$ et donc $x = \varphi(\lambda)$. ☐

Corollaire 6.5.3. *Soit A une algèbre de Banach et $x \in A$. Alors* $\operatorname{spec}^1 x$ *est une partie compacte contenue dans le disque de centre* 0 *et de rayon* $\operatorname{rs}(x)$*, et* $0+x$ *a une valeur spectrale de module* $\operatorname{rs}(x)$*.*

6.6 Transformation de Gelfand

6.6.1 Caractère d'algèbre

Définition 6.6.1. Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre.

(*i*) L'ensemble des morphismes d'algèbres de A dans $\mathbb{K}$ est noté $\operatorname{spec}^1 A$.

(*ii*) On appelle *caractère* de A un morphisme d'algèbres de A dans $\mathbb{K}$ non nul. Le *spectre* (ou *espace de Gelfand*) de A est $\operatorname{spec} A = \operatorname{spec}^1 A \setminus \{0\}$.

(*iii*) Si A est une algèbre involutive, on appelle *caractère involutif* de A un morphisme d'algèbres involutives de A dans $\mathbb{K}$ non nul.

(*iv*) La *transformée de Gelfand* de $x \in A$ est la fonction $\hat{x}\colon \operatorname{spec} A \to \mathbb{K}$ définie par $\hat{x}(\omega) = \omega(x)$.

La proposition suivante rend ces notations transparentes.

Proposition 6.6.1. *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre.*

(*i*) *Si A admet une unité u,* $\operatorname{spec} A$ *est l'ensemble des morphismes d'algèbres unifères de A dans* $\mathbb{K}$ *:* $\operatorname{spec} A = \{\omega \in \operatorname{spec}^1 A : \omega(u) = 1\}$.

(*ii*) *Si* $\omega \in \operatorname{spec}^1 A$*, il existe un unique* $\omega^1 \in \operatorname{spec} A^1$ *tel que* $\omega^1|_A = \omega$*, défini par* $\omega^1(\lambda + x) = \lambda + \omega(x)$*.*

(*iii*) *Si A est une $\mathbb{C}$-algèbre involutive, ω est un caractère involutif si et seulement si $\omega(x)$ est réel pour tout élément hermitien x.*

Démonstration. (*i*). Si $\omega \in \operatorname{spec} A$, soit $x \in A$ tel que $\omega(x) \neq 0$. Comme $\omega(x) = \omega(u)\omega(x)$, $\omega(u) = 1$.
(*ii*). Si $\omega \in \operatorname{spec}^1 A$ et $\omega^1 \in \operatorname{spec} A^1$ est tel que $\omega^1|_A = \omega$, alors $\omega^1(1+0) = 1$ par (*i*) et $\omega^1(0+x) = 0 + \omega(x)$ et donc $\omega^1(\lambda + x) = \lambda + \omega(x)$. Réciproquement, cette condition définit bien un morphisme d'algèbres unifères de A^1 dans $\mathbb{K}$.
(*iii*). Soit $x \in A$. Alors $x = \operatorname{Re} x + \mathrm{i} \operatorname{Im} x$ avec $\operatorname{Re} x = \dfrac{x + x^*}{2}$ et $\operatorname{Im} x = \dfrac{x - x^*}{2\mathrm{i}}$ hermitiens. Comme $x^* = \operatorname{Re} x - \mathrm{i} \operatorname{Im} x$,

$$\omega(x^*) = \omega(\operatorname{Re} x) - \mathrm{i}\omega(\operatorname{Im} x) = \overline{\omega(\operatorname{Re} x) + \mathrm{i}\omega(\operatorname{Im} x)} = \overline{\omega(x)}.$$

☐

Proposition 6.6.2. *Soit A une algèbre unifère. Alors*

$$\{\hat{x}(\omega) : \omega \in \operatorname{spec} A\} \subset \operatorname{spec} x.$$

Démonstration. Si $\hat{x}(\omega) = \lambda$, alors $\omega(\lambda u - x) = 0$ et donc $\lambda u - x$ n'est pas inversible. ☐

6.6.2 Idéal maximal

Définition 6.6.2. Soit A une algèbre et I un idéal de A.

(i) I est *propre* si $I \neq A$.

(ii) I est maximal si I est un élément maximal de l'ensemble des idéaux propres ordonné par l'inclusion : $I \subset J \neq A \;\Rightarrow\; I = J$.

En particulier, un idéal de codimension 1 est maximal.

Proposition 6.6.3. *Soit A une algèbre unifère et I un idéal de A.*

(i) *I est propre si et seulement si $I \subset A \setminus A^{-1}$.*

(ii) *Tout idéal propre de A est inclus dans un idéal maximal.*

Démonstration. (i). Si I contient un élément inversible x, $x^{-1}x = u \in I$ et $A = I$.
(ii) résulte du lemme de Zorn appliqué à l'ensemble des idéaux propres de A qui contiennent I. □

Supposons que A est une algèbre commutative unifère. Pour étudier la réciproque de la proposition 6.6.2, notons que si $\lambda u - x$ n'est pas inversible, cet élément engendre un idéal propre I de A. La proposition suivant montre que si I est contenu dans un idéal de codimension 1, alors $\lambda u - x$ est annulé par un caractère de A.

Proposition 6.6.4. *Soit A une algèbre commutative unifère. L'application $\omega \mapsto \ker \omega$ est une bijection de $\operatorname{spec} A$ sur l'ensemble des idéaux de codimension 1 de A.*

Démonstration. Si $\omega \in \operatorname{spec} A$, $\ker \omega$ est bien un idéal de codimension 1. Soit I un idéal de codimension 1 et $\pi \colon A \to A/I$ l'application quotient canonique. Si $\omega \in \operatorname{spec} A$ est de noyau I, alors la factorisation canonique $\omega = \tilde{\omega} \circ \pi$ définit un morphisme d'algèbres unifères $\tilde{\omega} \colon A/I \to \mathbb{K}$ et donc $\tilde{\omega}(u+I) = 1$: ω est unique. Comme $u \notin I$, $A = \mathbb{K}u + I$ et on peut définir un morphisme d'algèbres unifères $\tilde{\omega} \colon A/I \to \mathbb{K}$ en posant $\tilde{\omega}(\lambda u + I) = \lambda$: donc $\omega = \tilde{\omega} \circ \pi$ est un morphisme d'algèbres unifères de noyau I. □

6.6.3 Transformation de Gelfand d'une algèbre de Banach complexe

Proposition 6.6.5. *Soit A une algèbre de Banach. Alors tout morphisme d'algèbres ω de A dans $\mathbb{K}$ est continu et $\|\omega\| \leqslant 1$.*

Démonstration. Soit $x \in A$. Alors $\operatorname{spec}^1 \omega(x) \subset \operatorname{spec}^1 x$; or $\operatorname{spec} \omega(x) = \{\omega(x)\}$. Donc $|\omega(x)| \leqslant \operatorname{rs}(x) \leqslant \|x\|$. □

Proposition 6.6.6. *Soit A une algèbre de Banach.*

(i) $\operatorname{spec}^1 A$ *est compact muni de la topologie induite par* $(\mathrm{B}_{A'}, w^*)$. *Donc* $\operatorname{spec} A$ *est localement compact et son compactifié d'Alexandroff est homéomorphe à* $\operatorname{spec}^1 A$ *avec* 0 *comme point à l'infini.*

(ii) *Si A est unifère,* $\operatorname{spec} A$ *est compact et* 0 *est un point isolé de* $\operatorname{spec}^1 A$.

(iii) *Pour tout $x \in A$ on a $\hat{x} \in \mathscr{C}_0(\operatorname{spec} A)$.*

Démonstration. (i). On a $\operatorname{spec}^1 A = \bigcap_{x,y \in A} \{\omega \in A' : \omega(xy) - \omega(x)\omega(y) = 0\}$.
(ii). On a $\operatorname{spec} A = \operatorname{spec}^1 A \cap \{\omega \in A' : \omega(u) = 1\}$.
(iii). La topologie $(\mathrm{B}_{A'}, w^*)$ est la topologie la plus faible qui rend continues toutes les applications $\mathrm{B}_{A'} \to \mathbb{K}$, $l \mapsto l(x)$ lorsque x parcourt A. Si $\omega = 0$, $\omega(x) = 0$. Donc

$$\lim_{\omega \to 0} \omega(x) = 0. \qquad \square$$

Définition 6.6.3. Soit A une algèbre de Banach commutative. La *transformation de Gelfand* de A est

$$\begin{aligned} \mathscr{G} \colon A &\to \mathscr{C}_0(\operatorname{spec} A) \\ x &\mapsto \Big(\omega \mapsto \omega(x)\Big). \end{aligned}$$

Proposition 6.6.7. *Soit A une algèbre de Banach commutative unifère complexe et I un idéal maximal. I est un espace vectoriel fermé de codimension* 1.

Démonstration. Comme I est propre, I ne contient pas $\{u - x \in A : \|x\| < 1\}$: donc $d(u, I) = 1$. Mais alors $d(u, \bar{I}) = 1$ et donc $\bar{I}$ est propre. Comme I est maximal, $\bar{I} = I$. Montrons que l'algèbre de Banach A/I est un corps : alors A/I est de dimension 1 par le théorème de Gelfand-Mazur. Soit $x \in A \setminus I$ et cherchons $y \in A$ tel que $xy + I = u + I$. Or $J = \{xy + z : y \in A, z \in I\}$ est un idéal parce que A est commutatif et $I \subsetneq J$: donc $J = A$ et $u \in J$. $\square$

Théorème 6.6.8. *Soit A une algèbre de Banach commutative complexe et $x \in A$.*

(i) $\operatorname{spec}^1 x = \{0\} \cup \{\hat{x}(\omega) : \omega \in \operatorname{spec} A\}$.

(ii) *Si A est unifère, alors* $\operatorname{spec} x = \{\hat{x}(\omega) : \omega \in \operatorname{spec} A\}$.

Démonstration. Si A est unifère et $\lambda u - x$ n'est pas inversible, alors $\lambda u - x$ engendre un idéal propre inclus dans un idéal maximal qui est de codimension 1 et donc le noyau d'un caractère. Si A n'est pas unifère, nous avons donc prouvé que $\operatorname{spec}^1 x = \{\omega^1(0 + x) : \omega^1 \in \operatorname{spec} A^1\} = \{\omega(x) : \omega \in \operatorname{spec}^1 A\}$ $\square$

Proposition 6.6.9. *Soit A une algèbre de Banach complexe et $x, y \in A$ tels que $xy = yx$.*
– $\operatorname{spec}^1 x + y \subset \operatorname{spec}^1 x + \operatorname{spec}^1 y$ *et* $\operatorname{spec}^1 xy \subset (\operatorname{spec}^1 x)(\operatorname{spec}^1 y)$.
– *Si A est unifère,* $\operatorname{spec} x + y \subset \operatorname{spec} x + \operatorname{spec} y$ *et* $\operatorname{spec} xy \subset (\operatorname{spec} x)(\operatorname{spec} y)$.

Démonstration. Supposons que A admet une unité u. Soit B l'adhérence de l'algèbre unifère engendrée par x, les $(\lambda u - x)^{-1}$ lorsque λ parcourt $\operatorname{rés} x$, y et les $(\lambda u - y)^{-1}$ lorsque λ parcourt $\operatorname{rés} y$: B est une algèbre de Banach commutative telle que $\operatorname{spec}_A x = \operatorname{spec}_B x$ et $\operatorname{spec}_A y = \operatorname{spec}_B y$. De plus, $\operatorname{spec}_A x + y \subset \operatorname{spec}_B x + y$ et $\operatorname{spec}_A xy \subset \operatorname{spec}_B xy$. Pour tout $\omega \in \operatorname{spec} B$, on a $\omega(x + y) = \omega(x) + \omega(y)$ et $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$. Donc $\operatorname{spec}_B x + y \subset \operatorname{spec}_B x + \operatorname{spec}_B y$ et $\operatorname{spec}_B xy \subset (\operatorname{spec}_B x)(\operatorname{spec}_B y)$. $\square$

Définition 6.6.4. On dit qu'une $\mathbb{C}$-algèbre involutive A est une algèbre *hermitienne* si le spectre de tout élément hermitien de A est réel.

Proposition 6.6.10. *Soit A une algèbre de Banach commutative involutive complexe. A est hermitienne si et seulement si tous les caractères de A sont involutifs.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition 6.6.1(iii) et du théorème 6.6.8. $\square$

Théorème 6.6.11. *Soit A une algèbre de Banach commutative complexe. La transformation de Gelfand $\mathscr{G}$ de A est un morphisme d'algèbres de Banach. Soit $x \in A$. Alors $\|\hat{x}\| = \operatorname{rs}(x)$ et $\operatorname{spec}^1 x = \operatorname{spec}^1 \hat{x}$.*
– *Si A est une algèbre unifère, $\mathscr{G}$ est un morphisme d'algèbres unifères et* $\operatorname{spec} x = \operatorname{spec} \hat{x}$.
– *Si A est une algèbre involutive hermitienne, $\mathscr{G}$ est un morphisme d'algèbres involutives et l'image de la transformation de Gelfand est dense dans $\mathscr{C}_0(\operatorname{spec} A)$.*

Démonstration. L'étude des algèbres de fonctions continues a donné

$$\operatorname{spec}^1 \hat{x} = \{0\} \cup \{\hat{x}(\omega) : \omega \in \operatorname{spec} A\}$$

et on a par définition

$$\|\hat{x}\| = \sup_{\omega \in \operatorname{spec} A} |\hat{x}(\omega)|.$$

Si A est unifère, alors $\operatorname{spec} A$ est compact et $\operatorname{spec} \hat{x} = \{\hat{x}(\omega) : \omega \in \operatorname{spec} A\}$. Si ω_1 et ω_2 sont deux points distincts de $\operatorname{spec} A$, il existe x tel que $\omega_1(x) \neq \omega_2(x)$: donc $\operatorname{im} \mathscr{G}$ sépare les points de $\operatorname{spec} A$. Notons aussi que pour chaque $\omega \in \operatorname{spec} A$ il existe $x \in A$ tel que $\hat{x}(\omega) \neq 0$. Si A est une algèbre involutive hermitienne, alors $\omega(x^*) = \overline{\omega(x)}$ pour tout $\omega \in \operatorname{spec} A$: donc $\widehat{x^*} = \hat{x}^*$. En particulier, $\operatorname{im} \mathscr{G}$ est une sous-algèbre involutive de $\mathscr{C}_0(\operatorname{spec} A)$: elle est dense par le théorème de Stone-Weierstrass. $\square$

6.6.4 Spectre des algèbres de groupe

Déterminons le spectre de $\ell^1(\mathbb{Z})$. Soit x la suite dont tous termes sont nuls sauf le terme d'indice 1, qui vaut 1. Alors l'algèbre pleine engendrée par x est dense dans $\ell^1(\mathbb{Z})$. Un caractère ω de $\ell^1(\mathbb{Z})$ est donc déterminé par $\omega(x)$. Comme $\|x\| = \|x^{-1}\| = 1$, $\omega(x) \in \mathbb{T}$. Réciproquement, si $t \in \mathbb{T}$, alors $\omega_t \colon y \mapsto \hat{y}(t)$ est un caractère tel que $\omega_t(x) = t$. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &\to \operatorname{spec} \ell^1(\mathbb{Z}) \\ t &\mapsto \omega_t \end{aligned}$$

est donc bijective, et continue par définition de la topologie préfaible : $\hat{y}$ est continue pour chaque y. Comme $\mathbb{T}$ est compact, cette application est un homéomorphisme entre $\mathbb{T}$ et $\operatorname{spec} \ell^1(\mathbb{Z})$ qui permet d'identifier la transformation de Gelfand de $\ell^1(\mathbb{Z})$ avec la transformation de Fourier de $\mathbb{Z}$. Si f est une fonction holomorphe sur $\operatorname{spec} x$, alors $f(\hat{x}) = \widehat{f(x)}$. On peut formuler notre résultat comme suit.

Théorème 6.6.12 (théorème de Wiener-Lévy)**.** *Soit $x \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ une fonction dont la série de Fourier converge normalement. Si x ne s'annule pas, alors la série de Fourier de $1/x$ converge normalement. Plus généralement, si f est holomorphe au voisinage de $x(\mathbb{T})$, alors la série de Fourier de $f \circ x$ converge normalement.*

Déterminons le spectre de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Notons e_n la classe de la fonction $t \mapsto t^n$. Alors l'espace $\operatorname{vect}\{\mathrm{e}_n : n \in \mathbb{Z}\}$ des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Un élément $\omega \in \operatorname{spec}^1 \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ est donc déterminé par $\big(\omega(\mathrm{e}_n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$. Comme $\mathrm{e}_k * \mathrm{e}_l(s) = \displaystyle\int_{\mathbb{T}} t^k \big(t^{-1}s\big)^l \,\mathrm{d}t = \delta_{kl}\mathrm{e}_k(s)$ presque partout, $\omega(\mathrm{e}_k)\omega(\mathrm{e}_l) = \omega(\mathrm{e}_k * \mathrm{e}_l) = \delta_{kl}\omega(\mathrm{e}_k)$. Si $\omega \neq 0$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega(\mathrm{e}_k) \neq 0$. Alors on déduit que $\omega(\mathrm{e}_k) = 1$ et $\omega(\mathrm{e}_l) = 0$ pour tout $l \neq k$. Réciproquement, si $k \in \mathbb{Z}$, alors $\omega_k \colon y \mapsto \hat{y}(k)$ est un caractère tel que $\omega_k(\mathrm{e}_l) = \delta_{kl}$. L'application

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{Z}} &\to \operatorname{spec}^1 \mathrm{L}^1(\mathbb{T}) \\ k &\mapsto \begin{cases} \omega_k & \text{si } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } k = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

est donc bijective, et continue puisque $\omega_k(y) = \hat{y}(k) \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0$ pour chaque y. Comme $\tilde{\mathbb{Z}}$ est compact, cette application induit un homéomorphisme entre $\mathbb{Z}$ et $\operatorname{spec} \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ qui permet d'identifier la transformation de Gelfand de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ avec la transformation de Fourier de $\mathbb{T}$.

Théorème 6.6.13. *Soit $\sum a_n \mathrm{e}_n$ la série de Fourier d'une fonction intégrable. Si f est une fonction holomorphe au voisinage de 0 nulle en 0, $\sum f(a_n)\mathrm{e}_n$ est la série de Fourier d'une fonction intégrable.*

6.7 Algèbre stellaire

6.7.1 Adjonction d'une unité

Proposition 6.7.1. *Soit A une algèbre stellaire. Alors il existe une norme pour laquelle A^1 est une algèbre stellaire.*

Démonstration. Si A est unifère, alors

$$\begin{aligned} A^1 &\to \mathbb{K} \times A \\ \lambda + x &\mapsto (\lambda, \lambda u + x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives unifères et il suffit de poser $\|\lambda + x\| = \max(|\lambda|, \|\lambda u + x\|)$. Si A n'est pas unifère, soit $\mathrm{L} \colon A^1 \to \mathscr{B}(A)$ le morphisme d'algèbres de Banach défini par $\mathrm{L}_{\lambda+x}(y) = \lambda y + xy$ et munissons A^1 de la semi-norme donnée par $\|\lambda + x\| = \|\mathrm{L}_{\lambda+x}\|$. Or

$$\begin{aligned} \|\mathrm{L}_{\lambda+x}\| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, y \in A \;\; \lambda y + xy = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda = 0 \text{ et } xx^* = 0) \text{ ou } \forall\, y \in A \left(-\frac{x}{\lambda}\right) y = y \end{aligned}$$

Dans le premier cas, $\lambda + x = 0$. Dans le deuxième cas, $-\dfrac{x}{\lambda}$ serait une unité à gauche de A et alors $-\dfrac{x^*}{\bar{\lambda}}$ serait une unité à droite de A : mais alors A serait unifère. Donc A^1 est un espace de Banach. De plus,

$$\begin{aligned}\|\mathrm{L}_{\lambda+x}\|^2 = \sup_{y\in \mathrm{B}_A} \|\mathrm{L}_{\lambda+x}(y)\|^2 &= \sup_{y\in \mathrm{B}_A} \|(\mathrm{L}_{\lambda+x}(y))^* \,\mathrm{L}_{\lambda+x}(y)\| \\ &= \sup_{y\in \mathrm{B}_A} \|(\bar{\lambda} y^* + y^* x^*)(\lambda y + xy)\| \\ &= \sup_{y\in \mathrm{B}_A} \|y^* \,\mathrm{L}_{(\lambda+x)^*(\lambda+x)}(y)\| \leqslant \|\mathrm{L}_{(\lambda+x)^*(\lambda+x)}\|.\end{aligned}$$

et donc $\|\lambda + x\|^2 \leqslant \|(\lambda + x)^*(\lambda+x)\|$. La remarque 5.8.1 montre donc que A^1 est une algèbre stellaire. □

6.7.2 Élément normal et élément hermitien d'une algèbre stellaire

Proposition 6.7.2. *Soit A une algèbre stellaire et $x \in A$.*

(i) Si x est normal, $\|x^2\| = \|x\|^2$ et $\mathrm{rs}(x) = \|x\|$.

(ii) Si x est hermitien, $\mathrm{spec}^1 x \in \mathbb{R}$. Donc A est une algèbre hermitienne.

Démonstration. (i). $\|x^2\|^2 = \|x^* x^* x x\| = \|x^* x x^* x\| = \|(x^* x)^* (x^* x)\| = \|x^* x\|^2 = \|x\|^4$. Donc $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ pour tout n et $\mathrm{rs}(x) = \|x\|$.
(ii). Soit $a + \mathrm{i}b \in \mathrm{spec}^1 x$ et montrons que $b = 0$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $a + \mathrm{i}(b + \lambda)$ est dans le spectre de $\mathrm{i}\lambda + x$ relativement à A^1 et donc $|a + \mathrm{i}(b + \lambda)| \leqslant \|\mathrm{i}\lambda + x\|$. Donc

$$a^2 + b^2 + 2b\lambda + \lambda^2 \leqslant \|\mathrm{i}\lambda + x\|^2 = \|(-\mathrm{i}\lambda + x)(\mathrm{i}\lambda + x)\| = \|\lambda^2 + x^2\| \leqslant \lambda^2 + \|x^2\|$$

et $a^2 + b^2 + 2b\lambda \leqslant \|x^2\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: donc $b = 0$. □

Corollaire 6.7.3. *Soit A une algèbre involutive et B une algèbre stellaire, et soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'algèbres involutives. Alors φ est continu et $\|\varphi\| \leqslant 1$.*

Démonstration. On a $\mathrm{spec}^1 \varphi(x) \subset \mathrm{spec}^1 x$: si x est normal, $\varphi(x)$ est normal et $\|\varphi(x)\| = \mathrm{rs}(\varphi(x)) \leqslant \mathrm{rs}(x) \leqslant \|x\|$. Si x est quelconque, $\|\varphi(x)\|^2 = \|\varphi(x^* x)\| \leqslant \|x^* x\| \leqslant \|x\|^2$. □

Cela montre qu'une algèbre involutive admet au plus une norme d'algèbre stellaire.

6.7.3 Permanence spectrale

Lemme 6.7.4. *Soit A une algèbre de Banach munie d'une unité u, B une sous-algèbre fermée contenant u et $x \in B$. Alors $\mathrm{spec}_B\, x$ est la réunion de $\mathrm{spec}_A\, x$ avec certaines composantes connexes bornées de $\mathbb{K} \setminus \mathrm{spec}_A\, x$.*

Démonstration. Comme la résolvante de x relativement à A est continue et $A \setminus B$ est ouvert,

$$\mathrm{spec}_B\, x \setminus \mathrm{spec}_A\, x = \{\lambda \in \mathrm{rés}_A\, x : (\lambda u - x)^{-1} \in A \setminus B\}$$

est ouvert. Donc l'intersection de $\mathrm{spec}_B\, x$ avec chaque composante connexe C de $\mathbb{K} \setminus \mathrm{spec}_A\, x$ est ouverte et fermée dans C. □

Proposition 6.7.5. *Soit A une algèbre stellaire, B une sous-algèbre stellaire et $x \in B$.*

(i) $\mathrm{spec}^1_B\, x = \mathrm{spec}^1_A\, x$.

(ii) Si A admet une unité u et $u \in B$, $\mathrm{spec}_B\, x = \mathrm{spec}_A\, x$.

Démonstration. (i) résulte de (ii) par adjonction d'une unité.
(ii) Un élément inversible dans B est inversible dans A. Donc $\operatorname{spec}_A x \subset \operatorname{spec}_B x$. Réciproquement, supposons d'abord que x est hermitien. Comme $\operatorname{spec}_A x \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{C} \setminus \operatorname{spec}_A x$ est connexe et donc $\operatorname{spec}_B x = \operatorname{spec}_A x$. Supposons $x \in B$ quelconque. Si x est inversible dans A, x^* est inversible dans A : alors xx^* et x^*x sont inversibles dans A et comme ils sont hermitiens, il le sont dans B : il existe $y, z \in B$ tels que $xx^*y = u$ et $zx^*x = u$. Donc x est inversible à gauche et à droite dans B : donc x est inversible dans B. ☐

6.7.4 Théorème de Gelfand-Naimark

Théorème 6.7.6. *Soit A une algèbre stellaire commutative. La transformation de Gelfand $\mathscr{G}\colon A \to \mathscr{C}_0(\operatorname{spec} A)$ est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach involutives. Si A admet une unité u, $\mathscr{G}(u) = \mathbb{1}$.*

Démonstration. Soit $x \in A$. Comme A est commutative, x est normal et donc $\|x\| = \operatorname{rs}(x) = \|\hat{x}\|$. Donc $\mathscr{G}$ est une isométrie et d'image fermée. Comme A est une algèbre hermitienne, l'image de $\mathscr{G}$ est dense. ☐

Théorème 6.7.7. *Soit A une algèbre stellaire unifère et $x \in A$ normal. Soit B l'algèbre stellaire unifère engendrée par x. Alors B est commutative et la transformée de Gelfand de x relativement à B définit un homéomorphisme de $\operatorname{spec} B$ sur $\operatorname{spec} x$.*

Démonstration. On a $\operatorname{spec} x = \operatorname{spec}_B x$. La transformée de Gelfand de x relativement à B définit une application continue surjective du compact $\operatorname{spec} B$ sur $\operatorname{spec} x$. Montrons qu'elle est injective et supposons que $\hat{x}(\omega_1) = \hat{x}(\omega_2)$. Alors $\widehat{x^*}(\omega_1) = \hat{x}^*(\omega_1) = \overline{\hat{x}(\omega_1)} = \widehat{x^*}(\omega_2)$. Par conséquent, ω_1 et ω_2 coïncident sur l'algèbre des polynômes en x et x^* qui est dense dans B. Donc $\omega_1 = \omega_2$. Or l'application réciproque d'une bijection continue entre compacts est continue. ☐

Corollaire 6.7.8. *Soit A une algèbre stellaire unifère et $x \in A$ normal. Il existe un unique morphisme d'algèbres involutives unifères φ de $\mathscr{C}(\operatorname{spec} x)$ dans A qui transforme la fonction $t \mapsto t$ en x : c'est le* calcul fonctionnel continu *de x. Le calcul fonctionnel continu est une isométrie et son image est l'algèbre stellaire unifère engendrée par x. Soit f une fonction continue sur $\operatorname{spec} x$: On note $\varphi(f|_{\operatorname{spec} x}) = f(x)$.*

Démonstration. Notons t la fonction $t \mapsto t$. Posons $\varphi(f) = \mathscr{G}^{-1}(f \circ \hat{x})$. Alors φ est un morphisme d'algèbres involutives unifères isométrique et $\varphi(t) = \mathscr{G}^{-1}(\hat{x}) = x$. Si φ est un morphisme d'algèbres involutives qui transforme t en x, alors φ est continu et pour toute fonction polynomiale $f\colon t \mapsto \sum\sum a_{ij} t^i \bar{t}^j$ on a $\varphi(f) = \sum\sum a_{ij} x^i x^{*j}$. Or ces fonctions sont denses dans $\mathscr{C}(\operatorname{spec} x)$ par le théorème de Stone-Weierstrass. Donc φ est unique. ☐

Corollaire 6.7.9. *Soit A une algèbre stellaire et $x \in A$ normal.*

(i) *Soit B l'algèbre stellaire engendrée par x. Alors B est commutative et la transformée de Gelfand de x relativement à B définit un homéomorphisme de $\operatorname{spec} B$ sur $\operatorname{spec}^1 x \setminus \{0\}$.*

(ii) *Il existe un unique morphisme d'algèbres involutives $\varphi\colon \mathscr{C}_0(\operatorname{spec}^1 x \setminus \{0\}) \to A$ qui transforme la fonction $t \mapsto t$ en x : c'est le* calcul fonctionnel continu *de x. Son image est B. Soit f une fonction continue sur $\operatorname{spec}^1 x \setminus \{0\}$ dont la limite en 0 vaut 0 : on note $\varphi(f|_{\operatorname{spec}^1 x \setminus \{0\}}) = f(x)$. Alors $\|f(x)\| = \|f\|$.*

Démonstration. (i). On a $\operatorname{spec}^1 x = \operatorname{spec}_{B^1}(0 + x)$ et la transformée de Gelfand de $0 + x$ définit un homéomorphisme entre $\operatorname{spec} B^1$ et $\operatorname{spec}^1 x$ qui transforme le caractère $\omega_0^1\colon \lambda + x \mapsto \lambda$ en 0. Alors $\widehat{0 + x}(\omega^1) = \hat{x}(\omega^1|_B)$ pour tout $\omega^1 \in \operatorname{spec} B^1 \setminus \{\omega_0^1\}$. La transformée de Gelfand de x est la restriction de cet homéomorphisme à $\operatorname{spec} B$.
(ii). On pose encore $\varphi(f) = \mathscr{G}^{-1}(f \circ \hat{x})$ et on utilise que les fonctions polynomiales $t \mapsto \sum\sum a_{ij} t^i \bar{t}^j$ sans terme constant sont denses dans $\mathscr{C}_0(\operatorname{spec}^1 x \setminus \{0\})$. ☐

Théorème 6.7.10. *Soit A une algèbre stellaire unifère. Soit $x \in A$ normal et $f \in \mathscr{C}(\operatorname{spec} x)$.*

(i) $\operatorname{spec} f(x) = f(\operatorname{spec} x)$.

(*ii*) *Si* $g \in \mathscr{C}(\operatorname{spec} f(x))$, $g(f(x)) = g \circ f(x)$.

Démonstration. (i). Soit B l'algèbre stellaire unifère engendrée par x. Alors

$$\operatorname{spec} f(x) = \operatorname{spec}_B f(x) = \operatorname{spec}_{\mathscr{C}(\operatorname{spec} x)} f = f(\operatorname{spec} x).$$

(ii). Soit $y = f(x)$. L'application $g \mapsto g \circ f(x)$ est un morphisme d'algèbres involutives unifères de $\mathscr{C}(\operatorname{spec} y)$ dans A qui transforme t en y. Par unicité, c'est le calcul fonctionnel continu de y : donc $g \circ f(x) = g(y)$. □

Théorème 6.7.11. *Soient A et B deux algèbres stellaires et $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'algèbres involutives.*

(*i*) *Si x est normal et $f \in \mathscr{C}_0(\operatorname{spec}^1 x \setminus \{0\})$, alors $f(\varphi(x)) = \varphi(f(x))$.*

(*ii*) *Si φ est injectif, alors φ est une isométrie.*

Démonstration. Nous savons déjà que φ est continu et $\|\varphi\| \leqslant 1$.
(i). Les morphismes d'algèbres involutives $f \mapsto f(\varphi(x))$ et $f \mapsto \varphi(f(x))$ coïncident sur les fonctions polynomiales en t et t^* sans terme constant qui sont denses dans $\mathscr{C}_0(\operatorname{spec}^1 x \setminus \{0\})$.
(ii). Soit f la fonction de distance à $\operatorname{spec}^1_B \varphi(x) \setminus \{0\}$. Alors $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x)) = 0$ et $f(x) = 0$ et donc f est nulle sur $\operatorname{spec}^1 x \setminus \{0\}$. Donc $\operatorname{spec}^1 x \subset \operatorname{spec}^1_B \varphi(x)$. On en déduit que $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ comme dans la démonstration du corollaire 6.7.3. □

6.7.5 Élément positif d'une algèbre stellaire

Lemme 6.7.12. *Soit A une algèbre et $x, y \in A$. Alors $\operatorname{spec}^1 xy = \operatorname{spec}^1 yx$.*

Démonstration. Soit $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda - xy$ admet un inverse z dans A^1. Alors

$$\begin{aligned}(\lambda - yx)(1 - yzx) &= \lambda - (\lambda yzx + yx - yxyzx)\\ &= \lambda - y(\lambda + z^{-1} - xy)zx = \lambda + 0\end{aligned}$$

et de même $(1 - yzx)(\lambda - yx) = \lambda + 0$. □

Lemme 6.7.13. *Soit A une algèbre et $x, y \in A$ hermitiens. Si le spectre de x et de y est positif, alors le spectre de $x + y$ est positif.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le spectre de l'élément hermitien $z = \dfrac{x+y}{2}$ est positif. On peut supposer que $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$. Alors $\operatorname{spec}^1 x, \operatorname{spec}^1 y \subset [0,1]$ et donc $\operatorname{spec}_{A^1}(1-x), \operatorname{spec}_{A^1}(1-y) \subset [0,1]$. Alors $\|1 - x\|, \|1 - y\| \leqslant 1$ et $\|1 - z\| \leqslant 1$. Donc $\operatorname{spec}^1 z \subset \{\lambda \in \mathbb{R} : |1 - \lambda| \leqslant 1\} = [0,2]$. □

Lemme 6.7.14. *Soit A une algèbre stellaire et $x \in A$. Si le spectre de x^*x est négatif, alors $x = 0$.*

Démonstration. Comme le spectre de $-x^*x$ et de $-xx^*$ est positif, le spectre de $-x^*x - xx^*$ est positif. Or

$$\begin{aligned}x^*x + xx^* &= (\operatorname{Re} x - \mathrm{i} \operatorname{Im} x)(\operatorname{Re} x + \mathrm{i} \operatorname{Im} x) + (\operatorname{Re} x + \mathrm{i} \operatorname{Im} x)(\operatorname{Re} x - \mathrm{i} \operatorname{Im} x)\\ &= 2(\operatorname{Re} x)^2 + 2(\operatorname{Im} x)^2.\end{aligned}$$

Donc le spectre de $-(\operatorname{Re} x)^2 - (\operatorname{Im} x)^2$ est positif. Comme le spectre de $(\operatorname{Re} x)^2$ et de $(\operatorname{Im} x)^2$ est positif, le spectre de $-(\operatorname{Re} x)^2$ et de $-(\operatorname{Im} x)^2$ est dans $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$. Donc $\operatorname{Re} x = \operatorname{Im} x = 0$ et donc $x = 0$. □

Théorème 6.7.15. *Soit A une algèbre stellaire et $x \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*i*) *x est positif.*

(*ii*) *x est hermitien et de spectre positif.*

(*iii*) *Il existe y hermitien tel que $x = y^2$.*

On peut de plus supposer que y est positif et alors y est unique : c'est la racine carrée de x.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$. Il suffit de montrer que si $y \in A$, alors le spectre de $z = y^*y$ est positif. Utilisons le calcul fonctionnel continu pour définir $z_+ = \max(z, 0)$ et $z_- = \max(-z, 0)$: alors $z = z_+ - z_-$, $z_+z_- = z_-z_+ = 0$ et le spectre de z_+ et de z_- est positif. Il s'agit de montrer que $z_- = 0$. Or $(yz_-)^*(yz_-) = z_-(z_+ - z_-)z_- = -z_-^3$ et donc $yz_- = 0$ et alors $z_-^3 = 0$. Donc $z_- = 0$ et $z = z_+$. $(ii) \Rightarrow (iii)$ se démontre comme dans le cas où x est un opérateur sur un espace de Hilbert. $\square$

Livres consultés pour ce cours

[1] W. ARVESON – *A short course on spectral theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 209, Springer-Verlag, New York, 2002.

[2] B. AUPETIT – *A primer on spectral theory*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Fasc. XXXII. Théories spectrales. Chapitre I : Algèbres normées. Chapitre II : Groupes localement compacts commutatifs*, Actualités Scientifiques et Industrielles, N° 1332, Hermann, Paris, 1967.

[4] J. DIEUDONNÉ – *Éléments d'analyse. Tome I*, 3e éd., Cahiers Scientifiques, XXVIII, Gauthier-Villars, Paris, 1981, Fondements de l'analyse moderne, avec un avant-propos de Gaston Julia.

[5] B. MAUREY – *Théorie spectrale*, `http://www.math.jussieu.fr/~maurey/Cachan2004/cours2004.pdf`, 2004.

[6] T. W. PALMER – *Banach algebras and the general theory of *-algebras*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Nos 49 et 79, Cambridge University Press, Cambridge, 1994 et 2001, Vol. I : Algebras and Banach algebras, Vol. II : *-algebras.

[7] L. SCHWARTZ – *Analyse*, Hermann, Paris, 1970, Deuxième partie : Topologie générale et analyse fonctionnelle, Collection Enseignement des Sciences, N° 11.

[8] G. SKANDALIS – *Théorie spectrale*, 1993, Notes d'un cours à l'École Normale Supérieure de Paris.

[9] D. WERNER – *Funktionalanalysis*, 4e éd., Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Travaux dirigés A

Endomorphismes admettant un polynôme annulateur scindé

A.1 Cas particulier : les zéros du polynôme sont simples

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in \mathscr{L}(E)$. Supposons qu'il existe un polynôme de la forme

$$p_0 = \prod_{k=1}^{n} (t - \lambda_k) \quad \text{avec } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

qui annule x : p_0 est scindé et tous ses zéros sont simples.

1. Soient

$$\begin{aligned} l_k \colon\ \mathbb{K}[t] &\to \mathbb{K} \\ p &\mapsto p(\lambda_k) \end{aligned}$$

   n formes linéaires. Montrer que l'orthogonal de $\{l_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ dans $\mathbb{K}[t]$ est $p_0\mathbb{K}[t]$:

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!] \quad l_k(p) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_0 \mid p$$

2. En déduire que les l_k restreints à $\mathbb{K}_{n-1}[t]$ forment une base du dual de $\mathbb{K}_{n-1}[t]$.
3. En déduire qu'il existe des polynômes p_j tels que

$$l_k(p_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Trouver une expression pour les p_j.
5. Soit $p \in \mathbb{K}[t]$ et r le reste de la division de p par p_0.
   - Montrer que $r = \sum_{k=1}^{n} p(\lambda_k) p_k$
   - Montrer que $p(x) = \sum_{k=1}^{n} p(\lambda_k) p_k(x)$.
6. Notons $x_k = p_k(x)$. Montrer que
   - $x_k \circ x_j = 0$ si $k \neq j$,
   - $\sum_{k=1}^{n} x_k = \mathrm{Id}$,
   - $x_k^2 = x_k$.

   Nous avons donc montré que x est *diagonalisable* : x est une combinaison linéaire de projections associées.

7. Montrer que E est la somme directe des noyaux des $\lambda_k \operatorname{Id} - x$ et que x_k est la projection sur $\ker(\lambda_k \operatorname{Id} - x)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq k} \ker(\lambda_j \operatorname{Id} - x)$.
8. Soit $A = \mathbb{K}^{\{\lambda_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}}$ l'algèbre des fonctions de $\{\lambda_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ dans $\mathbb{K}$. Considérons
$$\begin{aligned} \Phi :\ & A \to \mathbb{K}[x] \\ & f \mapsto \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) x_k. \end{aligned}$$
Montrer que Φ est un isomorphisme d'algèbres tel que $\Phi(\mathbb{1}) = \operatorname{Id}$ et $\Phi(t) = x$, où t désigne la fonction $\lambda \mapsto \lambda$. Φ est le *calcul fonctionnel de x*.

A.2 Cas général

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in \mathscr{L}(E)$. Supposons qu'il existe un polynôme de la forme
$$p_0 = \prod_{k=1}^{r} (t - \lambda_k)^{\alpha_k} \quad \text{avec } \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K} \text{ et } \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$$
qui annule x : p_0 est scindé. Notons $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$.

1. Pour $k \in [\![1, r]\!]$ et $j \in [\![1, \alpha_k - 1]\!]$ soit
$$\begin{aligned} l_{kj} :\ & \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K} \\ & p \mapsto \frac{p^{(j)}(\lambda_k)}{j!}. \end{aligned}$$
Montrer que l'orthogonal des l_{kj} dans $\mathbb{K}[t]$ est $p_0\mathbb{K}[t]$:
$$\forall\, k \in [\![1, r]\!]\ \forall\, j \in [\![1, \alpha_k - 1]\!] \quad l_{kj}(p) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_0 \mid p$$
2. En déduire que les l_k restreints à $\mathbb{K}_{n-1}[t]$ forment une base du dual de $\mathbb{K}_{n-1}[t]$.
3. En déduire qu'il existe des polynômes p_{kj} tels que
$$l_{kj}(p_{k'j'}) = \delta_{(k,j),(j,j')} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k' \text{ et } j = j' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. Montrer que $\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq k'}}^{r} (t - \lambda_k)^{\alpha_k} \mid p_{k'0}$.
5. Soit $p \in \mathbb{K}[t]$ et r le reste de la division de p par p_0.
   - Montrer que $r = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{\alpha_k} \frac{p^{(j)}(\lambda_k)}{j!} p_{kj}$
   - Montrer que $p(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{\alpha_k} \frac{p^{(j)}(\lambda_k)}{j!} p_{kj}(x)$.
6. Considérons
$$\begin{aligned} \Phi :\ & \mathscr{O}(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}) \to \mathbb{K}[x] \\ & f \mapsto \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=0}^{\alpha_k} \frac{f^{(j)}(\lambda_k)}{j!} p_{kj}(x). \end{aligned}$$
Montrer que Φ est un morphisme d'algèbres tel que $\Phi(\mathbb{1}) = \operatorname{Id}$ et $\Phi(t) = x$, où $\mathbb{1}$ et t désignent respectivement les germes des fonctions $\lambda \mapsto 1$ et $\lambda \mapsto \lambda$ au voisinage de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Φ est le *calcul fonctionnel holomorphe de x*. Notons $\Phi(f) = f(x)$.

7. Notons $x_k = p_{k0}(x)$. Montrer que
   - $x_k \circ x_j = 0$ si $k \neq j$,
   - $\sum_{k=1}^{r} x_k = \mathrm{Id}$,
   - $x_k^2 = x_k$.
8. Montrer que E est la somme directe des noyaux des $(\lambda_k \mathrm{Id} - x)^{\alpha_k}$ et que x_k est la projection sur $\ker(\lambda_k \mathrm{Id} - x)^{\alpha_k}$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq k} \ker(\lambda_j \mathrm{Id} - x)^{\alpha_j}$.
9. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{O}(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\})$ on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_k} \frac{f^{(j)}(\lambda_k)}{j!} (x - \lambda_k \mathrm{Id})^j \right) x_k.$$

10. Soit $d = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$ et $n = x - d$: d et n sont des polynômes en x. Montrer que
    - $x = d + n$,
    - $dn = nd$,
    - d est diagonalisable,
    - n est nilpotente.

    Montrer que d et n sont caractérisés par ces 4 propriétés.

Travaux dirigés B

Quelques opérateurs

B.1 Opérateur de multiplication à gauche

1. Soit A une algèbre munie d'une unité u et considérons $L\colon A \mapsto \mathscr{L}(A)$ définie par $L_x(y) = xy$. Montrer que L est un morphisme d'algèbres unifères injectif.
2. Montrer que L_x est inversible si x est inversible.
3. Supposons que L_x admet un inverse M.
   a) Montrer que $xM(u) = u$.
   b) Montrer que $M(x) = M(u)x$.
   c) Montrer que x est inversible.

B.2 Opérateur différentiel du premier ordre

1. Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre
$$\begin{cases} v' + qv = w \\ v(0) = 0 \end{cases}$$
où $q \in \mathscr{C}[0,1]$: il s'agit de trouver $v \in \mathscr{C}^1[0,1]$ en fonction du *terme inhomogène* $w \in \mathscr{C}[0,1]$. Résoudre cette équation différentielle en introduisant une primitive p de q.
2. Soit $E = \{v \in \mathscr{C}^1[0,1] : v(0) = 0\}$ et notons $\iota_E\colon E \to \mathscr{C}[0,1]$ l'inclusion de E dans $\mathscr{C}^1[0,1]$. Considérons l'opérateur différentiel
$$\begin{aligned} x\colon E &\to \mathscr{C}[0,1] \\ v &\mapsto v' + qv. \end{aligned}$$
   a) x est-il un opérateur borné ?
   b) Si on munit E de la norme définie par $\|v\|_E = \|v'\|$, x est-il un opérateur borné ?
   c) Montrer que x est un opérateur inversible. Soit $y = \iota_E \circ x^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{C}[0,1])$. y est-il borné ?
3. Montrer que $\mathscr{C}[0,1]$ est un espace préhilbertien muni du produit scalaire défini par
$$\langle v, w\rangle = \int_0^1 v(t)\overline{w(t)}\,\mathrm{d}t.$$
4. y est-il adjoignable ? Si c'est le cas, y est-il normal ?

B.3 Opérateur de Volterra

1. Soit $k \in \mathscr{C}([0,1] \times [0,1])$. Pour tout $w \in \mathscr{C}[0,1]$ soit

$$v(s) = \int_0^s k(s,t)w(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Montrer que v est une fonction continue.
   b) Noter que $v(0) = 0$. Trouver une condition générale sur k pour que $v \in \mathscr{C}^1[0,1]$.
   c) Conclure sur l'application linéaire y qui à w associe v, appelée *opérateur de Volterra de noyau intégral* k.

2. a) Montrer que $|v(s)| \leqslant s\|k\|\,\|w\|$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|(y^n(w))(s)| \leqslant \dfrac{s^n}{n!}\|k\|^n\|w\|$.
   c) Estimer la norme de y et de y^n.
   d) Calculer la norme de y. On pourra considérer les fonctions

$$w_{sn}(t) = \frac{\overline{k(s,t)}}{|k(s,t)| + 1/n} \text{ pour chaque } s \in [0,1] \text{ et chaque } n \geqslant 1.$$

3. Quelles sont les valeurs propres éventuelles de y ?
4. Si $l \in \mathscr{C}([0,1] \times [0,1])$, notons y_l l'opérateur qui à $w \in \mathscr{C}[0,1]$ associe la fonction définie par

$$v(s) = \int_0^1 l(s,t)w(t)\,\mathrm{d}t.$$

   On montre comme précédemment que y_l est un opérateur borné sur $\mathscr{C}[0,1]$ et que sa norme est

$$\|y_l\| = \max_{s\in[0,1]} \int_0^1 l(s,t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Supposons momentanément que l est une fonction polynomiale à deux variables : il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a_{nm} \in \mathbb{K}$ tels que

$$l(s,t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N a_{nm}s^n t^m.$$

   Montrer qu'alors $y_l(w)$ est une fonction polynomiale de degré au plus N.
   b) Montrer que y_l est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.
   c) Existe-t-il une fonction continue $l \in \mathscr{C}([0,1] \times [0,1])$ telle que $y = y_l$?
   d) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $l \in \mathscr{C}([0,1]\times[0,1])$ telle que $\|l\| \leqslant \|k\|$ et $\|y - y_l\| < \varepsilon$. En déduire que y est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

B.4 Opérateur de multiplication sur $\ell_2(\mathbb{N})$

Soit $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\ell_2(\mathbb{N})$ et soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{K}$.

1. Dans quel cas existe-t-il un opérateur y borné sur $\ell_2(\mathbb{N})$ tel que $y(\mathrm{e}_n) = x_n\mathrm{e}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
2. Calculer alors $y(v)$ pour tout $v \in \ell_2(\mathbb{N})$.
3. Calculer l'adjoint de y ; y est-il normal ? Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que y soit hermitien, positif, unitaire.
4. Si $x \in \ell_\infty(\mathbb{N})$, y est un opérateur borné. Soit $\varphi\colon \ell_\infty(\mathbb{N}) \to \mathscr{B}(\ell_2(\mathbb{N}))$ l'application qui à x associe y. Montrer que φ est un morphisme d'algèbres involutives unifères.

5. Soit à présent (T, μ) un espace mesuré et $x \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$. Si v est une fonction de carré intégrable, montrer que la fonction xv est encore de carré intégrable. Montrer que si v ou x est une fonction mesurable nulle presque partout, la fonction xv est aussi nulle presque partout. On en déduit qu'on peut associer à tout $x \in \mathrm{L}^\infty(\mu)$ un unique opérateur y sur $\mathrm{L}^2(\mu)$ tel que

$$(y(v))(t) = x(t)v(t) \quad \text{presque partout.}$$

   a) Montrer que y est borné et estimer sa norme.
   b) Montrer que l'application φ qui à x associe y est un morphisme d'algèbres involutives unifères.
   c) Montrer que $\varphi(x)$ est un opérateur borné inversible si et seulement si x est inversible.

Travaux dirigés C

Opérateurs compacts

C.1 Opérateur de Volterra et opérateur de Fredholm sur $\mathscr{C}[0,1]$

Soit $k \in \mathscr{C}([0,1] \times [0,1])$.

– On rappelle que l'opérateur de Volterra de noyau intégral k est l'opérateur x_k défini par

$$x_k(v)(s) = \int_0^s k(s,t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous avons montré que x_k est un opérateur borné sur $\mathscr{C}[0,1]$ et que sa norme est

$$x_k = \max_{s\in[0,1]} \int_0^s |k(s,t)|\,\mathrm{d}t.$$

– L'opérateur de Fredholm de noyau k est l'opérateur y_k défini par

$$y_k(v)(s) = \int_0^1 k(s,t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

On montre comme pour l'opérateur de Volterra que y_k est un opérateur borné sur $\mathscr{C}[0,1]$ et que sa norme est

$$\|y_k\| = \max_{s\in[0,1]} \int_0^1 |k(s,t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. Supposons momentanément que k est une fonction polynomiale à deux variables : il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a_{nm} \in \mathbb{K}$ tels que

$$k(s,t) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} a_{nm} s^n t^m.$$

Montrer que $y_k(v)$ est une fonction polynomiale de degré au plus N.

2. Montrer que y_k est dans l'adhérence des opérateurs de rang fini.
3. Existe-t-il une fonction continue $l \in \mathscr{C}([0,1] \times [0,1])$ telle que $x_k = y_l$?
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $l \in \mathscr{C}([0,1] \times [0,1])$ telle que $\|l\| \leqslant \|k\|$ et $\|x_k - y_l\| < \varepsilon$. En déduire que x_k est dans l'adhérence des opérateurs de rang fini.
5. On en déduit que x_k et y_k sont compacts. Comment peut-on démontrer cela directement ?

Munissons $\mathscr{C}[0,1]$ du produit scalaire défini par

$$\langle v, w\rangle = \int_0^1 v(t)\overline{w(t)}\,\mathrm{d}t$$

et notons E l'espace vectoriel $\mathscr{C}[0,1]$ muni de la norme définie par $\|v\|_2^2 = \langle v, v\rangle$. Montrer que x_k et y_k sont des opérateurs compacts de E dans $\mathscr{C}[0,1]$.

C.2 Opérateur de Fredholm sur $\mathrm{L}^2([0,1])$

Soit k une fonction borélienne sur $[0,1] \times [0,1]$ de carré intégrable. L'opérateur intégral de noyau k est l'opérateur x_k défini par

$$x_k(v)(s) = \int_0^1 k(s,t)v(t)\,\mathrm{d}t \text{ presque partout.}$$

1. Montrer que si $v \in \mathrm{L}^2[0,1]$, alors il existe une fonction mesurable v sur $[0,1]$ telle que (C.2) vaut pour tout s hors d'un ensemble de mesure nulle.
2. Montrer que v est de carré intégrable et que l'opérateur y qui à w associe la classe de v est borné.
3. Supposons momentanément que k est une fonction étagée : il existe des parties boréliennes A_1, …, A_N, B_1, …, B_M de $[0,1]$ et $a_{nm} \in \mathbb{K}$ tels que

   $$k(s,t) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} a_{nm} \chi_{A_n}(s) \chi_{B_m}(t).$$

   Calculer $x_k(v)$.
4. Montrer que x_k est dans l'adhérence des opérateurs de rang fini.

C.3 Opérateur de multiplication sur $\ell_2(\mathbb{N})$

Soit $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\ell_2(\mathbb{N})$. Soit $x \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ et soit y l'opérateur défini par $y(\mathrm{e}_n) = x_n \mathrm{e}_n$.

1. Quel est le spectre de y ?
2. Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de y ?
3. Pour quels x y est-il compact ?

C.4 Opérateur de multiplication sur $\mathrm{L}^2(\mu)$

Soit (T, μ) un espace mesuré. Soit $x \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ et y l'opérateur sur $\mathrm{L}^2(\mu)$ défini par

$$(y(v))(t) = x(t)v(t) \quad \text{presque partout.}$$

1. Quel est le spectre de y ?
2. Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de y ?
3. Pour quels x y est-il compact ?

Travaux dirigés D

Problème de Sturm-Liouville

D.1 L'équation des ondes

Soit (E_λ) l'équation
$$\begin{cases} v'' = \lambda v + w \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{D.1}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée, c'est-à-dire que $w = 0$. Pour quel λ a-t-elle une solution non nulle ?
2. Résoudre (E_0) et construire une fonction $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que
$$(E_0) \Leftrightarrow v = \int_0^1 k(\cdot, t) w(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Résoudre (E_λ). Décrire l'ensemble des solutions selon λ.

D.2 Forme hermitienne d'une équation différentielle du deuxième ordre

Considérons l'équation $Av'' + Bv' + Cv = D$ sur l'intervalle $[a,b]$ avec A, B, C et D des fonctions continues et A est strictement positive sur $[a,b]$. Déterminer des fonctions p, q et w telles que cette équation est équivalente à l'équation $(pv')' + qv = w$.

D.3 Opérateur associé au problème de Sturm-Liouville

Soit (F_λ) l'équation
$$\begin{cases} (pv')' + qv = r(\lambda v + w) \\ \alpha v(a) + \alpha' v'(a) = 0 \\ \beta v(b) + \beta' v'(b) = 0 \end{cases} \tag{D.2}$$

où $p \in \mathscr{C}^1[a,b]$ est strictement positive, $q \in \mathscr{C}[a,b]$ est réelle, le *poids* $r \in \mathscr{C}[a,b]$ est strictement positif et $(\alpha,\alpha'), (\beta,\beta') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: il s'agit de trouver $v \in \mathscr{C}^2[a,b]$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$ et du *terme inhomogène* $w \in \mathscr{C}[a,b]$. Notons E le sous-espace de $\mathscr{C}[a,b]$ formé des $v \in \mathscr{C}^2[a,b]$ tels que $\alpha v(a) + \alpha' v'(a) = \beta v(b) + \beta' v'(b) = 0$ et $\iota_E\colon E \to \mathscr{C}[0,1]$ l'inclusion de E dans $\mathscr{C}[0,1]$. Considérons l'opérateur différentiel
$$\begin{aligned} x\colon E &\to \mathscr{C}[a,b] \\ v &\mapsto \frac{(pv')' + qv}{r}. \end{aligned}$$

Munissons $\mathscr{C}[a,b]$ du produit scalaire défini par
$$\langle v, w\rangle = \int_a^b v(t)\overline{w(t)}(r(t)\,\mathrm{d}t).$$

1. Écrire le problème de Sturm-Liouville en termes de y.
2. x est-il borné ?
3. Montrer que chaque espace propre de x est de dimension 1.
4. Nous voulons montrer que λ n'est pas valeur propre de x si λ est suffisamment grand. Nous allons seulement traiter le cas particulier $\alpha' = \beta' = 0$ et donc $v(a) = v(b) = 0$. Soit $\lambda > \max \frac{q}{r}$ et supposons que v est un vecteur propre pour λ.
   a) Montrer que si $v'(a) = 0$, alors $v = 0$.
   b) Montrer que $(pv')'$ est du signe de v
   c) Supposons que $v'(a) \neq 0$. Montrer que u est monotone.
   d) Conclure.

Quitte à soustraire un multiple de r à q, ce qui ne change pas la nature du problème, on peut supposer, et nous allons le faire dans toute la suite du problème, que 0 n'est pas valeur propre de x.

D.4 Fonction de Green

La *fonction de Green* associée au problème de Sturm-Liouville est une fonction k continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles telle que
- $k_s : t \mapsto k(s, t)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $[a, s]$ et sur $[s, b]$ et satisfait l'équation $(pv')' + qv = 0$ sur chacun de ces intervalles,
- k_s satisfait les conditions aux limites $\alpha v(a) + \alpha' v'(a) = 0$ et $\beta v(b) + \beta' v'(b) = 0$,
- k_s a des dérivées à droite et à gauche de s dont la différence vaut $\dfrac{1}{p(s)}$.

Pour construire cette fonction, procédons comme suit.

1. Montrer l'existence de fonctions réelles v_a et v_b non proportionnelles telles que
$$\begin{cases} (pv_a')' + qv_a = 0 \\ \alpha v_a(a) + \alpha' v_a'(a) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (pv_b')' + qv_b = 0 \\ \beta v_b(b) + \beta' v_b'(b) = 0 \end{cases}$$
2. Montrer que $p(v_a v_b' - v_a' v_b)$ est constant et non nul.
3. Construire k à partir de v_a et v_b.

D.5 Inverser x

1. Montrer que $\langle x(v), k_s \rangle = v(s)$ pour tout $v \in E$.
2. Montrer que v est solution du problème de Sturm-Liouville avec $\lambda = 0$ si et seulement si
$$v(s) = \int_a^b k(s, t) w(t) r(t) \, \mathrm{d}t. \tag{D.3}$$
3. En déduire une expression de x^{-1}. Soit $y = \iota_E \circ x^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{C}[a, b])$. y est-il borné ?
4. Soit $\lambda \neq 0$. Écrire le problème de Sturm-Liouville en termes de y.
5. Quel rapport y a-t-il entre valeurs propres de x et valeurs propres de y ?

D.6 y est hermitien

1. Montrer la fonction de Green est symétrique : $k(t, s) = k(s, t)$.
2. Montrer que y est hermitien.
3. Que peut-on dire alors des valeurs propres et des espaces propres de y et de x ?

D.7 Opérateur intégral sur $\mathscr{C}[a,b]$

Supposons dans cette question que k soit une fonction continue sur $[a,b] \times [a,b]$ quelconque.

1. Montrer que si $w \in \mathscr{C}[a,b]$, alors la fonction v définie par (D.3) est aussi dans $\mathscr{C}[a,b]$.
2. Soit y l'opérateur qui à w associe v.
   a) y est-il borné ?
   b) y est-il compact ?
   c) Que peut-on dire alors des valeurs propres et des vecteurs propres de y ?
   d) Que peut-on dire des solutions w de l'équation $y(w) = \lambda w + v$?

D.8 Conclusion

Qu'avons-nous démontré au sujet de (F_λ) ?

D.9 Opérateur intégral sur $\mathrm{L}^2[a,b]$

Supposons dans cette question que k soit une fonction de carré intégrable sur $[a,b] \times [a,b]$ quelconque.

1. Montrer que si $w \in \mathrm{L}^2[a,b]$, alors il existe une fonction mesurable v sur $[a,b]$ telle que (D.3) vaut pour tout s hors d'un ensemble de mesure nulle.
2. Montrer que v est de carré intégrable et que l'opérateur y qui à w associe la classe de v est borné.
3. y est-il compact ?
4. Que peut-on dire de la norme de y ?

Travaux dirigés E

Algèbre $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{+*})$

Exemple d'algèbre 22. L'application $t \mapsto \ln t$ est un morphisme du groupe $G = (\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$ sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$ dont l'inverse est $s \mapsto \mathrm{e}^s$. Munissons $\mathbb{R}^{+*}$ de la mesure définie par $\mu(A) = m\,[s \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^s \in A]$, où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: c'est la *mesure de Haar normalisée* de G. Si f est une fonction intégrable sur G, alors

$$\int_G f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\mathrm{e}^s\right)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\infty} f(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

et si $s \in G$,

$$\int_G f(st)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(st)\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\infty} f(t)\,\frac{\mathrm{d}s^{-1}t}{s^{-1}t} = \int_G f(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_G f(t^{-1})\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t^{-1})\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{\infty}^{0} f(t)\,\frac{\mathrm{d}(t^{-1})}{t^{-1}} = \int_G f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $\mathrm{L}^1(G)$ l'espace de Banach des classes de fonctions intégrables sur $(G, \mathrm{d}\mu)$. Si $x, y \in \mathrm{L}^1(G)$,

$$x * y(s) = \int_G x(t)y(t^{-1}s)\,\mathrm{d}t$$

existe pour presque tout s et définit un élément de $\mathrm{L}^1(G)$: c'est la *convolée* de x et y. Muni de la convolution, $\mathrm{L}^1(G)$ est une algèbre commutative. L'application définie par

$$x^*(t) = \overline{x(t^{-1})} \text{ presque partout}$$

est une involution de $\mathrm{L}^1(G)$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_G \colon \mathrm{L}^1(G) &\to \mathscr{C}_0(G) \\ x &\mapsto \Big(\hat{x} \colon \vartheta \mapsto \int_G x(t)t^{\mathrm{i}\ln\vartheta}\,\mathrm{d}t\Big). \end{aligned}$$

Elle est bien définie par le théorème de convergence dominée et le lemme de Riemann-Lebesgue. $\mathscr{F}_G$ est la *transformation de Fourier* du groupe localement compact G. On a encore

$$\widehat{x * y}(\vartheta) = \hat{x}(\vartheta)\hat{y}(\vartheta)$$
$$\widehat{x^*}(\vartheta) = \hat{x}^*(\vartheta) :$$

donc $\mathscr{F}_G$ est un morphisme d'algèbres involutives de $\mathrm{L}^1(G)$ dans $\mathscr{C}_0(G)$. Son image est l'algèbre involutive des fonctions continues nulles en l'infini dont la transformée de Fourier est intégrable : nous verrons qu'elle est dense dans $\mathscr{C}_0(G)$. Si $x, l \in \mathrm{L}^1(G)$, alors

$$\int_G l(t)\hat{x}(\vartheta)\,\mathrm{d}t = \int_G l(t)\int_G x(t)t^{\mathrm{i}\ln\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = \int_G \left(\int_G l(t)t^{\mathrm{i}\ln\vartheta}\right) x(t)\,\mathrm{d}t = \int_G \hat{l}(\vartheta)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{E.1}$$

En considérant l comme une forme linéaire sur $\mathscr{C}_0(G)$, $\mathscr{F}'_G(l)$ est donc la classe de $\hat{l}$. On déduit de (E.1) que si $\hat{x} = 0$ alors x est dans l'orthogonal de l'image de $\mathscr{F}_G$ dans $\mathrm{L}^1(G)$ et donc $x = 0$. Donc $\mathscr{F}_G$ est injective.
Si $\mathrm{L}^1(G)$ avait une unité u, alors $\hat{u}(\vartheta) = 1$ pour tout $\vartheta \in G$, ce qui est impossible.

L'exemple 22 est l'*algèbre de groupe* du groupe localement compact $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$. La même construction peut être faite dans tout groupe localement compact non nécessairement commutatif.

Travaux dirigés F

Algèbre du disque

F.1 Algèbre du disque

1. On note $\mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leqslant 1\}$ le disque unité fermé du plan complexe. Montrer que $\mathbb{D}$ est un compact à bord orienté.
2. Soit $y \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$. On note $\hat{y}(n) = \displaystyle\int_{\mathbb{T}} y(t)t^{-n}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\hat{y}(n) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{y(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z$.
3. Soit $x \in \mathscr{C}(\mathbb{D})$ et posons $y = x|_{\mathbb{T}}$. On veut montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - (i) $x \in \mathrm{R}(\mathbb{D})$.
   - (ii) x est holomorphe sur $\mathring{\mathbb{D}}$.
   - (iii) Les coefficients de Fourier $\hat{y}(n)$ de y sont nuls pour $n < 0$.
   - (iv) x est limite uniforme de fonctions polynômes sur $\mathbb{D}$.

   a) Montrer que $\hat{y}(n) = \displaystyle\lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{T}} x(rt)t^{-n}\,\mathrm{d}t$. En déduire que si x est holomorphe sur $\mathring{\mathbb{D}}$, alors $\hat{y}(n) = 0$ pour tout $n \leqslant -1$.

   b) Supposons que $\hat{y}(n) = 0$ pour tout $n \leqslant -1$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{K}[t]$ tel que $\max_{t\in\mathbb{T}}|y(t) - p(t)| < \varepsilon$. En déduire que $\max_{t\in\mathbb{D}}|x(t) - p(t)| < \varepsilon$.

   c) Conclure.
4. Notons $\mathscr{A}$ l'espace des fonctions $y \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier $\hat{y}(n)$ sont nuls pour $n < 0$. Montrer que $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ et que l'application
$$\varphi\colon\ \mathrm{R}(\mathbb{D}) \to \mathscr{A}, \quad x \mapsto x|_{\mathbb{T}}$$
   est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach unifères.
5. Montrer que si x est une fonction continue sur $\mathbb{D}$ holomorphe sur $\mathring{\mathbb{D}}$ dont le développement en série entière en 0 est $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, alors $\hat{x}(n) = a_n$. En déduire l'inverse ψ de φ. Montrer que si $r \in [0, 1[$ et $t \in \mathbb{T}$, alors $\psi(y)(rt) = (P_r * y)(t)$, où P_r est le *noyau de Poisson* défini par $P_r(t) = \dfrac{1 - r^2}{|1 - rt|^2}$.
6. Soit $y \in \mathscr{A}$. Décrire le spectre de y.
7. Montrer que l'application définie par $y^*(t) = \overline{y(t^{-1})}$ est une involution de $\mathscr{A}$. Que peut-on dire du spectre d'un élément hermitien de $\mathscr{A}$?

Nous montrerons que le spectre de tout élément x de $\mathscr{A}$ est la réunion du spectre de x dans $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ avec toutes les composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{spec}_{\mathscr{C}(\mathbb{T})}\, x$: c'est l'intérieur de la courbe paramétrée définie par x dans le plan complexe.

F.2 Unité approchée

Une *unité approchée de* $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ est une suite de fonctions continues u_n sur $\mathbb{T}$ telles que

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{u_n}(0) = 1$,

(ii) les $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$ sont uniformément bornés,

(iii) pour tout voisinage V de 1 dans $\mathbb{T}$ on a $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |u_n(t)| \mathbb{1}_{V^c}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

1. Pour tout $t \in \mathbb{T}$, soit τ_t l'opérateur défini sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ par $(\tau_t(x))(s) = x(t^{-1}s)$ presque partout.
   a) Montrer que si x est une fonction continue, alors $\max\limits_{s\in\mathbb{T}} |x(t^{-1}s) - x(s)| \xrightarrow[t\to 1]{} 0$.
   b) Montrer que si $x \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, alors l'application qui à t associe $\tau_t(x)$ est continue.
2. Soit (u_n) une unité approchée.
   a) Montrer que si $x \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, $u_n * x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$.
   b) Montrer que si $x \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$, $u_n * x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}), \mathrm{L}^1(\mathbb{T}))$.
3. Montrer que pour toute suite de nombres $r_n \in [0, 1[$ qui tend vers 1, (P_{r_n}) est une unité approchée.

F.3 Algèbre des fonctions holomorphes bornées du disque

On note $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur $\mathring{\mathbb{D}}$ qui sont bornées, muni de la norme du supremum.

1. Montrer que $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ est une algèbre de Banach.
2. Soit $x \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ et notons y_r la fonction définie par $y_r(t) = x(rt)$.
   a) Montrer qu'il existe une suite de nombres $r_n \in [0, 1[$ telle que la classe de y_{r_n} converge vers un élément $y \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}), \mathrm{L}^1(\mathbb{T}))$.
   b) Montrer que $x(rt) = (P_r * y)(t)$ pour tout $r \in [0, 1[$ et $t \in \mathbb{T}$.
   c) Montrer que la classe de y_r tend vers y pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}), \mathrm{L}^1(\mathbb{T}))$ lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures.
   d) Montrer que les coefficients de Fourier $\hat{y}(n)$ de y sont nuls pour $n < 0$.
3. On note $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$ formé des classes de fonctions y dont les coefficients de Fourier $\hat{y}(n)$ sont nuls pour $n < 0$. Montrer que l'application qui à x associe y construite à la question précédente est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach unifères.

Projet de contrôle continu de mai 2005

Soit A une algèbre de Banach unifère. Un élément $p \in A$ est *idempotent* si $p^2 = p$. Pour chaque idempotent p, soit A_p l'ensemble des pap lorsque a parcourt A et $\begin{array}{rl}\phi_p : A & \to A_p \\ a & \mapsto pap\end{array}$.

I. 1. Montrer que A_p est une sous-algèbre fermée de A.
   2. Déterminer l'unité de l'algèbre A_p.
   3. Comment munir A_p d'une norme qui en fait une algèbre de Banach unifère ?

II. Soit p un idempotent et a un élément de A qui commute avec p : $ap = pa$.
   1. Soit $q = \mathbb{1} - p$. Montrer que q est un idempotent et que $pq = 0$.
   2. Montrer que a est inversible dans A si et seulement si $\phi_p(a)$ est inversible dans A_p et $\phi_q(a)$ est inversible dans A_q.
   3. Montrer que le spectre de a est la réunion des spectres de $\phi_p(a)$ et de $\phi_q(a)$.

III. Soit a un élément de A et K une partie de $\operatorname{spec} a$ qui est à la fois ouverte et fermée dans $\operatorname{spec} a$: il existe des voisinages de K et de $L = \operatorname{spec} a \setminus K$ qui sont disjoints.
   1. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe χ égale à 1 au voisinage de K et égale à 0 au voisinage de L.
   2. Soit $p = \chi(a)$. Montrer que p est un idempotent et que $ap = pa$.
   3. Soit $\lambda \notin K$. Montrer qu'il existe une fonction ψ holomorphe au voisinage de $\operatorname{spec} a$ telle que $\psi(t) = 1/(\lambda - t)$ pour t dans un voisinage de K.
   4. En déduire que $\operatorname{spec} \phi_p(a) = K$ et $\operatorname{spec} \phi_q(a) = L$, où $q = \mathbb{1} - p$.
   5. Montrer que pour toute fonction holomorphe f au voisinage de K, $f(\phi_p(a)) = \phi_p(\hat{f}(a))$, où $\hat{f}$ est n'importe quelle fonction holomorphe au voisinage de $\operatorname{spec} a$ égale à f dans un voisinage de K.

Devoir à la maison en théorie des opérateurs du 26 mai 2005

La notation privilégiera celui qui traite des questions entières : seules compteront pour la note les sept questions les mieux traitées.

Ce problème étudie des notions analogues à l'injectivité et à la surjectivité d'un opérateur borné dans une algèbre de Banach unifère A (voir les questions 8 et 9.) Il donne des informations sur la topologie de $\mathrm{GL}(A)$ qui contreviennent à l'intuition de la topologie de $\mathbb{C}$ (voir les questions 3,4 et 5.) Il approfondit le phénomène de permanence spectrale vu en travaux dirigés (voir la question 7.)

Soit E une partie d'un espace topologique X. On note $\partial E = \overline{E} \cap \overline{X \setminus E}$ le bord de E. Si X est un espace métrique et si $x \in \partial E$, il existe une suite (x_n) dans E et une suite (y_n) dans $X \setminus E$ qui tendent vers x.

Soit A une algèbre de Banach unifère et $x \in A$.

- x est *inversible à droite* (resp. *à gauche*) s'il existe $y \in A$ tel que $xy = \mathbb{1}$ (resp. $yx = \mathbb{1}$.) On note $x \in A_{\mathrm{d}}^{-1}$ (resp. $x \in A_{\mathrm{g}}^{-1}$.)
- x est un *diviseur de zéro* (un *dz*, par abréviation) *à gauche* (resp. *à droite*) s'il existe $y \in A \setminus \{0\}$ tel que $xy = 0$ (resp. $yx = 0$.)
- x est un *diviseur de zéro topologique* (un *dzt*, par abréviation) *à gauche* (resp. *à droite*) s'il existe une suite d'éléments $y_n \in A$ de norme 1 telle que $xy_n \to 0$ (resp. $y_n x \to 0$.)

0. a) Montrer que si x admet un inverse à droite y et un inverse à gauche z, alors $y = z$ et x est inversible : $\mathrm{GL}(A) = A_{\mathrm{d}}^{-1} \cap A_{\mathrm{g}}^{-1}$.
   b) Montrer que si x est un dz à gauche, x est un dzt à gauche.
   c) Montrer que si x est un dzt à gauche, x n'est pas inversible à gauche.
1. Soit A l'algèbre de Banach unifère commutative des fonctions continues 2π-périodiques, muni de la norme du supremum : $A = \mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.
   a) Montrer que si l'intérieur de $x^{-1}(0)$ est vide, alors x n'est pas un dz. Réciproque ?
   b) Montrer que si x s'annule, alors x est un dzt.
   c) Conclure.
2. Soit A le sous-espace vectoriel normé de $\mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ formé des fonctions y dont les coefficients de Fourier $\hat{y}(n)$ sont nuls pour $n < 0$.
   a) Montrer que A est une algèbre de Banach unifère.
   b) Nous avons montré dans le TD F que $\operatorname{spec} A$ est homéomorphe au disque unité fermé $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$. Décrire la transformation de Gelfand $\mathscr{G} \colon A \to \mathscr{C}(\mathbb{D})$ qui résulte de cette identification.
   c) Montrer que le seul diviseur de zéro de A est 0.
   d) Montrer que la fonction $x \colon \lambda \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}$ est un élément non inversible de A, alors que x n'est pas un dzt.
3. Soit $\gamma : A \to \mathbb{R}$ définie par $\gamma(x) = \inf\{\|xy\| : \|y\| = 1\}$.
   a) Montrer que x est un dzt à gauche si et seulement si $\gamma(x) = 0$.
   b) Montrer que $|\gamma(x_1) - \gamma(x)| \leqslant \|x_1 - x\|$.
   c) Montrer que l'ensemble des dzt à gauche est fermé.
4. a) Montrer que si x_1 admet un inverse à droite z_1 et que $\|x - x_1\| < 1/\|z_1\|$, alors x est inversible à droite : A_{d}^{-1} est ouvert. De même, A_{g}^{-1} est ouvert.

b) Montrer que si x est limite d'éléments x_n ayant un inverse à droite z_n et que la suite des $\|z_n\|$ ne tend pas vers l'infini, alors x est inversible à droite.

c) Montrer que si $x \in \partial A_{\mathrm{d}}^{-1}$, alors x est un dzt à gauche. De même, si $x \in \partial A_{\mathrm{g}}^{-1}$, alors x est un dzt à droite.

5. a) Montrer que $\partial \mathrm{GL}(A) \subset \partial A_{\mathrm{g}}^{-1} \cap \partial A_{\mathrm{d}}^{-1}$.

   b) Montrer que si $x \in \partial \mathrm{GL}(A)$, alors x est un dzt à gauche et à droite.

   c) Montrer que l'ensemble des éléments qui ne sont ni inversibles ni dzt à gauche est ouvert. De même, l'ensemble des éléments qui ne sont ni inversibles ni dzt à droite est ouvert.

   d) Montrer que si $\lambda \in \partial \operatorname{spec} x$, alors $\lambda \mathbb{1} - x$ est un dzt à gauche et à droite.

   e) Montrer que si le seul dzt à gauche ou à droite est 0, alors $A = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

6. Supposons que A est une C*-algèbre unifère.

   a) Montrer que si x est autoadjoint non inversible, alors x est un dzt à gauche et à droite.

   b) Si x est normal non inversible, montrer que

      i. x^*x n'est pas inversible ;

      ii. x est un dzt à gauche et à droite.

7. Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'algèbres de Banach unifères injectif et d'image fermée.

   a) Donner la démonstration que $\phi(\mathrm{GL}(A)) \subset \mathrm{GL}(B)$ et $\operatorname{spec} \phi(x) \subset \operatorname{spec} x$.

   b) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|\phi(x)\| \geqslant c\|x\|$ pour tout $x \in A$.

   c) Montrer que si x est un dzt à gauche, alors $\phi(x)$ est un dzt à gauche.

   d) Montrer que $\phi(\partial \mathrm{GL}(A)) \subset \partial \mathrm{GL}(B)$.

   e) Montrer que $\partial \operatorname{spec} x \subset \partial \operatorname{spec} \phi(x)$.

Dans la suite du problème, X est un espace de Banach et $A = B(X)$. Soit $T \in A$.

8. a) Montrer que si T est injectif, alors T n'est pas un dz à gauche. Réciproque ?

   b) Montrer que si T est injectif et d'image fermée, alors T n'est pas un dzt à gauche. Réciproque ?

   c) Montrer que si l'image de T est dense, alors T n'est pas un dz à droite. Réciproque ?

9. a) Montrer que si T est surjectif, alors T n'est pas un dzt à droite. Réciproquement, si T n'est pas surjectif, la fin de la démonstration du théorème de l'application ouverte montre que $n^{-1}\mathrm{B}_X \not\subset \overline{T(\mathrm{B}_X)}$ pour tout $n \geqslant 1$.

      i. En déduire des formes linéaires l_n de norme 1 telles que $|l_n(T(x))| \leqslant 1/n$ pour $\|x\| \leqslant 1$.

      ii. Montrer que T est un dzt à droite.

   b) Conclure.

   c) Montrer que l'ensemble des opérateurs injectifs et d'image fermée distincte de X est ouvert.

   d) Montrer que l'ensemble des opérateurs surjectifs non injectifs est ouvert.

   e) Que signifient ces résultats lorsque X est de dimension finie ?

Indication : pour chacune des réciproques, on pourra considérer les opérateurs $U_{l,y}$ de rang 1 définis par $U_{l,y}(x) = l(x)y$, où $(l, y) \in X' \times X$.

Examen terminal en théorie des opérateurs du 30 mai 2005

Soit sgn la fonction signe : $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \ . \end{cases}$

Exercice 1. Un opérateur de multiplication.

1. (2 points) Montrer que l'égalité
$$(T(x))(t) = \operatorname{sgn}(t)x(t) \text{ presque partout}$$
définit un opérateur borné sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et calculer sa norme.
2. (1 point) Est-ce que T admet un polynôme annulateur non nul ?
3. (1 point) T est-il compact ?
4. (2 points) Quelles sont les valeurs spectrales de T ?
5. (3 points) Quelles sont les valeurs propres de T ? Déterminer les espaces propres associés.
6. (4 points) Montrer que T est autoadjoint. Soit g une fonction continue sur le spectre de T. Calculer $g(T)$.

Exercice 2. Un opérateur de convolution.

1. (2 points) Montrer que l'égalité
$$(T(x))(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s$$
définit un opérateur borné sur $\mathscr{C}[-\pi,\pi]$ et calculer sa norme. Existe-t-il une fonction x non nulle telle que $\|T(x)\| = \|T\|\,\|x\|$?
2. (1 point) Montrer que $T(x)$ est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre
$$\begin{cases} y'(t) = 2x(t) \\ y(-\pi) + y(\pi) = 0 \ . \end{cases}$$
3. (2 points) Décrire le noyau et l'image de T .
4. (2 points) T est-il compact ?
5. (4 points) Quelles sont les valeurs propres de T ? Déterminer les espaces propres associés.
6. (2 points) Quel est le rayon spectral de T ?

Exercice 3. Soit A l'algèbre de Wiener : A est l'espace de Banach des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier converge normalement, muni de la norme définie par $\|x\| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{x}(k)|$, et muni du produit défini par $(xy)(t) = x(t)y(t)$. Notons $\mathrm{e}_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Alors e_0 est l'unité de A.

1. (3 points) Montrer que A est une algèbre de Banach unifère commutative.
2. (2 points) Trouver un morphisme d'algèbres non nul de A dans $\mathbb{C}$.
3. Soit $\phi\colon A \to \mathbb{C}$ un morphisme d'algèbres non nul.
   a) (4 points) Question de cours. Quelle est la valeur de $\phi(\mathrm{e}_0)$? Démonstration. Est-ce que ϕ est continu ? Démonstration.

b) (3 points) Soit $\lambda = \phi(\mathrm{e}_1)$. Calculer $\phi(\mathrm{e}_{-1})$ puis $\phi(\mathrm{e}_k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $|\lambda| = 1$. Il existe donc $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tel que $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$.

c) (1 point) Soit $x \in A$: x est la somme de sa série de Fourier $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{x}(k)\mathrm{e}_k$. Calculer $\phi(x)$.

d) (2 points) Décrire tous les morphismes d'algèbres non nuls de A dans $\mathbb{C}$.

4. (3 points) Soit $x \in A$. Décrire le spectre de x. En déduire que si x ne s'annule pas, alors x est inversible dans A : la série de Fourier de la fonction $1/x$ converge normalement.

5. Soit $x \in A$ et f une fonction holomorphe au voisinage du spectre de x. Nous voulons démontrer que l'élément $f(x)$, défini par le calcul fonctionnel holomorphe, est égal à $f \circ x$.

   a) (2 points) Première démonstration. Déduire ceci de l'unicité du calcul fonctionnel holomorphe.

   b) (4 points) Deuxième démonstration. Exprimer l'élément $f(x)$ défini par le calcul fonctionnel holomorphe. Soit δ_t la forme linéaire sur A définie par $\delta_t(x) = x(t)$. Calculer $\delta_t(f(x))$. Conclure.

Contrôle continu en théorie des opérateurs du 4 mai 2006.

Exercice 1. Soit x l'opérateur de multiplication défini sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}[0,1]$ par $(x(v))(t) = tv(t)$ pour tout $v \in \mathscr{C}[0,1]$ et tout $t \in [0,1]$.

1. Calculez la norme de x.
2. Trouvez les valeurs propres de x.
3. Calculez le spectre de x.

Exercice 2. Soit A une algèbre munie d'une unité u. Un élément $x \in A$ est *idempotent* si $x^2 = x$. Un élément $y \in A$ est une *symétrie* si $y^2 = u$.

1. Soit y une symétrie.
   a) Déterminez les projecteurs spectraux x associés à y.
   b) Quel rapport y a-t-il entre le spectre de y et le spectre de x ?
2. Proposez un espace vectoriel E et trois opérateurs distincts x_1, x_2 et x_3 sur E qui sont idempotents. Déterminez les valeurs propres de ces trois opérateurs.
3. Que peut-on dire du spectre d'un élément idempotent ?
4. Que peut-on dire du spectre d'une symétrie ?
5. Soit x un élément idempotent de l'algèbre $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ des fonctions complexes continues sur le groupe $\mathbb{T}$ des nombres complexes de module 1, munie de la multiplication des fonctions.
   a) Quelles valeurs la fonction x peut-elle prendre ?
   b) Quels sont les idempotents de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$?
6. Soit x un élément idempotent de l'algèbre $\ell^1(\mathbb{Z})$ munie de la convolution.
   a) Que peut-on dire de la transformée de Fourier de x (c'est-à-dire de la somme de la série de Fourier dont les coefficients sont les termes de x) ?
   b) Quels sont les idempotents de $\ell^1(\mathbb{Z})$?
7. Soit x un élément idempotent de l'algèbre $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ munie de la convolution.
   a) Que peut-on dire de la transformée de Fourier de x (c'est-à-dire de la suite des coefficients de Fourier de x) ?
   b) Quels sont les idempotents de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$?

Exercice 3. Soit E un espace de Hilbert. Soit x une isométrie non surjective de E : on a $\|x(v)\| = \|v\|$ pour tout $v \in E$ et $\operatorname{im} x \neq E$.

1. Soit x^* l'adjoint de x. Calculez $x^* \circ x$.
2. Que peut-on dire au sujet de $x \circ x^*$?
3. Montrez qu'il existe un élément $\mathrm{e}_0 \in E$ de norme 1 et orthogonal à $\operatorname{im} x$.
4. Posons $\mathrm{e}_n = x^n(\mathrm{e}_0)$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrez que e_0 est orthogonal à e_n pour tout $n \geqslant 1$.
5. Montrez que les e_n, $n \geqslant 0$, forment un système orthonormé.
6. Montrez que $x^*(\mathrm{e}_0) = 0$.
7. Montrez que $x^*(\mathrm{e}_1) = \mathrm{e}_0$.
8. Calculez $x^*(\mathrm{e}_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.
9. Montrez que tout nombre λ de module strictement inférieur à 1 est valeur propre de x^*.
10. Que peut-on dire du spectre de x ?

Exercice 4. Soit $\mathbb{T}$ le groupe des nombres complexes de module 1. Si v et w sont deux classes de fonctions complexes intégrables sur $\mathbb{T}$, on définit la classe $v * w$ d'une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$ en posant

$$v * w(s) = \int_{\mathbb{T}} v(t)w(t^{-1}s)\,\mathrm{d}t \text{ presque partout.}$$

Soit $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ l'algèbre involutive des classes de fonctions complexes intégrables munie du produit de convolution $*$ et de l'involution définie par

$$x^*(t) = \overline{x(t^{-1})} \text{ presque partout.}$$

L'espace vectoriel $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ est un espace de Banach muni de la norme définie par

$$\|x\| = \int_{\mathbb{T}} |x(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |x(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} s})|\,\mathrm{d}s.$$

Soit $x \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\hat{x}(n) = \int_{\mathbb{T}} x(t)t^{-n}\,\mathrm{d}t$ et e_n la classe de la fonction $t \mapsto t^n$.

1. Justifiez pourquoi on définit un opérateur borné y sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ en posant $y(v) = x * v$ pour tout $v \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. L'opérateur y est l'*opérateur de convolution avec x sur* $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Que peut-on dire sur la norme de y ?
2. Soit $\varphi\colon \mathrm{L}^1(\mathbb{T}) \to \mathscr{B}(\mathrm{L}^1(\mathbb{T}))$ l'application qui à x associe y. Montrez que φ est un morphisme d'algèbres.
3. Soit $v \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Calculez $\widehat{y(v)}$.
4. Soit λ une valeur propre de y associée au vecteur propre v.
   a) Montrez que $\lambda \in \{\hat{x}(n) : n \in \mathbb{Z}\}$.
   b) Que peut-on dire du vecteur propre v lorsque $\lambda = \hat{x}(n)$?
5. Montrez que $y(\mathrm{e}_n) \to 0$.
6. L'opérateur y est-il inversible ?
7. Que peut-on dire du spectre de y ?
8. Le dual de $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ est identifié avec l'espace de Banach $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})$ des classes de fonctions boréliennes bornées.
   a) Calculez l'opérateur y' transposé de y.
   b) Que peut-on dire du spectre de y' ?

Examen terminal en théorie des opérateurs du 26 mai 2006

Problème. Soit $\mathbb{T}$ le groupe des nombres complexes de module 1. Soit $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ l'espace de Hilbert des classes de fonctions complexes de carré intégrable sur $\mathbb{T}$, muni du produit scalaire défini par

$$\langle v, w\rangle = \int_{\mathbb{T}} v(t)\overline{w(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 v(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s})\overline{w(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s})}\,\mathrm{d}s.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\hat{v}(n) = \displaystyle\int_{\mathbb{T}} v(t)t^{-n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 v(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}s})\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ns}\,\mathrm{d}s$ et e_n la classe de la fonction $t \mapsto t^n$. Nous avons vu que $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$.

1. Montrez qu'on définit une isométrie x sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ en posant $x(v) = \mathrm{e}_1 \cdot v$, c'est-à-dire $(x(v))(t) = tv(t)$ pour tout $v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ et presque tout $t \in \mathbb{T}$: x est *l'opérateur de multiplication par* e_1.
2. Calculez $x(\mathrm{e}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Calculez x^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. Soit $p \in \mathbb{C}[t]$ un polynôme. Montrez que $p(x)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{T}$ par $t \mapsto p(t)$.
5. Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$.
   a) Pourquoi l'opérateur de multiplication par $f|_{\mathbb{T}}$ est-il borné sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$?
   b) Montrez que $f(x)$ est l'opérateur de multiplication par $f|_{\mathbb{T}}$.
   c) Soit $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ le développement en série entière de f en 0.
      i. Quel rapport y a-t-il entre $f^{(n)}(0)$ et $\widehat{f|_{\mathbb{T}}}(n)$?
      ii. Calculez $\langle (f(x))(\mathrm{e}_n), \mathrm{e}_m\rangle$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.
6. Calculez l'adjoint de x.
7. Est-ce que x est normal ? Est-ce que x est hermitien ? Est-ce que x est unitaire ? Que peut-on en déduire pour le spectre de x ?
8. Montrez que si $\lambda \in \operatorname{spec} x$, alors il existe des éléments v_n de norme 1 dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ tels que $x(v_n) - \lambda v_n \to 0$: λ *est une valeur propre approchée et* (v_n) *est un vecteur propre approché de* x *pour* λ.
9. Si $v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ et $s \in \mathbb{T}$, notons v_s l'élément défini par $v_s(t) = v(st)$ pour presque tout $t \in T$.
   a) Montrez que $\|v_s\| = \|v\|$.
   b) Montrez que $(x(v))_s = sx(v_s)$.
10. Montrez que si λ est valeur spectrale de x, alors tout nombre complexe de module λ est valeur spectrale de x.
11. Calculez le spectre de x.
12. On note $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ formé des éléments v tels que $\hat{v}(n) = 0$ pour $n \leqslant -1$: $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ est un *espace de Hardy.*
    a) Montrez que $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. On note P la projection orthogonale de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ sur $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$.
    b) Montrez que $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$.
    c) Notons $B\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ l'opérateur défini par $B((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\mathrm{e}_n$. Quel est l'inverse de B ?

13. Montrez que $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ est stable par x. Notons $y = x|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T})}$ la restriction de x à $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$.
14. Décrivez l'opérateur $B^{-1} \circ y \circ B$ (c'est-à-dire *la matrice de y pour la base* $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)
15. Calculez l'adjoint de y.
16. Est-ce que y est normal ? Est-ce que y est hermitien ? Est-ce que y est unitaire ? Peut-on en déduire des informations sur le spectre de y ?
17. Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$.
    a) Montrez que $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ est stable par $f(x)$.
    b) Calculez $f(y)$.
    c) Soit $\sum a_n z^n$ le développement en série entière de f en 0. Décrivez la matrice de $f(y)$ pour la base $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Contrôle continu en théorie des opérateurs du 30 mai 2006

Problème. Soit A une algèbre de Banach complexe munie d'une unité u. Soit $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction exponentielle : elle admet comme développement en série entière en 0

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Comme exp est une fonction entière, on peut définir e^x pour tout $x \in A$ par le calcul fonctionnel holomorphe et on a

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Le but de ce problème est de déterminer les éléments $x \in A$ tels que $\mathrm{e}^x = u$.

1. Rappelez quels sont les nombres complexes z tels que $\mathrm{e}^z = 1$.
2. Soit x un idempotent de A : on a $x^2 = x$. Calculez $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x}$.
3. Soient x et y deux éléments de A tels que $xy = yx$.
   a) Montrez que $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$.
   b) Montrez que e^x est inversible.
   c) Montrez qu'il existe une fonction entière f non nulle en 0 telle que $\mathrm{e}^z - 1 = zf(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   d) En déduire que $\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x y f(y)$.
   e) Supposons que $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y = u$. Que vaut e^{x+y} ?
4. Soit $n \geqslant 1$ et soit x un élément de A dont le spectre est la réunion de n parties compactes disjointes $K_1, \ldots, K_n$.
   a) Montrez qu'il existe des ouverts disjoints $T_1, \ldots, T_n$ tels que T_l est un voisinage de K_l pour chaque $l \in \{1, \ldots, n\}$.
   b) Pourquoi les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies sur $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ par

   $$f_l(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in T_l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour chaque } l \in \{1, \ldots, n\}$$

   sont-elles holomorphes dans T ? Calculez $f_1 + \cdots + f_n$ et $f_l f_m$ pour $(l, m) \in \{1, \ldots, n\}^2$.
   c) Posons $\mathrm{e}_l = f_l(x)$ pour chaque $l \in \{1, \ldots, n\}$. Montrez que ce sont des idempotents associés au sens que $\mathrm{e}_l^2 = \mathrm{e}_l$ pour chaque $l \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{e}_1 + \cdots + \mathrm{e}_n = u$ et $\mathrm{e}_l\mathrm{e}_m = 0$ pour $l \neq m$.
   d) Soit $\phi\colon \mathscr{C}\{1, \ldots, n\} \to A$ l'application définie par $\phi(g) = g(1)\mathrm{e}_1 + \cdots + g(n)\mathrm{e}_n$.
      i. Montrez que ϕ est un morphisme d'algèbres de Banach unifères.
      ii. Rappelez quel est le spectre d'un élément $g \in \mathscr{C}\{1, \ldots, n\}$.
      iii. Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Montrez que $\operatorname{spec} z_1\mathrm{e}_1 + \cdots + z_n\mathrm{e}_n = \{z_1, \ldots, z_n\}$ et que pour toute fonction h holomorphe au voisinage de $\{z_1, \ldots, z_n\}$ on a

      $$h(z_1\mathrm{e}_1 + \cdots + z_n\mathrm{e}_n) = h(z_1)\mathrm{e}_1 + \cdots + h(z_n)\mathrm{e}_n.$$

   e) Supposons que pour chaque $l \in \{1, \ldots, n\}$, K_l est le singleton $\{z_l\}$ et soit $\tilde{x} = z_1\mathrm{e}_1 + \cdots + z_n\mathrm{e}_n$.

i. Trouvez une fonction h holomorphe au voisinage de $\operatorname{spec} x$ telle que $\tilde{x} - x = h(x)$.
ii. Montrez que $\operatorname{spec}(\tilde{x} - x) = \{0\}$.
iii. A-t-on en général $\tilde{x} = x$? Motivez votre réponse.

5. Soit $x \in A$ tel que $\mathrm{e}^x = u$.
   a) Que peut-on dire du spectre de x ?
   b) Pourquoi le spectre de x est-il un ensemble fini ? Soit n son cardinal et notons $z_1, \dots, z_n$ ses éléments, et posons $K_l = \{z_l\}$ pour chaque $l \in \{1, \dots, n\}$.
   c) En utilisant les notations de la question 4, soit $\tilde{x} = z_1 \mathrm{e}_1 + \dots + z_n \mathrm{e}_n$. Nous voulons montrer que $\tilde{x} = x$. Soit $y = \tilde{x} - x$.
      i. Calculez $\mathrm{e}^{\tilde{x}}$.
      ii. Utilisez la question 4.e.ii pour montrer que $f(y)$ est inversible, où f est la fonction de la question 3.c.
      iii. Déduisez-en que $y = 0$.
6. Caractérisez les éléments $x \in A$ tels que $\mathrm{e}^x = u$. (Vous pourrez utiliser les questions 2, 3.e et 5.c.)
7. Voici une autre démarche pour la question 2. Soit x un idempotent de A et soit $\psi \colon \mathbb{C} \to A$ l'application définie par $\psi(\lambda) = \lambda x$.
   a) Montrez que ψ est un morphisme d'algèbres.
   b) Montrez que pour toute fonction holomorphe h au voisinage de $\{0\} \cup \operatorname{spec} x$ nulle en 0 on a $h(x) = h(1)x$.
   c) Appliquez ce résultat avec $h \colon z \mapsto \mathrm{e}^z - 1$.
8. Soit $A = \mathscr{M}_2$ l'algèbre des matrices 2×2.
   a) Déterminez deux idempotents x et y de A tels que $xy \neq yx$.
   b) Est-ce que $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(x+y)} = \mathrm{Id}$?

Examen terminal en théorie des opérateurs du 26 juin 2006

1. Soit E un espace de Banach et $y \in \mathscr{B}(E)$. On note $y' \in \mathscr{B}(E')$ l'opérateur transposé de y défini par $y'(l) = l \circ y$ pour tout $l \in E'$. Si S est une partie de E, on note $S^\perp = \{l \in E' : \forall v \in S\ l(v) = 0\}$. Si S est une partie de E', on note $S_\perp = \{v \in E : \forall l \in S\ l(v) = 0\}$.
   a) Quel rapport y a-t-il $\ker y$ et $\operatorname{im} y'$? Démontrez-le.
   b) Quel rapport y a-t-il $\ker y'$ et $\operatorname{im} y$? Démontrez-le.
   c) Montrez que si y est surjectif, alors y' est injectif.
   d) Montrez que si y' est injectif, alors y est d'image dense.
2. Soit A une algèbre de Banach munie d'une unité u et soit $x \in A$. Soit y l'opérateur de multiplication à gauche par x défini par $y(v) = xv$ pour tout $v \in A$.
   a) Montrez que $y \in \mathscr{B}(A)$ et calculez $\|y\|$.
   b) On note A^{-1} l'ensemble des éléments inversibles de A. Montrez que A^{-1} contient la boule ouverte de centre u et de rayon 1.
   c) Supposons que y' est injectif. On veut montrer que y est surjectif.
      i. Montrez que l'image de y contient un élément inversible.
      ii. Montrez que y est surjectif.
3. Soit $A = (\ell^1(\mathbb{Z}), +, *)$ l'algèbre de Banach unifère des séries bi-infinies complexes absolument convergentes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, munie de la norme définie par $\|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|$ et du produit de convolution défini par

$$(x * v)_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i v_{n-i} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_{n-j} v_j = \sum_{i+j=n} x_i v_j. \tag{g.1}$$

   La transformée de Fourier de $x \in A$ est la fonction $\hat{x} \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ définie par $\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n t^n$. Si $x \in A$, on note $\check{x}$ l'élément défini par $\check{x}_n = x_{-n}$. L'application

$$\begin{aligned} \ell^\infty(\mathbb{Z}) &\to A' \\ l &\mapsto \Big(\langle l, \cdot\rangle : x \mapsto \langle l, x\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n x_n\Big) \end{aligned}$$

   est une isométrie surjective qui permet d'identifier le dual de A avec l'espace de Banach $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.
   a) Rappelez quelle est l'unité u de A.
   b) Montrez que $x*v$ est un élément de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ bien défini par l'équation (g.1) lorsque $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $v \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.
   c) Soit $x \in A$ et y l'opérateur de convolution par x défini par $y(v) = x * v$ pour tout $v \in A$.
      i. Montrez que y est surjectif si et seulement si x est inversible.
      ii. Montrez que si x est inversible, alors y est injectif.
      iii. On s'intéresse à la réciproque : on veut savoir si x est inversible lorsque y est injectif.
         – Montrez que si x est inversible, alors $\hat{x}$ ne s'annule pas. Que pensez-vous de la réciproque ?

– Montrez que si le noyau de y contient un élément v non nul, alors $\hat{x}$ s'annule sur une partie de $\mathbb{T}$ d'intérieur non vide. Que pensez-vous de la réciproque ?
– Montrez par un exemple que y peut être injectif sans être surjectif.

iv. Montrez que y' est l'opérateur de convolution par $\check{x}$ défini par $y'(l) = \check{x} * l$ pour tout $l \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.

d) Soit $x \in A$ et T l'opérateur de convolution par x défini par $T(l) = x*l$ pour tout $l \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.

i. Montrez que T est l'opérateur transposé d'un opérateur $y \in \mathscr{B}(A)$ que l'on déterminera.

ii. Montrez que T est surjectif si et seulement si x est inversible.

iii. Montrez que si x est inversible, alors T est injectif.

iv. Montrez que si T est injectif, alors x est inversible.

v. On a donc montré sans utiliser la théorie de Gelfand que si x n'est pas inversible, alors il existe $l \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ telle que $x * l = 0$. Comment le théorème de Wiener-Lévy permet-il de démontrer directement que si x n'est pas inversible, alors il existe une suite l bi-infinie de nombres complexes de module 1 telle que $x * l = 0$?

Table des matières