Ensembles uniformément répartis et ensembles $\Lambda(p)$

Stefan Neuwirth

1 Introduction

Cet exposé traite de deux classes de sous-ensembles $E \subseteq \mathbb{Z}$: la première provient de la théorie des nombres et indique que E est suffisamment grand et irrégulier ; la deuxième provient de l'analyse de Fourier classique et indique que E est lacunaire. Plaçons-nous dans le cadre suivant :

■ $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ est le cercle unité muni de sa mesure de Haar m et $\mathbb{Z}$ son groupe dual des entiers. On notera, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}_n(t) = t^n$ les caractères de $\mathbb{T}$. Le cardinal de $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ est noté $|\Lambda|$. On note $c_0(\mathbb{T})$ l'espace des suites sur $\mathbb{T}$ qui tendent vers 0 hors d'ensembles finis. En particulier, ces suites ont un support dénombrable.

■ Pour un espace X de fonctions intégrables sur $\mathbb{T}$ et $E \subseteq \mathbb{Z}$, X_E est l'espace des fonctions de X à spectre dans E : $X_E = \left\{f \in X : \widehat{f}(n) = \int \mathrm{e}_{-n} f \, dm = 0 \text{ si } n \notin E\right\}$.

■ Nous utiliserons la notation de Hardy : $u_n \preccurlyeq v_n$ (resp. $u_n \ll v_n$) s'il existe (resp. si pour tout) $C > 0$ on a $|u_n| \le C|v_n|$ au voisinage de $+\infty$.

Définition 1 *Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$.*

(i) (*Voir [20, §7].*) *Λ est un ensemble uniformément réparti si, lorsqu'on l'ordonne en une suite $\Lambda = (\lambda_k)_{k\ge1}$ de valeur absolue $|\lambda_k|$ croissante,*

$$f_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}_{\lambda_k}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1 & \textit{si } t = 1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Si f_n tend ponctuellement vers une fonction qui définit un élément de $c_0(\mathbb{T})$, alors $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ est dit uniformément réparti au sens large.

(ii) (*Voir [19, définition 1.5].*) *Soit $p > 0$. Λ est un ensemble $\Lambda(p)$ si, pour un — ou de manière équivalente si, pour tout — $0 < r < p$, $L^p_\Lambda(\mathbb{T})$ et $L^r_\Lambda(\mathbb{T})$ coïncident :*

$$\exists\, C_r \quad \forall f \in L^p_E(\mathbb{T}) \qquad \|f\|_r \le \|f\|_p \le C_r\|f\|_r.$$

En particulier, Λ est un ensemble $\Lambda(p)$ pour tout p si les espaces $L^p_\Lambda(\mathbb{T})$ coïncident pour $p < \infty$.

À titre d'exemple, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont uniformément répartis, les suites arithmétiques, l'ensemble des carrés ([20, th. 9]) et l'ensemble des nombres premiers (Vinogradov) sont uniformément répartis au sens large. Mais il existe des suites de pas borné qui ne sont pas uniformément répartis au sens large ([7, th. 11]). La suite géométrique $\{3^k\}$, ainsi que plus généralement $\{3^{k_1} + \cdots + 3^{k_j}\}$ pour $j \ge 1$ sont $\Lambda(p)$ pour tout p ([16, th. IV.3]) mais ne sont pas uniformément répartis au sens large ([7, th. 14]).

Toutefois ces deux classes se rencontrent, comme le note Li :

Théorème 2 ([13]) *Il existe un ensemble uniformément réparti et à la fois $\Lambda(p)$ pour tout p.*

La preuve de ce théorème passe par la construction aléatoire suivante, découverte par Erdős [5, 6] et introduite en analyse harmonique par Katznelson et Malliavin [11, 12].

Construction 3 *Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ et considérons des sélecteurs ξ_λ d'espérance δ_λ ($\lambda \in \Lambda$), c.-à-d. des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$ telles que $\mathbb{P}[\xi_\lambda = 1] = \delta_\lambda$. Alors l'ensemble aléatoire Λ' est défini par*

$$\Lambda' = \{\lambda \in \Lambda : \ \xi_\lambda = 1\}.$$

Le premier ingrédient de cette preuve est le théorème suivant de Bourgain.

Théorème 4 ([3, Prop. 8.2(i)]) *Soit $\Lambda = \mathbb{N}$ dans la construction 3. Si δ_λ décroît avec λ alors que $\delta_\lambda \gg \lambda^{-1}$, alors Λ' est uniformément réparti presque sûrement.*

Le deuxième ingrédient est un résultat annoncé sans preuve par Katznelson.

Assertion 5 ([10, §2]) *Posons $I_k =]n_{k-1}, n_k]$ avec $n_k > n_{k-1}^2$ $(k \geq 1)$. Soit $\Lambda = \mathbb{N}$ dans la construction 3. Il existe un choix de (ℓ_k) avec $\ell_k \gg \log n_k$ tel qu'en posant $\delta_\lambda = \ell_k/|I_k|$ pour $\lambda \in I_k$, Λ' est $\Lambda(p)$ pour tout p presque sûrement.*

Li [13] propose d'appliquer la technique de l'assertion 5 avec $n_k = 2^k$ et $\ell_k = k$: alors $\delta_\lambda \gg \lambda^{-1}$ et le théorème 2 dérive du théorème 4.

Dans la suite de l'exposé, je généraliserai les résultats de Katznelson et Li par une démonstration nouvelle qui permet de construire Λ' dans des ensembles Λ à croissance polynomiale (voir définition 8) et d'obtenir un critère optimal sur (ℓ_k). Puis je montrerai une généralisation du théorème 4 qui donne

Théorème 6 *Soit Λ uniformément réparti (resp. au sens large) et à croissance polynomiale. Alors il existe un sous-ensemble $\Lambda' \subseteq \Lambda$ uniformément réparti (resp. au sens large) et à la fois $\Lambda(p)$ pour tout p.*

Nous pouvons à présent répondre à une question de Li :

Corollaire 7 *Soit S l'ensemble des carrés et P celui des nombres premiers. Pour chacun de ces deux ensembles, il existe un sous-ensemble Λ' uniformément réparti au sens large et à la fois $\Lambda(p)$ pour tout p. En particulier (cf. [15, lemme 4]), Λ' n'est pas un ensemble de Rosenthal : $\mathscr{C}_{\Lambda'}(\mathbb{T}) \neq L^\infty_{\Lambda'}(\mathbb{T})$ alors que tous les espaces $L^p_{\Lambda'}(\mathbb{T})$ coïncident pour $p < \infty$.*

2 Suites à croissance polynomiale

Définition 8 *Soit $\Lambda = (\lambda_k)_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{Z}$ ordonné par valeur absolue croissante et $\phi(n) = |E \cap [-n, n]|$ sa fonction de répartition.*

(i) *Λ est dit à croissance polynomiale s'il existe $1 \leq d < \infty$ tel que $\lambda_k \preccurlyeq k^d$. Cela revient à imposer que $\phi(n) \succcurlyeq n^\varepsilon$ pour $\varepsilon = d^{-1}$.*

(ii) *Λ est dit à croissance polynomiale régulière s'il existe $c > 1$ tel que $|\lambda_{\lceil ck \rceil}| \leq 2|\lambda_k|$ pour k grand. Cela revient à imposer que $\phi(2n) \geq c\phi(n)$ pour n grand.*

En particulier, les suites polynomiales et, par le théorème de Hadamard et de la Vallée Poussin, la suite des nombres premiers, sont à croissance polynomiale régulière.

Démonstration. *(i)* Si $|\lambda_k| \leq Ck^d$ pour k grand et que $Ck^d \leq n < C(k+1)^d$, alors $\phi(n) \geq k > (n/C)^\varepsilon - 1$. Si $\phi(n) \geq cn^\varepsilon$ pour n grand et que $c(n-1)^\varepsilon < k \leq cn^\varepsilon$, alors $|\lambda_k| \leq n < (k/c)^d + 1$.

(ii) Si $|\lambda_{\lceil ck \rceil}| \leq 2|\lambda_k|$ pour k grand et que k est maximal tel que $|\lambda_k| \leq n$, alors $\phi(2n) \geq \phi(2|\lambda_k|) \geq ck = c\phi(n)$. Si $\phi(2n) \geq c\phi(n)$ pour n grand, alors $\phi(|\lambda_k|) \in \{k, k+1\}$ et $\phi(2|\lambda_k|) \geq ck$. Donc $|\lambda_{\lceil ck \rceil}| \leq 2|\lambda_k|$. ∎

(ii) implique *(i)* ; la réciproque est fausse comme le montre $E = \bigcup]2^{2^{2k}}, 2^{2^{2k}+1}]$, qui vérifie $\phi(n) \succcurlyeq n^{1/4}$ tandis que $\phi(2n) = \phi(n)$ infiniment souvent. Donc ici, croissance polynomiale régulière de Λ veut dire que cette suite est répartie régulièrement vis-à-vis de la partition annulaire dyadique de $\mathbb{Z}$

$$\mathscr{P} = \big\{[-n_0, n_0], I_k = [-n_k, -n_{k-1}[\cup]n_{k-1}, n_k]\big\}_{k\geq 1} \text{ engendrée par } n_k = 2^k \tag{1}$$

et E montre qu'il existe des suites à croissance polynomiale qui ne sont pas réparties régulièrement vis-à-vis de la partition engendrée par $n_k = 2^{2^k}$. Par contre, la partition encore plus grossière

$$\mathscr{P} = \big\{[-n_0, n_0], I_k = [-n_k, -n_{k-1}[\cup]n_{k-1}, n_k]\big\}_{k\geq 1} \text{ où } \log n_k \gg \log n_{k-1} \tag{2}$$

a une croissance suffisante pour forcer cette régularité ; on pourra considérer $n_k = 2^{2^{2^k}}$. On a

Proposition 9 *Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$, $\{I_k\}$ une partition de $\mathbb{Z}$ et $\Lambda_k = \Lambda \cap I_k$. Alors $\log|\Lambda_k| \succcurlyeq \log|I_k|$ dans les deux cas suivants :*

(i) *si Λ est à croissance polynomiale régulière et $\{I_k\}$ est la partition (1), ou*

(ii) *si Λ est à croissance polynomiale et $\{I_k\}$ est la partition (2).*

Démonstration. (*i*) Il existe donc K et $c > 1$ tels que $\phi(2^k) \geq c\phi(2^{k-1})$ et $\phi(2^k) \geq c'c^k$ pour $k \geq K$ et une constante $c' > 0$. Alors

$$|\Lambda_k| = \phi(2^k) - \phi(2^{k-1}) \geq (1 - c^{-1})\phi(2^k) \geq c'(1 - c^{-1})c^k \succcurlyeq 2^{k \log c}.$$

(*ii*) Donc $n_k^\varepsilon \gg n_{k-1}$ quel que soit $\varepsilon > 0$. Or il existe c et $\varepsilon > 0$ tels que pour k grand

$$|\Lambda_k| = \phi(n_k) - \phi(n_{k-1}) \geq cn_k^\varepsilon - (2n_{k-1} + 1) \succcurlyeq n_k^\varepsilon \succcurlyeq |I_k|^\varepsilon. \qquad \blacksquare$$

3 Ensembles $\Lambda(p)$ pour tout p

Les ensembles $\Lambda(p)$ se décrivent naturellement en terme d'inconditionnalité. Nous utiliserons aussi une propriété combinatoire plus élémentaire que [19, 4.5(b)] : à cette fin, notons Z_s^m l'ensemble de relations arithmétiques

$$\mathrm{Z}_s^m = \big\{\zeta \in \mathbb{Z}^{*m} : \zeta_1 + \cdots + \zeta_m = 0 \text{ et } |\zeta_1| + \cdots + |\zeta_m| \leq 2s\big\}.$$

Notons que Z_s^1 et Z_s^m pour $m > 2s$ sont vides, et que tout $\zeta \in \mathrm{Z}_s^2$ est de la forme $\zeta_1 \cdot (1, -1)$: c'est la relation d'identité.

Définition 10 *Soit $1 \leq p < \infty$, $s \geq 1$ et $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$.*

(i) *(Voir [9].) Λ est une suite basique inconditionnelle dans $L^p(\mathbb{T})$ s'il existe $C < \infty$ telle que*

$$\sup_{\pm} \Big\| \sum_{n\in\Lambda} \pm a_\lambda \mathrm{e}_\lambda \Big\|_p \leq C \Big\| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \mathrm{e}_\lambda \Big\|_p.$$

Si on peut prendre $C = 1$, Λ est une suite basique 1-inconditionnelle dans $L^p(\mathbb{T})$.

(ii) *Λ est s-indépendant si $\sum \zeta_i p_i \neq 0$ pour tous $3 \leq m \leq 2s$, $\zeta \in \mathrm{Z}_s^m$ et $p_1, \ldots, p_m \in \Lambda$ distincts.*

On a alors (cf. [18, prop. 2.5])

Proposition 11 *Soit $1 \leq p < \infty$, $s \geq 1$ entier et $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$.*

(i) *Λ est un ensemble $\Lambda(\max(p, 2))$ si et seulement si Λ est une suite basique inconditionnelle dans $L^p(\mathbb{T})$.*

(ii) *Λ est une suite basique 1-inconditionnelle dans $L^{2s}(\mathbb{T})$ si et seulement si Λ est s-indépendant.*

Introduisons une deuxième notion d'inconditionnalité classique corollaire de la théorie de Littlewood–Paley :

Définition 12 ([8]) *Soit $\mathscr{P} = \{I_k\}$ une partition de $\mathbb{Z}$ en intervalles finis. Alors $\mathscr{P}$ est une partition de Littlewood–Paley si pour tout $1 < p < \infty$ il existe C_p tel que*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{T}) \quad \sup_{\pm} \Big\| \sum \pm f_k \Big\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad \textit{avec } \widehat{f_k} = \begin{cases} \widehat{f} \textit{ sur } I_k \\ 0 \textit{ ailleurs.} \end{cases} \tag{3}$$

Par l'inégalité de Khintchine, ceci veut encore dire que

$$\forall f \in L^p(\mathbb{T}) \quad \|f\|_p \approx \Big\| \Big(\sum |f_k|^2\Big)^{1/2} \Big\|_p.$$

En particulier, la partition dyadique (1) et la partition grossière (2) sont des partitions de Littlewood–Paley [14].

On a donc, par la proposition (11) et par (3)

Proposition 13 *Soit* $\{I_k\}$ *une partition de Littlewood–Paley et* $\Lambda_k \subseteq I_k$*. Si* Λ_k *est* s*-indépendant pour chaque* k*, alors* $\Lambda = \bigcup \Lambda_k$ *est une suite basique inconditionnelle dans* $L^{2s}(\mathbb{T})$ *et forme par conséquent un ensemble* $\Lambda(2s)$*.*

Généralisons à présent l'assertion 5.

Lemme 14 *Soit* $s \geq 2$ *entier,* $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ *fini et* $0 \leq \ell \leq |\Lambda|$*. Soit* $\delta_\lambda = \ell/|\Lambda|$ *dans la construction 3, de sorte que les variables aléatoires indépendantes* ξ_λ *sont équidistribuées. Alors il existe une constante* $C(s)$ *qui ne dépend que de* s *telle que*

$$\mathbb{P}\left[\Lambda' \text{ est } s\text{-dépendant}\right] \leq C(s)\frac{\ell^{2s}}{|\Lambda|}.$$

Démonstration. Il faut calculer la probabilité qu'il existe $3 \leq m \leq 2s$, $\zeta \in \mathrm{Z}_s^m$ et $p_1, \dots, p_m \in \Lambda'$ distincts tels que $\sum \zeta_i p_i = 0$. Comme le nombre $C(s)$ de relations arithmétiques $\zeta \in \mathrm{Z}_s^m$ $(3 \leq m \leq 2s)$ est fini et ne dépend que de s, il suffit de calculer, pour m et $\zeta \in \mathrm{Z}_s^m$ fixés,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\exists p_1, \dots, p_m \in \Lambda' \text{ distincts} : \sum \zeta_i p_i = 0\right] \\
&\quad= \mathbb{P}\left[\exists p_1, \dots, p_{m-1} \in \Lambda' \text{ distincts} : -\zeta_m^{-1}\sum_{i=1}^{m-1}\zeta_i p_i \in \Lambda' \setminus \{p_1, \dots, p_{m-1}\}\right] \\
&\quad= \mathbb{P}\left[\bigcup_{\substack{p_1,\dots,p_{m-1}\\ \in\Lambda' \text{ distincts}}}\left[-\zeta_m^{-1}\sum_{i=1}^{m-1}\zeta_i p_i \in \Lambda' \setminus \{p_1, \dots, p_{m-1}\}\right]\right] \\
&\quad= \mathbb{P}\left[\bigcup_{\substack{p_1,\dots,p_{m-1}\\ \in\Lambda \text{ distincts}}}\left[p_m = -\zeta_m^{-1}\sum_{i=1}^{m-1}\zeta_i p_i \in \Lambda \setminus \{p_i\}_1^{m-1} \text{ et } \xi_{p_1} = \dots = \xi_{p_m} = 1\right]\right]
\end{aligned}$$

L'union ci-dessus porte sur

$$\frac{|\Lambda|!}{(|\Lambda| - m + 1)!} \leq |\Lambda|^{m-1}$$

$(m-1)$-uplets. De plus, l'événement entre petits crochets implique que m variables aléatoires données parmi $(\xi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ valent 1, et a donc une probabilité majorée par $(\ell/|\Lambda|)^m$. Donc

$$\mathbb{P}\left[\Lambda' \text{ est } s\text{-dépendant}\right] \leq C(s)\max_{3\leq m\leq 2s}|\Lambda|^{m-1}\frac{\ell^m}{|\Lambda|^m} \leq C(s)\frac{\ell^{2s}}{|\Lambda|}. \qquad \blacksquare$$

On fait alors la construction aléatoire suivante :

Construction 15 *Soit* $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$*. Soit* $\{I_k\}$ *une partition de Littlewood–Paley et* $\Lambda_k = \Lambda \cap I_k$*. Soit* $(\ell_k)_{k\geq 1}$ *avec* $0 \leq \ell_k \leq |\Lambda_k|$ *et posons*

$$\mathbb{P}\left[\xi_\lambda = 1\right] = \delta_\lambda = \ell_k/|\Lambda_k| \textit{ pour } \lambda \in \Lambda_k$$

dans la construction 3. On pose alors

$$\Lambda'_k = \Lambda' \cap I_k = \{\lambda \in \Lambda_k : \ \xi_\lambda = 1\}.$$

Théorème 16 *Soit* $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ *à croissance polynomiale (resp. régulière) et* $\{I_k\}$ *la partition de Littlewood–Paley grossière (2) (resp. dyadique (1)). Soit la construction 15. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\log \ell_k \ll \log |I_k|$*, c.-à-d.* $\log \ell_k \ll \log n_k$ *(resp.* $\log \ell_k \ll k$*) ;*

(ii) Λ' *est un ensemble* $\Lambda(p)$ *pour tout* p *presque sûrement.*

Démonstration. Notons que par la proposition 9, il existe $\alpha > 0$ tel que $|\Lambda_k| > |I_k|^\alpha$ pour k grand.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Par la proposition 14,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\Lambda'_k \text{ est } s\text{-dépendant}\right] \leq C(s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_k^{2s}}{|\Lambda_k|}.$$

Pour tout $\eta > 0$, $\ell_k \leq |I_k|^\eta$ pour k suffisamment grand. Choisissons $\eta < \alpha/2s$. Mais alors le terme général de la série ci-dessus vérifie

$$\frac{\ell_k^{2s}}{|\Lambda_k|} \leq |I_k|^{2s\eta-\alpha} \text{ pour } k \text{ grand.}$$

Comme $|I_k| \succcurlyeq 2^k$, cette série converge : par le lemme de Borel–Cantelli, Λ'_k est presque sûrement s-indépendant pour k suffisamment grand. Par conséquent, pour chaque entier s, Λ' est presque sûrement union d'un ensemble fini et d'un ensemble $\Lambda(2s)$ par la proposition 13. Par [19, 4.4(a)], Λ' est lui-même un ensemble $\Lambda(2s)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Si Λ' est un ensemble $\Lambda(2s)$, alors, par [19, théorème 3.5] ou plus simplement par [4, (1.12)], il existe C_s tel que $|\Lambda'_k| < C_s|I_k|^{1/s}$. Or $\lim |\Lambda' k|/\ell_k = 1$ presque sûrement par la loi des grands nombres (cf. le lemme 17 suivant) et donc nécessairement $\log \ell_k \ll \log |I_k|$. ■

Remarque De la même manière, il apparaît que la bonne formulation de l'assertion 5 de Katznelson est la suivante. Soit $\Lambda = \mathbb{N}$ et $I_k =]n_{k-1}, n_k]$ avec $n_k > cn_{k-1}$ pour un $c > 1$ dans la construction 15. Alors Λ' est un ensemble $\Lambda(p)$ pour tout p si et seulement si $\log \ell_k \ll \log n_k$.

4 Ensembles uniformément répartis

Nous cherchons à présent à adapter la démonstration du théorème 4 dans [3]. En passant par deux lemmes, nous obtiendrons l'énoncé plus général du théorème 19.

Lemme 17 *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes complexes telles que*

$$|X_i| \leq 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\, X_i = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\,|X_1|^2 + \cdots + \mathbb{E}\,|X_n|^2 \leq \sigma. \tag{4}$$

Alors, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left[|X_1 + \cdots + X_n| \geq a\right] < 4\exp(-a^2/4(\sigma + a)). \tag{5}$$

Démonstration. Il s'agit de la variation de Bennett sur l'inégalité probabiliste de Bernstein [2]. Considérons d'abord le cas d'une variable aléatoire réelle. Par [1, (8b)],

$$\mathbb{P}\left[X_1 + \cdots + X_n \geq a\right] < \exp(a - (\sigma + a)\log(1 + a/\sigma)),$$

et comme $\log(1 - u) \leq -u - u^2/2$ pour $0 \leq u < 1$,

$$\mathbb{P}\left[X_1 + \cdots + X_n \geq a\right] < \exp(-a^2/2(\sigma + a))$$

On en déduit (5) puisque chaque $z \in \mathbb{C}$ vérifie

$$|z| > a \quad \Longrightarrow \quad \min(\Re z, -\Re z, \Im z, -\Im z) > a/\sqrt{2}.$$ ■

Lemme 18 *Soit la construction 3. Notons $\Lambda = (\lambda_k)$ l'arrangement de Λ par valeur absolue croissante et $\sigma_n = \delta_{\lambda_1} + \cdots + \delta_{\lambda_n}$. Si $\sigma_n \gg \log|\lambda_n|$, alors presque sûrement*

$$\psi(n) = \left\| \frac{1}{|\Lambda' \cap \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}|} \sum_{\Lambda' \cap \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}} \mathrm{e}_\lambda - \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\lambda_k} \mathrm{e}_{\lambda_k} \right\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{6}$$

Démonstration. On a $\sum_{\Lambda'\cap\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}} \mathrm{e}_\lambda = \sum_{k=1}^n \xi_{\lambda_k}\mathrm{e}_{\lambda_k}$ et $|\Lambda'\cap\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}| = \sum_{k=1}^n \xi_{\lambda_k}$. Centrons les ξ_λ en posant $f = \sum_{k=1}^n (\xi_{\lambda_k} - \delta_{\lambda_k})\mathrm{e}_{\lambda_k}$. Donc

$$\begin{aligned}\psi(n) &\le \left\| \left(|\Lambda'\cap\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}|^{-1} - \sigma_n^{-1}\right) \sum_{k=1}^n \xi_{\lambda_k}\mathrm{e}_{\lambda_k}\right\|_\infty + \|\sigma_n^{-1} f\|_\infty \\ &\le \sigma_n^{-1}\left|\frac{\delta_{\lambda_1}+\cdots+\delta_{\lambda_n}}{\xi_{\lambda_1}+\cdots+\xi_{\lambda_n}} - 1\right| \sum_{k=1}^n \xi_{\lambda_k} + \sigma_n^{-1}\|f\|_\infty \le 2\sigma_n^{-1}\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Soit $R = \{t\in\mathbb{T} : t^{4|\lambda_n|} = 1\}$ et $u\in\mathbb{T}$ tel que $|f(u)| = \|f\|_\infty$. Soit $t\in R$ à distance minimale de u : alors $|t-u| \le \pi/4|\lambda_n|$. Par le théorème de Bernstein,

$$\|f\|_\infty - |f(t)| \le |f(u) - f(t)| \le |t-u|\,\|f'\|_\infty \le \frac{4}{5}\|f\|_\infty$$

$$\|f\|_\infty \le 5\sup_{t\in R}|f(t)|.$$

(Pour une majoration optimale, voir [17, § I.4, lemme 8].) Comme $|R| = 4|\lambda_n|$ et que, pour chaque $t\in R$, les variables aléatoires $X_k = (\xi_{\lambda_k} - \delta_{\lambda_k})\mathrm{e}_{\lambda_k}(t)$ vérifient (4), on a $\mathbb{P}\,[|f(t)|\ge a] < 4\exp(-a^2/4\sigma_n)$ et

$$\mathbb{P}\,[\|f\|_\infty \ge 5a] \le \mathbb{P}\left[\sup_{t\in R}|f(t)| \ge a\right] < 4|\lambda_n|\cdot 4\exp(-a^2/4\sigma_n).$$

Posons $a_n = (24\sigma_n\log|\lambda_n|)^{1/2}$. Alors $a_n \ll \sigma_n$: soit N tel que $a_n \le \sigma_n$ pour $n \ge N$. Donc

$$\forall n\ge N \qquad \mathbb{P}\,[\|f\|_\infty \ge 5a_n] < 16|\lambda_n|^{-2}$$

et par le lemme de Borel–Cantelli,

$$\sigma_n^{-1}\|f\|_\infty \preccurlyeq a_n/\sigma_n \longrightarrow 0. \qquad \blacksquare$$

Remarque Notons que l'hypothèse du lemme 18 contient implicitement une restriction sur la lacunarité de Λ. Si $\sigma_n \gg \log|\lambda_n|$, alors nécessairement $\log|\lambda_n| \ll n$ et $\phi(n) \gg \log n$. En particulier, Λ ne peut pas être un ensemble de Sidon par [19, (3.6.2)].

Théorème 19 *Soit $\Lambda = (\lambda_k)$ uniformément réparti (resp. au sens large), ordonné par valeur absolue croissante. Soit la construction 3. Posons $\sigma_n = \delta_{\lambda_1} + \cdots + \delta_{\lambda_n}$. On suppose que δ_{λ_k} décroît avec k.*

(i) *Si $\sigma_n \gg \log|\lambda_n|$, alors Λ' est uniformément réparti (resp. au sens large) presque sûrement. C'est le cas notamment lorsque*

(ii) $\delta_{\lambda_n} \gg \dfrac{|\lambda_n| - |\lambda_{n-1}|}{|\lambda_{n-1}|}$ *;*

(iii) *Λ est à croissance polynomiale et $\delta_{\lambda_n} \gg n^{-1}$.*

Démonstration. (*i*) Le lemme 18 montre qu'on a presque sûrement (6). Il suffit donc de montrer que

$$\lim \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^n \delta_{\lambda_k}\mathrm{e}_{\lambda_k} = \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathrm{e}_{\lambda_k},$$

c.-à-d. que la méthode de sommation de matrice $(a_{n,k})$ donnée par

$$a_{n,k} = \begin{cases} \delta_{\lambda_k}/\sigma_n & \text{si } k\le n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

est régulière et plus forte que la méthode C_1 par moyenne arithmétique. En effet, $a_{n,k}\ge 0$, $\sum_k a_{n,k} = 1$ et (cf. [21, § 52, théorème I])

$$\forall n \quad \sum_k k|a_{n,k} - a_{n,k+1}| = \sum_k k(a_{n,k} - a_{n,k+1}) = 1 < \infty.$$

puisque $(a_{n,k})$ décroît avec k pour chaque n.

(*ii*) Dans ce cas, $\delta_{\lambda_n} \gg \log|\lambda_n| - \log|\lambda_{n-1}|$ et donc $\sigma_n \gg \log|\lambda_n|$.

(*iii*) Dans ce cas, $\sigma_n \gg \log n \succcurlyeq \log|\lambda_n|$. $\blacksquare$

Les théorèmes 16 et 19 donnent donc :

Corollaire 20 *Soit Λ uniformément réparti (resp. au sens large) et la construction 15. On suppose que $\ell_k/|\Lambda_k|$ décroît avec k. Alors Λ' est presque sûrement un ensemble uniformément réparti (resp. au sens large) et à la fois $\Lambda(p)$ pour tout p dans les deux cas suivants :*

(**i**) *si Λ est à croissance polynomiale régulière et I_k est la décomposition de Littlewood–Paley dyadique (1) et $1 \ll \log \ell_k \ll k$;*

(**ii**) *si Λ est à croissance polynomiale et I_k est la décomposition de Littlewood–Paley grossière (2) et $\ell_k \gg \log n_{k+1}$ alors que $\log \ell_k \ll \log n_k$. On pourra prendre par exemple $n_k = 2^{2^{2^k}}$ et $\ell_k = \min(2^{2^{k+2}}, |\Lambda_k|)$.*

Démonstration. Dans les deux cas considérés $\log \ell_k \ll \log |I_k|$. Vérifions que les hypothèses du théorème 19 sont vérifiées. Si $\lambda_n \in \Lambda_k \subseteq I_k$, alors $|\lambda_n| \leq n_k$ et

$$\sigma_n \geq \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \delta_\lambda = \ell_1 + \cdots + \ell_{k-1}$$

et dans les deux cas, $\ell_{k-1} \gg \log n_k - \log n_{k-1}$. ∎

Bibliographie

[1] George Bennett – « Probability inequalities for the sum of independent random variables », *J. Amer. Statist. Assoc.* **57** (1962), p. 33–45. (p. 5).

[2] S. N. Bernšteĭn – « On a modification of Chebyshev's inequality and on the deviation in Laplace's formula », Collected Works IV. Theory of probability and mathematical statistics (1911–1946), Nauka, 1964, Russian, p. 71–79. (p. 5).

[3] J. Bourgain – « On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integers », *Israel J. Math.* **61** (1988), no. 1, p. 39–72. (pp. 2 et 5).

[4] — , « On $\Lambda(p)$-subsets of squares », *Israel J. Math.* **67** (1989), no. 3, p. 291–311. (p. 5).

[5] Paul Erdős – « Problems and results in additive number theory », Colloque sur la théorie des nombres (Bruxelles, 1955), Georges Thone, 1956, p. 127–137. (p. 1).

[6] P. Erdős et A. Rényi – « Additive properties of random sequences of positive integers », *Acta Arith.* **6** (1960), p. 83–110. (p. 1).

[7] P. Erdős et S. J. Taylor – « On the set of points of convergence of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences », *Proc. London Math. Soc. (3)* **7** (1957), p. 598–615. (p. 1).

[8] Kathryn E. Hare et Ivo Klemes – « Properties of Littlewood-Paley sets », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **105** (1989), no. 3, p. 485–494. (p. 3).

[9] S. Karlin – « Bases in Banach spaces », *Duke Math. J.* **15** (1948), p. 971–985. (p. 3).

[10] Yitzhak Katznelson – « Suites aléatoires d'entiers », *L'analyse harmonique dans le domaine complexe (Montpellier, 1972)* (E. J. Akutowicz, éd.), Lect. Notes Math. 336, Springer, 1973, p. 148–152. (p. 2).

[11] Yitzhak Katznelson et Paul Malliavin – « Un critère d'analyticité pour les algèbres de restriction », *C. R. Acad. Sci. Paris* **261** (1965), p. 4964–4967. (p. 1).

[12] — , « Vérification statistique de la conjecture de la dichotomie sur une classe d'algèbres de restriction », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **262** (1966), p. A490–A492. (p. 1).

[13] Daniel Li – « A remark about $\Lambda(p)$-sets and Rosenthal sets », *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), p. 3329–3333. (pp. 1 et 2).

[14] J. E. Littlewood et R. E. A. C. Paley – « Theorems on Fourier series and power series », *J. London Math. Soc.* **6** (1931), p. 230–233. (p. 3).

[15] Françoise Lust-Piquard – « Éléments ergodiques et totalement ergodiques dans $L^\infty(\Gamma)$ », *Studia Math.* **69** (1981), no. 3, p. 191–225. (p. 2).

[16] Yves Meyer – « Endomorphismes des idéaux fermés de $L^1(G)$, classes de Hardy et séries de Fourier lacunaires », *Ann. sci. École Norm. Sup. (4)* **1** (1968), p. 499–580. (p. 1).

[17] — , *Algebraic numbers and harmonic analysis*, North-Holland, 1972. (p. 6).

[18] Stefan Neuwirth – « Metric unconditionality and Fourier analysis », *Studia Math.* **131** (1998), p. 19–62. (p. 3).

[19] Walter Rudin – « Trigonometric series with gaps », *J. Math. Mech.* **9** (1960), p. 203–228. (pp. 1, 3, 5 et 6).

[20] Hermann Weyl – « Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins », *Math. Ann.* **77** (1916), p. 313–352. (p. 1).

[21] Karl Zeller – *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer, 1958, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (Neue Folge) 15. (p. 6).