In this file you find the English version starting on the page numbered E1.

Valuative dimension, constructive points of view

This is quasi the same text as in Lombardi H., Neuwirth S. and Yengui I. Valuative dimension, constructive points of view. *Journal of Algebra*, **647**, 206–229, 2024.

We have added the examples $\boxed{\mathsf{vdim} \leqslant 3 \Rightarrow \mathsf{Vdim} \leqslant 3}$ and $\boxed{\mathsf{vdim} \leqslant 4 \Rightarrow \mathsf{Vdim} \leqslant 4}$ in the paragraph "**Proof of the converse inequality**".

We have fixed a typo in Definition 3.6.

Then the French version begins on the page numbered F1.

Dimension valuative, points de vue constructifs

Le lecteur ou la lectrice sera sans doute surprise de l'alternance des sexes ainsi que de l'orthographe du mot 'corolaire', avec d'autres innovations auxquelles elle n'est pas habituée. En fait, nous avons essayé de suivre au plus près les préconisations de l'orthographe nouvelle recommandée, telle qu'elle est enseignée aujourd'hui dans les écoles en France.

Authors

Henri Lombardi, Université de Franche-Comté, CNRS, UMR 6623, LmB, 25000 Besançon, France, henri.lombardi@univ-fcomte.fr
email: `henri.lombardi@univ-fcomte.fr`

Stefan Neuwirth, Université de Franche-Comté, CNRS, UMR 6623, LmB, 25000 Besançon, France, stefan.neuwirth@univ-fcomte.fr
email: `stefan.neuwirth@univ-fcomte.fr`

Ihsen Yengui, Département de mathématiques, Faculté des sciences de Sfax, Université de Sfax, 3000 Sfax, Tunisia.
email: `ihsen.yengui@fss.rnu.tn`

Valuative dimension, constructive points of view

Henri Lombardi, Stefan Neuwirth, Ihsen Yengui

March 21, 2025

Abstract

There are several classical characterisations of the valuative dimension of a commutative ring. Constructive versions of this dimension have been given and proven to be equivalent to the classical notion within classical mathematics, and they can be used for the usual examples of commutative rings. To the contrary of the classical versions, the constructive versions have a clear computational content. This paper investigates the computational relationship between three possible constructive definitions of the valuative dimension of a commutative ring. In doing so, it proves these constructive versions to be equivalent within constructive mathematics.

Keywords: constructive mathematics, valuative dimension of a commutative ring, algorithms, Hilbert programme for abstract algebra.

MSC: 13B40, 13J15, 03F65.

1 Introduction **E2**
Definition and characterisations of the valuative dimension in classical mathematics . . . E3
Basic constructive terminology . . . E4
Valuation rings . . . E5
Dimension of a distributive lattice . . . E5
Krull dimension of a commutative ring . . . E8
Dynamical algebraic structures . . . E9

2 Three constructive definitions of the valuative dimension **E9**
Minimal pp-closure of a reduced ring . . . E9
First constructive approach to the valuative dimension: vdim . . . E11
Second approach: valuative lattice and valuative spectrum, Vdim . . . E12
Third approach: graded monomial order, dimv . . . E14

3 Constructive equivalence of the three constructive definitions **E15**
$\mathsf{vdim} = \mathsf{dimv}$ . . . E15
$\mathsf{vdim} = \mathsf{Vdim}$ in the integral case . . . E16
Proof of the converse inequality . . . E17
$\mathsf{vdim} = \mathsf{Vdim}$ in the general case . . . E21

Bibliography **E23**

1 Introduction

This article is written in Bishop's style of constructive mathematics (Bishop 1967, Bishop and Bridges 1985, Bridges and Richman 1987, Lombardi and Quitté 2021, Mines, Richman, and Ruitenburg 1988, Yengui 2015).

The vocabulary and notation of dynamical algebraic structures will be used when necessary: see Coste, Lombardi, and Roy 2001, Coquand and Lombardi 2006, Lombardi 2006, 2020.

In this paper, we compare the different constructive versions of the valuative dimension found in Coquand 2009, Kemper and Yengui 2020, Lombardi and Quitté 2015, 2021, as well as a constructive version which extends that of Coquand 2009 to the case of a not necessarily integral ring.

The reader who does not know about constructive mathematics in Bishop's style may look up Chapters 1 and 2 of Bishop 1967, its reviews Stolzenberg 1970, Myhill 1972, and the paper Coquand and Lombardi 2006.

When a classical definition or a classical theorem uses abstract notions without computational content, constructive mathematicians try to find what they call a *constructive version* of this definition or theorem. This version has to be equivalent within classical mathematics to the classical one. Moreover, it is necessary that basic classical examples can be dealt with for the constructive version. E.g., the constructive version of a local ring is simply a ring in which, each time the sum of finitely many elements is invertible, one of these elements is invertible.

Definition and characterisations of the valuative dimension in classical mathematics

In classical mathematics, the valuative dimension of an integral ring $\mathbf{R}$ is the maximal length n of a chain of valuation rings $\mathbf{V}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{V}_n = \mathbf{K}$ in the field of fractions $\mathbf{K} = \operatorname{Frac} \mathbf{R}$ which contain $\mathbf{R}$.

The valuative dimension of an arbitrary ring is defined as the upper bound of the valuative dimension of its integral quotients (Cahen 1990).

In classical mathematics, the following equivalences are well known ($\mathsf{Kdim}(\mathbf{R})$ denotes the Krull dimension of the ring $\mathbf{R}$, i.e. the maximal length of a chain of prime ideals in $\mathbf{R}$).

Let us recall that a discrete field is of Krull dimension 0; the dimension of the trivial ring, which has no integral quotient, is by convention equal to -1.

Theorem 1.1. *Let* $\mathbf{R}$ *be a nontrivial commutative integral ring with* $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}(\mathbf{R})$. *The following properties are equivalent.*

1. $\mathbf{R}$ *is of valuative dimension* $\leqslant n$.
2. *For any integer* k *and all* $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{K}$, $\mathsf{Kdim}(\mathbf{R}[x_1, \dots, x_k]) \leqslant n$.
3. *For any integer* k, $\mathsf{Kdim}(\mathbf{R}[X_1, \dots, X_k]) \leqslant n + k$.
4. $\mathsf{Kdim}(\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]) \leqslant 2n$.

Moreover, without supposing $\mathbf{R}$ *to be integral, but supposing it to be nontrivial, Items 1, 3, and 4 are still equivalent.*

The paper Kemper and Yengui 2020, which follows Kemper and Viet Trung 2014, proposes a new further characterisation of the valuative dimension of a commutative ring, inspired by the constructive characterisation of Krull dimension given in Lombardi 2006. The characterisation in Kemper and Yengui 2020 is fully constructive.

We are thus in possession of at least three possible constructive approaches to the valuative dimension of a commutative ring defined within classical mathematics: the one corresponding to Item *1* above, the one corresponding to Items *3* and *4*, and the one proposed by Kemper and Yengui.

We propose in Section 2 to recall the precise constructive definitions concerning these three approaches.

We denote by $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R})$ a constructive definition corresponding to the characterisation given in Item *1* of Theorem 1.1.

We denote by $\mathsf{vdim}(\mathbf{R})$ a constructive definition corresponding to the characterisation given in Item *3* of Theorem 1.1.

We denote by $\mathsf{dimv}(\mathbf{R})$ the constructive definition given by Kemper and Yengui.

These constructive definitions have already been shown to be equivalent to the classical definition within classical mathematics, at least in the case of an integral domain.

In Section 3 we prove constructively the equivalence of these three definitions in all generality.

Basic constructive terminology

A subset P of a set E is said to be *detachable* when the property $x \in P$ is decidable for $x \in E$. In other words, the following rule is satisfied:

- $\vdash x \in P$ **or** $x \notin P$

In order to describe this situation, it is therefore necessary to introduce both the membership predicate and the opposite predicate.

We say that a ring is *integral* (or that it is an *integral domain*) when any element is zero or regular, and that a ring is a *discrete field* when any element is zero or invertible. This does not exclude the trivial ring.

A ring is said to be *without zerodivisor* when the rule

- $xy = 0 \vdash x = 0$ **or** $y = 0$

is satisfied. An integral ring has no zerodivisor. The converse, valid within classical mathematics, is not guaranteed constructively.[1]

Some local versions of the notions of integral ring and ring without zerodivisor are discernible even within classical mathematics.

A ring $\mathbf{R}$ is said to be *locally without zerodivisor* (or a *pf-ring*: "principal ideals are flat") when the following rule is satisfied:

- $ab = 0 \vdash \exists s, t \ (sa = 0, tb = 0, s + t = 1)$

Then in $\mathbf{R}[1/s]$ the element a is zero, and in $\mathbf{R}[1/t]$ the element b is zero.[2]

A ring $\mathbf{R}$ is said to be a *pp-ring* ("principal ideals are projective") if the annihilator $\mathrm{Ann}_{\mathbf{R}}(a)$ of any element a is generated by a (necessarily unique) idempotent, denoted by $1 - e_a$. We have $\mathbf{R} \simeq \mathbf{R}[1/e_a] \times \mathbf{R}/\langle e_a \rangle$. In the ring $\mathbf{R}[1/e_a]$, the element a is regular; in $\mathbf{R}/\langle e_a \rangle$, a is zero.[3] A pp-ring is locally without zerodivisor, but the converse does not hold. Note that we have $e_{ab} = e_a e_b$, $e_a a = a$, and $e_0 = 0$. Pp-rings have a purely equational definition. Suppose indeed that a commutative ring is endowed with a unary law $a \mapsto a^\circ$ which satisfies the following three axioms:

$$a^\circ a = a, \quad (ab)^\circ = a^\circ b^\circ, \quad 0^\circ = 0. \tag{1}$$

Then, for all $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Ann}_{\mathbf{R}}(a) = \langle 1 - a^\circ \rangle$ and a° is idempotent, so that $\mathbf{R}$ is a pp-ring.

Lemma 1.2 (pp-ring splitting lemma)**.** *Consider n elements $x_1, \dots, x_n$ in a pp-ring $\mathbf{R}$. There exists a fundamental system of orthogonal idempotents (e_j) of cardinal 2^n such that in each of the components $\mathbf{R}[1/e_j]$, each x_i is zero or regular.*

---

[1] In constructive mathematics, "or" has its intuitive meaning, i.e. one of the two properties is explicitly valid. From the fact that the ring is without zerodivisor, with an explicit "or", there is no constructive proof that any element is zero or regular, with an explicit "or".

[2] In classical mathematics, elements of a ring can be seen as "functions" defined on the Zariski spectrum. Here we have two basic open sets $\mathrm{D}(s)$ and $\mathrm{D}(t)$ which cover the Zariski spectrum; on the first one $a = 0$, on the second one $b = 0$.

[3] In classical mathematics, we have a partition of the Zariski spectrum into two basic open sets $\mathrm{D}(1 - e_a)$ and $\mathrm{D}(e_a)$; on the first one $a = 0$, on the second one a is regular.

The fact that a pp-ring can be systematically split into two components leads to the following general method. The essential difference with the previous splitting lemma is that we do not know a priori the finite family of elements that will cause the splitting.

Elementary local-global machinery No. 1. *Most algorithms that work with non-trivial integral rings can be modified to work with pp-rings by splitting the ring into two components whenever the algorithm written for integral rings uses the test "is this element zero or regular?". In the first component the element in question is zero, in the second one it is regular.*

We say that an ideal is *prime* if it produces a quotient ring without zerodivisor. This does not exclude the ideal $\langle 1\rangle$. These conventions (adopted in Lombardi and Quitté 2015) do not use negation and avoid some constructively offensive case-by-case reasonings.

Valuation rings

A *valuation ring* $\mathbf{V}$ is a subring of a discrete field $\mathbf{K}$ satisfying the axiom

- $xy = 1 \vdash x \in \mathbf{V}$ **or** $y \in \mathbf{V} \quad (x, y \in \mathbf{K})$

We then say that $\mathbf{V}$ is a *valuation ring of the discrete field* $\mathbf{K}$ and that $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$ is a *valued field*.

A valuation ring is the same as a local Bézout domain, or as an integral ring whose divisibility group is totally ordered.

In a valued field $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$, we say that x divides y and we write $x \mid y$ if there exists a $z \in \mathbf{V}$ such that $xz = y$. We denote by $\Gamma(\mathbf{V})$ (or by Γ if the context is clear) the group $\mathbf{K}^\times/\mathbf{V}^\times$ (noted additively), with the order relation $\leqslant$ induced by the relation $\mid$ on $\mathbf{K}^\times$. We let $\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\infty\}$ (where ∞ is introduced as a maximal element). Under these conditions, the natural application $v\colon \mathbf{K} \to \Gamma_\infty$ is called the *valuation* of the valued field. We have

$$v(xy) = v(x) + v(y), \text{ and } v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y)) \text{ with equality if } v(x) \neq v(y).$$

We also have $\mathbf{V} = \{\, x \in \mathbf{K} \;;\; v(x) \geqslant 0 \,\}$ and $\mathbf{V}^\times = \{\, x \in \mathbf{K} \;;\; v(x) = 0 \,\}$.

Dimension of a distributive lattice

In this paragraph, we explain the constructive definition for the dimension of a distributive lattice. A distributive lattice $\mathbf{T}$ can be seen as the set of compact open subsets of a spectral space, which is called the dual space of $\mathbf{T}$. The definition of this dimension agrees within classical mathematics with the dimension of the dual spectral space, which is also the maximal length of chains of prime ideals in $\mathbf{T}$: see Theorem 1.5.

An *ideal* $\mathfrak{b}$ of a distributive lattice $(\mathbf{T}, \wedge, \vee, 0, 1)$ is a subset that satisfies the conditions

$$\left.\begin{array}{rcl} & & 0 \in \mathfrak{b} \\ x, y \in \mathfrak{b} & \Longrightarrow & x \vee y \in \mathfrak{b} \\ x \in \mathfrak{b},\; z \in \mathbf{T} & \Longrightarrow & x \wedge z \in \mathfrak{b}. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Let us denote by $\mathbf{T}/(\mathfrak{b} = 0)$ the quotient lattice obtained by forcing the elements of $\mathfrak{b}$ to be zero. We can also define the ideals as the kernels of morphisms.

A *principal ideal* is an ideal generated by a single element a: it is denoted by $\downarrow a$ and we have $\downarrow a = \{\, x \in \mathbf{T} \ ; \ x \leqslant a \,\}$. This ideal, endowed with the laws $\wedge$ and $\vee$ from $\mathbf{T}$, is a distributive lattice in which the maximal element is a. The canonical injection $\downarrow a \to \mathbf{T}$ is not a morphism of distributive lattices because the image of a is not equal to 1. On the other hand, the application $\mathbf{T} \to \downarrow a, \ x \mapsto x \wedge a$ is a surjective morphism which endows $\downarrow a$ with the quotient structure of $\mathbf{T}/(a = 1)$.

The notion of *filter* is the opposite notion (i.e. obtained by reversing the order relation) to that of ideal.

The following rule, called *cut*, is particularly important for distributive lattices:

$$(x \wedge a \leqslant b) \ \boldsymbol{\wedge}\ (a \leqslant x \vee b) \implies (a \leqslant b). \tag{3}$$

If $A \in \mathrm{P}_{\mathrm{fe}}(\mathbf{T})$ (the set of finitely enumerated subsets of $\mathbf{T}$), we let

$$\bigvee A := \bigvee\nolimits_{x \in A} x \qquad \text{and} \qquad \bigwedge A := \bigwedge\nolimits_{x \in A} x.$$

We denote by $A \vdash_{\mathbf{T}} B$ the relation defined as follows on the set $\mathrm{P}_{\mathrm{fe}}(\mathbf{T})$:

$$A \vdash_{\mathbf{T}} B \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \bigwedge A \ \leqslant\ \bigvee B.$$

This relation satisfies the following axioms, in which we write x for $\{x\}$ and A, B for $A \cup B$:

$$\begin{array}{rrcll} & x & \vdash & x & (R) \\ \text{if } A \vdash B \text{ then} & A, A' & \vdash & B, B' & (M) \\ \text{if } (A, x \vdash B) \text{ and } (A \vdash B, x) \text{ then} & A & \vdash & B. & (T) \end{array}$$

The relation is said to be *reflexive*, *monotone*, and *transitive*. The third axiom (transitivity) can be seen as a generalisation of Rule (3) and is also called cut.

Definition 1.3. For an arbitrary set S, a relation on $\mathrm{P}_{\mathrm{fe}}(S)$ that is reflexive, monotone, and transitive is called an *entailment relation*.

The following theorem is fundamental. It states that the three axioms of entailment relations are exactly what is needed for the distributive-lattice interpretation to work.

Theorem 1.4 (fundamental theorem of entailment relations, Lorenzen 1951, Cederquist and Coquand 2000)**.** *Let S be a set with an entailment relation $\vdash$ on $\mathrm{P}_{\mathrm{fe}}(S)$. Consider the distributive lattice $\mathbf{T}$ defined by generators and relations as follows: the generators are the elements of S and the relations are*

$$A \ \vdash_{\mathbf{T}} \ B$$

each time $A \ \vdash \ B$. Then, for all A, B in $\mathrm{P}_{\mathrm{fe}}(S)$, we have

$$A \ \vdash_{\mathbf{T}} \ B \implies A \ \vdash \ B.$$

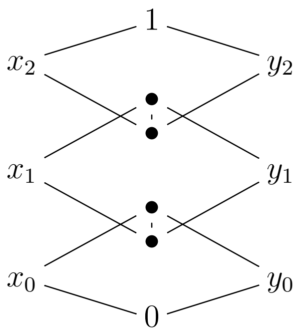
In classical mathematics, a *prime ideal* $\mathfrak{p}$ of a distributive lattice $\mathbf{T} \neq \mathbf{1}$ is an ideal whose complement $\mathfrak{v}$ is a filter (which is then a *prime filter*). We then have $\mathbf{T}/(\mathfrak{p} = 0, \mathfrak{v} = 1) \simeq \mathbf{2}$. It is the same to give a prime ideal of $\mathbf{T}$ or a morphism of distributive lattices $\mathbf{T} \to \mathbf{2}$.

Theorem 1.5 (dimension of a distributive lattice, see Coquand and Lombardi 2003, Lombardi 2002, 2020, Lombardi and Quitté 2015, chapter XIII)**.** *In classical mathematics, the following properties are equivalent for a nontrivial distributive lattice and for $n \geqslant 0$.*

1. *The lattice is of dimension $\leqslant n$, i.e. by definition the length of any chain of prime ideals is $\leqslant n$.*
2. *For any $x \in \mathbf{T}$, the quotient lattice $\mathbf{T}/(x = 0, I_x = 0)$ is of dimension $\leqslant n - 1$, where $I_x = \{\, y \;;\; x \wedge y = 0 \,\}$.*[4]
3. *For any sequence $(x_0, \dots, x_n)$ in $\mathbf{T}$ there exists a sequence $(y_0, \dots, y_n)$ that is* complementary *in the following sense:*

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & \vdash & y_n, x_n \\ y_n, x_n & \vdash & y_{n-1}, x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1, x_1 & \vdash & y_0, x_0 \\ y_0, x_0 & \vdash & 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

For example, for $n = 2$, the inequalities in (4) correspond to the following diagram in $\mathbf{T}$.



Important definition and remark. Items *2* and *3* are equivalent in constructive mathematics and are used for defining the dimension of $\mathbf{T}$, denoted by $\mathsf{Kdim}(\mathbf{T})$ and called *Krull dimension* of the distributive lattice.
Note however that from a constructive point of view, only the assertion "$\mathsf{Kdim}(\mathbf{T}) \leqslant n$" has been clearly defined. In order to settle "$\mathsf{Kdim}(\mathbf{T}) = n$" it would be necessary to prove furthermore $\neg(\mathsf{Kdim}(\mathbf{T}) \leqslant n + 1)$. Fortunately, most classical theorems have an assumption of the form $\mathsf{Kdim}(\mathbf{T}) \leqslant n$. ■

We also have the following constructive result which simplifies the use of Item *3*.

Lemma 1.6. *Let S be a subset of a distributive lattice $\mathbf{T}$ which generates $\mathbf{T}$ as a distributive lattice. In constructive mathematics, for $n \geqslant 0$, the following properties are equivalent.*

1. *For any sequence $(x_0, \dots, x_n)$ in $\mathbf{T}$ there exists a complementary sequence $(y_0, \dots, y_n)$ in $\mathbf{T}$.*

[4] A lattice is said to be of dimension -1 if it is trivial, i.e. reduced to a point; this initialises the induction in Item *2*. It is easy to check that a lattice is zero-dimensional, i.e. of dimension $\leqslant 0$, if, and only if, it is a Boolean algebra.

2. *For any sequence* $(x_0, \ldots, x_n)$ *in* S *there exists a complementary sequence* $(y_0, \ldots, y_n)$ *in* $\mathbf{T}$.

In the two final paragraphs of this section, we explain how spectra of distributive lattices give rise to spectral spaces in abstract algebra. The duality between distributive lattices and spectral spaces has been established by Stone (1937). Hochster (1969) introduces the terminology of spectral spaces and has popularised their use, but neither cites Stone 1937 nor indicates the link between spectral spaces and distributive lattices.

Krull dimension of a commutative ring

We now recall the main idea of the constructive approach of Joyal (1971, 1975) to the spectrum of a commutative ring.

If $\mathfrak{a}$ is an ideal of $\mathbf{R}$, we denote by $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a})$ (or $\mathrm{D}(\mathfrak{a})$ if the context is clear) the nilradical of the ideal $\mathfrak{A}$:

$$\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}) \;=\; \sqrt[\mathbf{R}]{\mathfrak{a}} \;=\; \{\, x \in \mathbf{R} \;;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; x^m \in \mathfrak{a} \,\}. \tag{5}$$

When $\mathfrak{a} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, we denote $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a})$ by $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x_1, \ldots, x_n)$. If the context is clear, we also write $\widetilde{x}$ for $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x)$.

By definition, the *Zariski lattice* of $\mathbf{R}$, denoted by $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$, is the set of $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x_1, \ldots, x_n)$'s with the order relation of inclusion. The greatest lower bound and least upper bound are given by

$$\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_1) \wedge \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_2) \;=\; \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) \quad \text{and} \quad \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_1) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_2) \;=\; \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2).$$

The Zariski lattice of $\mathbf{R}$ is a distributive lattice and $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{x_1} \vee \cdots \vee \widetilde{x_n}$. The elements $\widetilde{x}$ form a system of generators (stable under $\wedge$) of $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$.

If M is the multiplicative monoid in $\mathbf{R}$ generated by $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ and $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ is a finitely generated ideal, we have the equivalences

$$\bigwedge_{i \in \{1,\ldots,m\}} \widetilde{u_i} \;\leqslant_{\mathsf{Zar}(\mathbf{R})}\; \bigvee_{j \in \{1,\ldots,n\}} \widetilde{a_j} \iff \prod_{u \in \{1,\ldots,m\}} u_i \in \sqrt[\mathbf{R}]{\mathfrak{a}} \iff M \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset. \tag{6}$$

This describes completely the distributive lattice $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$. In fact, the first formula in (6) defines an entailment relation on $\mathbf{R}$ which gives another description of $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$.

We also get the following characterisation (see Cederquist and Coquand 2000, Coquand and Lombardi 2003).

Proposition 1.7 (Joyal's definition of the spectrum of a commutative ring)**.**
The lattice $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$ *is (up to unique isomorphism) the lattice generated by the symbols* $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(a)$ *for* $a \in \mathbf{R}$ *subject to the following relations:*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(0_{\mathbf{R}}) = 0,\; \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(1_{\mathbf{R}}) = 1,\; \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x+y) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(y),\; \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(xy) = \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x) \wedge \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(y).$$

The construction $\mathbf{R} \mapsto \mathsf{Zar}(\mathbf{R})$ yields a functor from the category of commutative rings to the category of distributive lattices. Via this functor the projection $\mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(0_{\mathbf{R}})$ gives an isomorphism $\mathsf{Zar}(\mathbf{R}) \to \mathsf{Zar}(\mathbf{R}/\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(0_{\mathbf{R}}))$. We have $\mathsf{Zar}(\mathbf{R}) = \mathbf{1}$ if and only if $1_{\mathbf{R}} = 0_{\mathbf{R}}$.

In classical mathematics there is an easy proof that the dimension of the distributive lattice $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$ is the usual Krull dimension of the ring $\mathbf{R}$.

The Zariski lattice of a ring is the paradigmatic example of a distributive lattice generated by a dynamical algebraic structure. We explain the general method in the following paragraph.

Dynamical algebraic structures

References: Coste, Lombardi, and Roy 2001, Lombardi 1998, 2006, 2020, Bezem and Coquand 2005, Coquand 2005. The (finitary) dynamical algebraic structures are explicitly named in Lombardi 1998, 2006. In Coste, Lombardi, and Roy 2001 they are implicit, but described in the form of their presentations. They are also implicit in Lombardi 2002, and, last but not least, in Della Dora, Dicrescenzo, and Duval 1985 (D5), which has been an essential inspiration: one can compute safely in the algebraic closure of a discrete field even when it is not possible to construct this algebraic closure. It is therefore appropriate to consider the algebraic closure as a dynamical algebraic structure à la D5 rather than as a usual algebraic structure: *lazy evaluation à la D5 provides a constructive semantics for the algebraic closure of a discrete field.*

A more detailed study can be found in Lombardi 2024 (in progress); see also Lombardi and Mahboubi 2023.

A (finitary) dynamical theory $\mathcal{T} = (\mathcal{L}, \mathcal{A})$ is a purely computational version, without logic, of a coherent theory. The language $\mathcal{L}$ is given by a signature; the axioms (elements of $\mathcal{A}$) are dynamical rules.

A *dynamical algebraic structure* $\mathbf{D}$ *for a dynamical theory* $\mathcal{T}$ is given by generators and relations: $\mathbf{D} = \big((G, R), \mathcal{T}\big)$. If (G, R) is the positive diagram of a usual algebraic structure $\mathbf{R}$, we denote this by $\mathbf{D} = \mathcal{T}(\mathbf{R})$.

Let us consider a dynamical algebraic structure $\mathbf{D} = \big((G, R), \mathcal{T}\big)$ for a dynamical theory $\mathcal{T} = (\mathcal{L}, \mathcal{A})$. Let S be a set of closed atomic formulas of $\mathbf{D}$. We define the entailment relation $\vdash$ on S associated with $\mathbf{D}$ as follows for A_i and $B_j \in S$:

$$A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad A_1\,\textsf{,}\,\dots\,\textsf{,}\,A_n \ \vdash_{\mathbf{D}} \ B_1 \ \textsf{or} \ \dots \ \textsf{or} \ B_m. \tag{7}$$

We denote by $\mathsf{Zar}(\mathbf{D}, S)$ the distributive lattice generated by this entailment relation. Intuitively, this lattice is the lattice of truth values of the formulas of S in the dynamical algebraic structure $\mathbf{D}$.

The *(complete) Zariski lattice of a dynamical algebraic structure* $\mathbf{D}$ is defined by taking for S the set $\mathrm{Clat}(\mathbf{D})$ of all closed atomic formulas of $\mathbf{D}$. It is denoted by $\mathsf{Zar}(\mathbf{D}, \mathcal{T})$, or by $\mathsf{Zar}(\mathbf{D})$, or by a particular name corresponding to the theory $\mathcal{T}$.

The dual spectral space is called the Zariski *spectrum of the dynamical algebraic structure* $\mathbf{D}$, or it can also be given a special name.

Finally, the *Krull dimension of* $\mathbf{D}$ is by definition equal to $\mathsf{Kdim}(\mathsf{Zar}(\mathbf{D}))$. The definition of $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R})$ in the second constructive approach to valuative dimension (page E12) is given according to this scheme.

2 Three constructive definitions of the valuative dimension

Minimal pp-closure of a reduced ring

We recall here some essential results given in Lombardi and Quitté 2015. If the context is clear, we denote by $a^\perp$ the annihilator of the element a in $\mathbf{R}$. We also use the notation $\mathfrak{a}^\perp$ for the annihilator of an ideal $\mathfrak{a}$.

Lemma 2.1. *Let* $\mathbf{R}$ *be a reduced ring and* $a \in \mathbf{R}$*. We define*

$$\mathbf{R}_{\{a\}} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{R}/a^\perp \times \mathbf{R}/(a^\perp)^\perp$$

and we denote by $\psi_a\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}_{\{a\}}$ *the canonical homomorphism.*

1. $\psi_a(a)^\perp$ *is generated by the idempotent* $(\overline{0},\widetilde{1})$*; therefore* $\psi_a(a)^\perp = (\overline{1},\widetilde{0})^\perp$.
2. ψ_a *is injective (we hence identify* $\mathbf{R}$ *with a subring of* $\mathbf{R}_{\{a\}}$*).*
3. *Let* $\mathfrak{b}$ *be an ideal in* $\mathbf{R}_{\{a\}}$*; then the ideal* $\psi_a^{-1}(\mathfrak{b}^\perp) = \mathfrak{b}^\perp\cap\mathbf{R}$ *is an annihilator in* $\mathbf{R}$.
4. *The ring* $\mathbf{R}_{\{a\}}$ *is reduced.*

Lemma 2.2. *Let* $\mathbf{R}$ *be reduced and* $a,b\in\mathbf{R}$*. Then, with the notation of Lemma 2.1, the two rings* $(\mathbf{R}_{\{a\}})_{\{b\}}$ *and* $(\mathbf{R}_{\{b\}})_{\{a\}}$ *are canonically isomorphic.*

Note. The case where $ab=0$ is typical: when we meet it, we should like to split the ring into components where things are "clear". The previous construction then gives the three components

$$\mathbf{R}\big/(ab^\perp)^\perp\ ,\ \mathbf{R}\big/(a^\perp b)^\perp\ ,\ \mathbf{R}\big/(a^\perp b^\perp)^\perp\ .$$

In the first one, a is regular and $b=0$; in the second one, b is regular and $a=0$; in the third one, $a=b=0$. ■

Lemma 2.3. *If* $\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$ *with* $\mathbf{C}$ *a pp-ring, the smallest pp-subring of* $\mathbf{C}$ *containing* $\mathbf{R}$ *is equal to* $\mathbf{R}[(e_a)_{a\in\mathbf{R}}]$*, where* e_a *is the idempotent of* $\mathbf{C}$ *such that* $\mathrm{Ann}_{\mathbf{C}}(a)=\langle 1-e_a\rangle_{\mathbf{C}}$*. More generally, if* $\mathbf{R}\subseteq\mathbf{B}$ *with* $\mathbf{B}$ *reduced and if any element* a *of* $\mathbf{R}$ *has an annihilator in* $\mathbf{B}$ *generated by an idempotent* $1-e_a$*, then* $\mathbf{R}[(e_a)_{a\in\mathbf{R}}]$ *is a pp-subring of* $\mathbf{B}$.

Let us denote by $\mathbf{R}_{\mathrm{red}} = \mathbf{R}/\sqrt[\mathbf{R}]{\langle 0\rangle}$ the reduced ring generated by $\mathbf{R}$.

Theorem and definition 2.4 (minimal pp-closure)**.**
Let $\mathbf{R}$ *be a reduced ring. We can define a ring* $\mathbf{R}_{\min}$ *as a filtered colimit by iterating the basic construction of replacing* $\mathbf{E}$ *(the ring "in progress", which contains* $\mathbf{R}$*) by*

$$\mathbf{E}_{\{a\}}\ \stackrel{\mathrm{def}}{=}\ \mathbf{E}\big/a^\perp\times\mathbf{E}\big/(a^\perp)^\perp\ =\ \mathbf{E}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}(a)\times\mathbf{E}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}(\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}(a))$$

when a *runs through* $\mathbf{R}$.

1. *This ring* $\mathbf{R}_{\min}$ *is a pp-ring, it contains* $\mathbf{R}$ *and it is integral over* $\mathbf{R}$.
2. *For any* $x\in\mathbf{R}_{\min}$*,* $x^\perp\cap\mathbf{R}$ *is an annihilating ideal in* $\mathbf{R}$.

This ring $\mathbf{R}_{\min}$ *is called the* minimal pp-closure of $\mathbf{R}$.
When $\mathbf{R}$ *is not necessarily reduced, one takes* $\mathbf{R}_{\min}\stackrel{\mathrm{def}}{=}(\mathbf{R}_{\mathrm{red}})_{\min}$.

We denote by $\mathcal{P}_n$ the set of finite subsets of $\{1,\dots,n\}$. Here is a description of each ring obtained at a finite level of the $\mathbf{R}_{\min}$ construction.

Lemma 2.5. *Let* $\mathbf{R}$ *be a reduced ring and* $(\underline{a})=(a_1,\dots,a_n)$ *a sequence of* n *elements of* $\mathbf{R}$*. For* $I\in\mathcal{P}_n$*, we denote by* $\mathfrak{a}_I$ *the ideal*

$$\mathfrak{a}_I = \big(\prod\nolimits_{i\in I}\langle a_i\rangle^\perp\prod\nolimits_{j\notin I}a_j\big)^\perp = \big(\langle a_i\ ;\ i\in I\rangle^\perp\prod\nolimits_{j\notin I}a_j\big)^\perp.$$

Then $\mathbf{R}_{\min}$ *contains the following ring: the product*

$$\mathbf{R}_{\{\underline{a}\}} = \prod\nolimits_{I\in\mathcal{P}_n}\mathbf{R}/\mathfrak{a}_I$$

of 2^n *quotient rings of* $\mathbf{R}$ *(some possibly zero).*

We denote by $\mathbb{B}(\mathbf{R})$ the Boolean algebra of idempotents of the ring $\mathbf{R}$.

Lemma 2.6.

1. *Let $\mathbf{R}$ be a pp-ring.*
   (a) $\mathbf{R}_{\min} = \mathbf{R}$.
   (b) $\mathbf{R}[X]$ *is a pp-ring, and* $\mathbb{B}(\mathbf{R}) = \mathbb{B}(\mathbf{R}[X])$.
2. *For any ring $\mathbf{R}$ we have a canonical isomorphism*

$$\mathbf{R}_{\min}[X_1, \ldots, X_n] \simeq (\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n])_{\min}.$$

Our suggestion is that the proper generalisation of the notion of the field of fractions of a ring $\mathbf{R}$ is not the ring $\operatorname{Frac}\mathbf{R}$ but the reduced zero-dimensional ring $\operatorname{Frac}\mathbf{R}_{\min}$.

First constructive approach to the valuative dimension: vdim

In the book Lombardi and Quitté 2015, the authors use the notation $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R})$ instead of $\mathsf{vdim}(\mathbf{R})$. In this article, we prefer to reserve this notation for the notion defined by Coquand. So we use vdim for the definition given in the book.

The following definition is constructive because we have a constructive definition of Krull dimension. The subsequent Theorem 2.8 is furthermore proved constructively. So, for the case of an integral domain, it provides a constructive proof for the equivalence of Items *2*, *3* and *4* in the classical Theorem 1.1.

Definition 2.7 (according to Lombardi and Quitté 2015)**.**

1. If $\mathbf{R}$ is a pp-ring, the *valuative dimension* is defined as follows. If $n \in \mathbb{N}$ and $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}\mathbf{R}$, we say that *the valuative dimension of* $\mathbf{R}$ *is less than or equal to* n and we write $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$ if for any sequence $(x_1, \ldots, x_m)$ in $\mathbf{K}$ we have $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_m] \leqslant n$. By convention $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} = -1$ if $\mathbf{R}$ is trivial.
2. In the general case we define "$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$" by "$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R}_{\min} \leqslant n$".[5]

For $n = 0, -1$, we have $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} = n \iff \mathsf{Kdim}\,\mathbf{R} = n$.

We note that, as with the Krull dimension, we have not really defined $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R}$ as an element of $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$: only the property "$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$" is well defined, constructively, for any integer $n \geqslant -1$.

Theorem 2.8 (Lombardi and Quitté 2015, Theorem XIII-8.19)**.** *The following equivalences are valid.*

1. *If $n \geqslant 1$ and $k \geqslant -1$, then*

$$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant k \iff \mathsf{vdim}\,\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] \leqslant n + k. \tag{8}$$

If $\mathbf{R}$ is nontrivial and $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} < \infty$, this means intuitively that we have an equality

$$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] = n + \mathsf{vdim}\,\mathbf{R}.$$

[5]Consider in this footnote $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R}$ as defined in Cahen 1990 and recalled in the introduction. Lombardi and Quitté (2015) show that within classical mathematics $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant d \iff \mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} \leqslant d$. Hence this proves that $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} = \mathsf{Vdim}\,\mathbf{R}_{\min}$ within classical mathematics. This is a way to reduce the general case to the integral case without using prime ideals.

2. *If* $n \geqslant 0$, *then*

$$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \iff \mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[X_1,\dots,X_n] \leqslant 2n. \tag{9}$$

3. *In the case where* $\mathbf{R}$ *is a pp-ring, we also have the equivalence (for* $n \geqslant 0$*)*

$$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \iff \mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[x_1,\dots,x_n] \leqslant n \text{ for all } x_1,\dots,x_n \in \operatorname{Frac}\mathbf{R}.$$

Item 2 is correct within classical mathematics for the valuative dimension Vdim as defined in Cahen 1990.

Second approach: valuative lattice and valuative spectrum, Vdim

First of all let us recall that concerning the dimension of a distributive lattice or of the dual spectral space, there are three constructively equivalent approaches. The historically first one is the one defined by Joyal (1975), taken up in Coquand and Persson 2001 and Coquand 2009. The second one comes from the notion of potential chain of prime ideals of a commutative ring introduced by Lombardi (2006). The third one is based on the notion of "boundary" ideal (or "boundary" filter) and gives rise to a definition by induction. The equivalence of these notions is essentially proven in Coquand and Lombardi 2003 and treated in great detail in Coquand and Lombardi 2018.

In the case of a subring $\mathbf{R}$ of a discrete field $\mathbf{K}$, Coquand (2009) defines the valuative lattice $\mathsf{Val}(\mathbf{K},\mathbf{R})$ as the distributive lattice which translates the valid rules for the predicate Vr (introduced below) in the dynamical theory $\mathcal{Val}(\mathbf{K},\mathbf{R})$ of valuation rings of the field $\mathbf{K}$ with subring $\mathbf{R}$.[6] Finally $\mathsf{Val}(\mathbf{R})$ is an abbreviated notation for the lattice $\mathsf{Val}(\operatorname{Frac}\mathbf{R},\mathbf{R})$.

The dynamical algebraic structure $\mathcal{Val}(\mathbf{K},\mathbf{R})$ can be described as the dynamical theory built on the signature

$$(\cdot = 0, \mathrm{Vr}(\cdot); 0, 1, \cdot + \cdot, -\cdot, \cdot \times \cdot, (a)_{a\in\mathbf{K}})$$

in which the elements of $\mathbf{K}$ are constants of the theory.[7]

First there are the axioms of nontrivial discrete fields over the language of commutative rings.

- $\vdash 0 = 0$
- $x = 0, y = 0 \vdash x + y = 0$
- $1 = 0 \vdash \bot$
- $x = 0 \vdash xy = 0$
- $\vdash x = 0$ **or** $\exists y\, xy = 1$

Then we add the diagram of $\mathbf{K}$:

- $\vdash 0_{\mathbf{K}} = 0$
- $\vdash 1_{\mathbf{K}} = 1$
- $\vdash a + b = c \quad (\text{if } a + b =_{\mathbf{K}} c)$
- $\vdash ab = c \quad (\text{if } ab =_{\mathbf{K}} c)$

Finally there are the axioms describing the properties of the predicate $\mathrm{Vr}(x)$ which means that x belongs to the potential valuation ring of the field $\mathbf{K}$.

[6] Without however using as such the language of dynamical theories.

[7] For the bare dynamical theory, we delete everything concerning $\mathbf{R}$ and $\mathbf{K}$.

- $\vdash \mathrm{Vr}(a) \quad (\text{if } a \in \mathbf{R})$
- $\mathrm{Vr}(x),\ \mathrm{Vr}(y) \ \vdash \mathrm{Vr}(xy)$
- $\mathrm{Vr}(x),\ \mathrm{Vr}(y) \ \vdash \mathrm{Vr}(x+y)$
- $xy = 1 \ \vdash \mathrm{Vr}(x) \ \text{ or } \ \mathrm{Vr}(y)$

The lattice $\mathsf{Val}(\mathbf{K},\mathbf{R})$ is then the distributive lattice generated by the entailment relation $\vdash_{\mathsf{Val},\mathbf{K},\mathbf{R}}$ on $\mathbf{K}^\times$ defined by the equivalence

$$\begin{aligned} &x_1,\dots,x_n \ \vdash_{\mathsf{Val},\mathbf{K},\mathbf{R}} y_1,\dots,y_m \\ \overset{\text{def}}{\iff}\ & \mathrm{Vr}(x_1),\ \dots,\ \mathrm{Vr}(x_n) \ \vdash_{\mathcal{Val}(\mathbf{K},\mathbf{R})} \mathrm{Vr}(y_1) \ \text{ or } \ \dots \ \text{ or } \ \mathrm{Vr}(y_m). \end{aligned} \tag{10}$$

Finally we denote $\mathsf{Val}(\operatorname{Frac}\mathbf{R},\mathbf{R})$ by $\mathsf{Val}(\mathbf{R})$.

In this framework, the valuative dimension of $\mathbf{R}$, which we shall denote by $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R}$, is defined as $\mathsf{Kdim}(\mathsf{Val}(\mathbf{R}))$.

Coquand (2009, Theorem 8) gives a Valuativstellensatz in the form of the following equivalence (for y_i and $x_j \in \mathbf{K}^\times$):

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vr}(x_1),\ \dots,\ \mathrm{Vr}(x_n) \ \vdash_{\mathcal{Val}(\mathbf{K},\mathbf{R})} \mathrm{Vr}(y_1) \ \text{ or } \ \dots \ \text{ or } \ \mathrm{Vr}(y_m) \\ &\qquad\iff\ 1 \in \left\langle y_1^{-1},\dots,y_m^{-1}\right\rangle \mathbf{R}[x_1,\dots,x_n,y_1^{-1},\dots,y_m^{-1}]. \end{aligned}$$

Chasing the denominators gives the following equivalent formulation:

$$\begin{aligned} y_1^{p_1}\cdots y_m^{p_m} = {} & Q(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \text{ with } Q \in \mathbf{R}[X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m] \\ & \text{a polynomial whose monomials have a degree} \\ & \text{in } (Y_1,\dots,Y_m) \text{ strictly less than } (p_1,\dots,p_m). \end{aligned} \tag{11}$$

What happens if we accept that some x_j's or y_i's are possibly zero? Since the rule $\vdash \mathrm{Vr}(0)$ is valid, the rule

- $\mathrm{Vr}(x_1),\ \dots,\ \mathrm{Vr}(x_n) \ \vdash \mathrm{Vr}(y_1) \ \text{ or } \ \dots \ \text{ or } \ \mathrm{Vr}(y_m)$

is always satisfied if one of the y_i's is zero; and if one of the x_j's is zero, it is equivalent to the same rule where we have deleted the corresponding $\mathrm{Vr}(x_j)$ to the left of $\vdash$. The same facts can be observed for the Valuativstellensatz expressed in the form (11): if one of the y_i's is zero, we take $Q = 0$; if one of the x_j's is zero, then it plays no part in (11). Thus the Valuativstellensatz in the form (11) is always valid, which avoids reasoning case by case.

The lattice $\mathsf{Val}\,\mathbf{R}$ can thus be characterised as the distributive lattice generated by the entailment relation $\vdash_{\mathsf{Val}\,\mathbf{R}}$ on $\mathbf{K}$ defined by the equivalence

$$\begin{aligned} x_1,\dots,x_n \vdash_{\mathsf{Val}\,\mathbf{R}} y_1,\dots,y_m \ \overset{\text{def}}{\iff}\ & \exists p_1,\dots,p_m \geqslant 0\ \exists Q \in \mathbf{R}[\underline{X},\underline{Y}]\ \ y_1^{p_1}\cdots y_m^{p_m} = \\ & Q(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m), \text{ the monomials of } Q \\ & \text{of degree in } \underline{Y} \text{ strictly less than } (p_1,\dots,p_m). \end{aligned} \tag{12}$$

To make the calculations to come more readable, we introduce the predicate

$$\mathrm{V}'(x) \ \overset{\text{def}}{\iff}\ \exists u (ux = 1,\ \mathrm{Vr}(u)).$$

In other words, we add a predicate $\mathrm{V}'(x)$ to the signature with the two axioms

- $ux = 1,\ \mathrm{Vr}(u) \ \vdash\ \mathrm{V}'(x)$
- $\mathrm{V}'(x) \ \vdash\ \exists u\ (ux = 1,\ \mathrm{Vr}(u))$

The new theory is a conservative extension of the former one. Moreover we have the following valid rules which allow to compute Vr from V′:

- $\vdash\ \mathrm{Vr}(0)$
- $ux = 1,\ \mathrm{V}'(u) \ \vdash\ \mathrm{Vr}(x)$
- $\mathrm{Vr}(x) \ \vdash\ x = 0$ **or** $\exists u\ (ux = 1,\ \mathrm{V}'(u))$

We can read $\mathrm{V}'(x)$ as $\mathrm{Vr}(1/x)$, where $\mathrm{Vr}(1/0) \ \vdash\ \bot$ (collapse of the theory). The predicate $\mathrm{V}'(x)$ means that the element x of $\mathbf{K}$ is not a residually zero element of $\mathbf{V}$. In particular, this predicate satisfies the following axioms in the dynamical theory considered:

- $\vdash\ \mathrm{V}'(a) \quad (\text{if } a \in \mathbf{R}^{\times})$
- $\mathrm{V}'(0) \ \vdash\ \bot$
- $\mathrm{V}'(x+y) \ \vdash\ \mathrm{V}'(x)$ **or** $\mathrm{V}'(y)$
- $xy = 1 \ \vdash\ \mathrm{V}'(x)$ **or** $\mathrm{V}'(y)$
- $\mathrm{V}'(x),\ \mathrm{V}'(y) \ \vdash\ \mathrm{V}'(xy)$

The Valuativstellensatz becomes, this time without restriction on x_j and $y_i \in \mathbf{K}$,

$$\mathrm{V}'(y_1),\ \dots,\ \mathrm{V}'(y_m) \ \vdash\ \mathrm{V}'(x_1) \ \textbf{or}\ \dots\ \textbf{or}\ \mathrm{V}'(x_n) \\ \iff\ 1 \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle\, \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n, y_1^{-1}, \dots, y_m^{-1}],$$

where the right-hand side must be rewritten in the following form to avoid 0^{-1}:

$$\exists p_1, \dots, p_m\ \exists P_1, \dots, P_n \in \mathbf{R}[\underline{X}, \underline{Y}]\ \ y_1^{p_1} \dots y_m^{p_m} = x_1 P_1(\underline{x}, \underline{y}) + \dots + x_n P_n(\underline{x}, \underline{y}), \\ \text{where the multiexponents of } \underline{Y} \text{ in the } P_j\text{'s are all} \leqslant (p_1, \dots, p_m). \quad (13)$$

If one of the y_i's is zero, the equality is automatically satisfied by taking the P_j's identically zero.

This predicate V′ is the predicate denoted by Nrn in the article Lombardi 2000 which gives a very general Valuativstellensatz.

Remark 2.9. A lattice $\mathsf{Val}'\,\mathbf{R}$ associated to the predicate V′ can be introduced. We can then show that $\mathsf{Val}'\,\mathbf{R}$ is isomorphic to the lattice opposite to $\mathsf{Val}\,\mathbf{R}$. This is because $x \mapsto x^{-1}$ is a bijection of $\mathbf{K}^{\times}$ onto itself. In this article, we only use the fact that the characterisations (11) and (13) are equivalent. ■

We shall introduce the valuative lattice of an arbitrary ring in our very last subsection on page E21.

Third approach: graded monomial order, dimv

We denote by $<_{\mathrm{lex}}$ the monomial order on $\mathbb{Z}^n$ corresponding to the lexicographic order.

A rational monomial graded order $<_M$ on $\mathbb{Z}^n$ or, equivalently, on the monomials of $\mathbf{R}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_1^{\pm 1}]$, is defined by means of a matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{N})$ invertible in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ with the coefficients of the first row all > 0, as follows:

$$(e_1, \dots, e_n) <_M (f_1, \dots, f_n) \ \overset{\mathrm{def}}{\iff}\ M \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} <_{\mathrm{lex}} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

When the coefficients of the first row of M are equal to 1, the monomial order $<_M$ is an order subordinate to total degree. The monomial *graded lexicographic* order $<_{\mathrm{grlex}}$ is the one defined by the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lombardi (2006) characterises constructively the Krull dimension of an arbitrary ring $\mathbf{R}$ by the equivalence between $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$ and the fact that for all $x_0, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ we have a polynomial $P \in \mathbf{R}[X_0, \dots, X_n]$ which vanishes at $(x_0, \dots, x_n)$ and whose trailing coefficient for the lexicographic order is equal to 1. For example, $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{R} \leqslant 1$ if and only if, for all $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$ we can find an equality $0 = x_0^{e_0}(x_1^{e_1}(1 + c_1x_1) + c_0x_0)$: here the c_i's are elements of $\mathbf{R}$ or just as well elements of $\mathbf{R}[x_0, x_1]$.

Kemper and Viet Trung (2014) show, within classical mathematics, that for a noetherian ring one can characterise the Krull dimension in the same way using an arbitrary monomial order.

Kemper and Yengui (2020) show, within classical mathematics, that for an arbitrary ring one can characterise the valuative dimension in the same way, provided one uses a graded rational monomial order instead of the lexicographic order.

In other words, we can paraphrase them by the following definition.

Definition 2.10. We say that $\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant n$ if, considering a graded rational monomial order $<_M$, we have for all $x_0, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ a polynomial $P \in \mathbf{R}[X_0, \dots, X_n]$ which vanishes at $(x_0, \dots, x_n)$ and whose trailing coefficient for the order $<_M$ is equal to 1.

The result in Kemper and Yengui 2020 is then the following.

Theorem 2.11.

1. *This definition of* $\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant n$ *does not depend on the matrix* M *considered.*
2. *It is equivalent within classical mathematics to the fact that the valuative dimension of* $\mathbf{R}$ *is* $\leqslant n$.

By convention $\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} = -1$ means that the ring is trivial.

In fact, the proof of Theorem 2.11 in Kemper and Yengui 2020 is clearly constructive for the case of an integral ring $\mathbf{R}$: for all $n \geqslant 0$ we have constructively the equivalence

$$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \quad \text{(Definition 2.7.1)} \iff \mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant n \quad \text{(Definition 2.10)}. \tag{14}$$

3 Constructive equivalence of the three constructive definitions

vdim = dimv

Let us state a first lemma which extends (14) to the pp-case.

Lemma 3.1. *For a pp-ring* $\mathbf{R}$ *we have the equivalence*

$$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant d \iff \mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant d. \tag{15}$$

Proof. We take the constructive proof of (14) given in the integral case and use the elementary local-global machinery No. 1. □

To extend the constructive equivalence (14) from the case of an integral ring to the case of an arbitrary ring, given that in the general case we have defined $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant d$ as meaning $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R}_{\min} \leqslant d$, and given Lemma 3.1, we need only prove constructively the equivalence

$$\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant d \iff \mathsf{dimv}\,\mathbf{R}_{\min} \leqslant d. \tag{16}$$

In particular, this implies constructively the analogue of Equivalence (9) for dimv.

Equivalence (16) reduces to the following two lemmas.

Lemma 3.2. *We always have*

$$\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant d \iff \mathsf{dimv}\,\mathbf{R}_{\mathrm{red}} \leqslant d. \tag{17}$$

Proof. The proof is left to the reader. □

Lemma 3.3. *Let* $\mathbf{R}$ *be a reduced ring and* $a \in \mathbf{R}$*. Then we have*

$$\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant d \iff \mathsf{dimv}\,\mathbf{R}_{\{a\}} \leqslant d. \tag{18}$$

Proof. The implication $\implies$ is quite simple. On the one hand, the implication

$$\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant d \implies \mathsf{dimv}(\mathbf{R}/\mathfrak{a}) \leqslant d$$

is clear for any quotient $\mathbf{R}/\mathfrak{a}$. And on the other hand we see that

$$\mathsf{dimv}\,\mathbf{B} \leqslant d \text{ and } \mathsf{dimv}\,\mathbf{C} \leqslant d \implies \mathsf{dimv}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \leqslant d.$$

Let us consider the converse implication. Consider $x_0, \dots, x_d \in \mathbf{R}$. We have first of all a polynomial $P_1(X_0, \dots, X_d) \in \mathbf{R}[\underline{X}]$ with trailing coefficient equal to $c_1 = 1 + y_1$ and such that $P_1(x_0, \dots, x_d) = z_1$ with $y_1, z_1 \in a^\perp$. We have moreover a polynomial $P_2(\underline{X})$ with trailing coefficient $c_2 = 1 + y_2$ and such that $P_2(\underline{x}) = z_2$, with $y_2, z_2 \in (a^\perp)^\perp$. We then have

$$y_1y_2 = y_1z_2 = z_1y_2 = z_1z_2 = 0.$$

If we multiply P_1 and P_2 by suitable monomials, we can assume that their trailing monomials coincide. Then $Q_2 = P_2 - y_2P_1$ has trailing coefficient $(1+y_2) - y_2(1+y_1) = 1$ and satisfies $Q_2(\underline{x}) = z_2$. Similarly $Q_1 = P_1 - y_1P_2$ has trailing coefficient $(1+y_1) - y_1(1+y_2) = 1$ and satisfies $Q_1(\underline{x}) = z_1$. So the polynomial Q_1Q_2 suits. □

$\mathsf{vdim} = \mathsf{Vdim}$ in the integral case

Lemma 3.4. *For an integral ring* $\mathbf{R}$*, and for an integer* $n \geqslant -1$*, the following applies:*

$$\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \implies \mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n.$$

Proof. The article Coquand 2009 shows on the one hand that

$$\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \implies \mathsf{Kdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$$

and on the other hand that

$$\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \implies \mathsf{Vdim}\,\mathbf{R}[X] \leqslant n+1.$$

Therefore $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \implies \mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n] \leqslant 2n$. In Lombardi and Quitté 2015 it is shown that $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n] \leqslant 2n \implies \mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$. □

Proof of the converse inequality

We shall prove $\mathsf{vdim} \leqslant n \implies \mathsf{Vdim} \leqslant n$ by constructing complementary sequences, relying on Lemma 1.6. In order to understand the proof, we shall treat first the cases $n = 2, 3, 4$. When $n = 2$, the complementary sequence consists of elements of the form $\mathrm{V}'(y)$. In cases $n = 3$ and $n = 4$ we find new ideas in order construct a complementary sequence in the distributive lattice generated by these elements.

$\boxed{\mathsf{vdim} \leqslant 2 \implies \mathsf{Vdim} \leqslant 2}$

Suppose that we have x_0, x_1, x_2 nonzero in the field of fractions $\mathbf{K}$ of $\mathbf{R}$. We are looking for $y_0, y_1, y_2 \in \mathbf{K}$ (we know that y_2 is zero) such that:

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}'(x_0) \vee \mathrm{V}'(y_0) &= 1, && (19)\\
\mathrm{V}'(x_0) \wedge \mathrm{V}'(y_0) &\leqslant \mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(y_1), && (20)\\
\mathrm{V}'(x_1) \wedge \mathrm{V}'(y_1) &\leqslant \mathrm{V}'(x_2) \vee \mathrm{V}'(y_2) = \mathrm{V}'(x_2) \text{ (since } y_2 = 0), && (21)\\
\mathrm{V}'(x_2) \wedge \mathrm{V}'(y_2) &= 0 \text{ (this is guaranteed by } y_2 = 0).
\end{aligned}$$

(19) amounts to saying that $1 = \langle x_0, y_0\rangle$ in $\mathbf{R}[x_0, y_0]$.
(20) amounts to saying that $1 = \langle x_1, y_1\rangle$ in $\mathbf{R}[x_0^{-1}, y_0^{-1}, x_1, y_1]$.
(21) amounts to saying that $1 = \langle x_2\rangle$ in $\mathbf{R}[x_1^{-1}, y_1^{-1}, x_2]$.
We use the fact that $\mathsf{Kdim}(\mathbf{R}[x_0, x_1, x_2]) \leqslant 2$. We have a polynomial $P \in \mathbf{R}[X_0, X_1, X_2]$ with trailing coefficient 1 (for the lexicographic monomial order with $X_2 > X_1 > X_0$) which vanishes at (x_0, x_1, x_2). Let $X_2^n X_1^m X_0^\ell$ be the trailing monomial of P. Dividing $P(x_0, x_1, x_2)$ by $x_2^n x_1^m x_0^\ell$, we obtain an equality

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_1 f_1(x_1, x_0^{\pm 1}) + x_2 f_2(x_2, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1}) = 0,$$

where $f_0 \in \mathbf{R}[X_0]$, $f_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{\pm 1}]$ and $f_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1^{\pm 1}, X_0^{\pm 1}]$ (the $x_0 f_0(x_0)$ comes from monomials of P other than M whose degree in X_2 is equal to n and whose degree in X_1 is equal to m, $x_1 f_1(x_1, x_0^{\pm 1})$ comes from the other monomials of P whose degree in X_2 is equal to n, while $x_2 f_2(x_2, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1})$ comes from monomials of P whose degree in X_2 is $> n$). For some $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$, we have:

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_0^{r_0}\left(x_1 g_1(x_1, x_0^{-1}) + \frac{x_2}{x_1^{r_1}} g_2(x_2, x_1, x_0^{-1})\right) = 0,$$

where $g_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{-1}]$ and $g_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1, X_0^{-1}]$. We see that $y_0 = \dfrac{1 + x_0 f(x_0)}{x_0^{r_0}}$ and $y_1 = \dfrac{x_2}{x_1^{r_1}}$ suit (note that $x_2 = x_1^{r_1} y_1 \in \mathbf{R}[x_1, y_1] \subseteq \mathbf{R}[x_0^{-1}, y_0^{-1}, x_1, y_1]$).
Let us consider an example of collapse:

$$x_0 x_1^2 x_2^2 + 2x_0^2 x_1^2 x_2^2 + 3x_1^4 x_2^2 + x_0^2 x_1^5 x_2^2 + 3x_2^3 + 2x_1 x_2^3 + x_0^2 x_1^3 x_2^4 = 0.$$

Dividing by $x_0 x_1^2 x_2^2$, we obtain an equality

$$1 + 2x_0^2 + x_0\left(x_1\left(\frac{3x_1}{x_0^2} + x_1^2\right) + \frac{x_2}{x_1^2}\left(\frac{3}{x_0^2} + \frac{2x_1}{x_0^2} + x_2 x_1^3\right)\right) = 0.$$

We see that $y_0 = \dfrac{1 + 2x_0^2}{x_0}$ and $y_1 = \dfrac{x_2}{x_1^2}$ suit.

$\boxed{\mathsf{vdim} \leqslant 3 \implies \mathsf{Vdim} \leqslant 3}$

Let x_0, x_1, x_2, x_3 be nonzero in the field of fractions $\mathbf{K}$ of $\mathbf{R}$. We look for $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ in the distributive lattice generated by the $V'(x)$ which form a complementary sequence of x_0, x_1, x_2, x_3 (see the inequalities in (4)). In other words:

$$1 = V'(x_0) \vee \mathfrak{u}_0,\ V'(x_0) \wedge \mathfrak{u}_0 \leqslant V'(x_1) \vee \mathfrak{u}_1, \dots,\ V'(x_2) \wedge \mathfrak{u}_2 \leqslant V'(x_3) \vee \mathfrak{u}_3,\ V'(x_3) \wedge \mathfrak{u}_3 = 0.$$

We propose to find the $\mathfrak{u}_i$ in the form

$$\mathfrak{u}_0 = \mathrm{V}'(y_0), \mathfrak{u}_1 = \mathrm{V}'(y_1) \wedge \mathrm{V}'(x_0),\ \mathfrak{u}_2 = \mathrm{V}'(y_2),\ \mathfrak{u}_3 = 0$$

with $y_0, y_1, y_2 \in \mathbf{K}$ such that

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}'(x_0) \vee \mathrm{V}'(y_0) &= 1, && (22)\\
\mathrm{V}'(x_0) \wedge \mathrm{V}'(y_0) &\leqslant \mathrm{V}'(x_1) \vee \mathfrak{u}_1 = \big(\mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(y_1)\big) \wedge \big(\mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(x_0)\big) \text{ or also} &&\\
\mathrm{V}'(x_0) \wedge \mathrm{V}'(y_0) &\leqslant \mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(y_1) \text{ and} && (23)\\
\mathrm{V}'(x_0) \wedge \mathrm{V}'(y_0) &\leqslant \mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(x_0), && (24)\\
\mathrm{V}'(x_1) \wedge \mathfrak{u}_1 &\leqslant \mathrm{V}'(x_2) \vee \mathrm{V}'(y_2), && (25)\\
\mathrm{V}'(x_2) \wedge \mathrm{V}'(y_2) &\leqslant \mathrm{V}'(x_3) \vee \mathfrak{u}_3 = \mathrm{V}'(x_3), && (26)\\
\mathrm{V}'(x_3) \wedge \mathfrak{u}_3 &= 0 \text{ (this is guaranteed by } \mathfrak{u}_3 = 0).
\end{aligned}$$

(22) amounts to saying that $1 \in \langle x_0, y_0 \rangle$ in $\mathbf{R}[x_0, y_0]$.
(23) amounts to saying that $1 \in \langle x_1, y_1 \rangle$ in $\mathbf{R}[x_0^{-1}, y_0^{-1}, x_1, y_1]$.
(24) is always satisfied since $\mathrm{V}'(x_0) \wedge \mathrm{V}'(y_0) \leqslant \mathrm{V}'(x_0) \leqslant \mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(x_0)$.
(25) amounts to saying that $1 \in \langle x_2, y_2 \rangle$ in $\mathbf{R}[x_1^{-1}, y_1^{-1}, x_0^{-1}, x_2, y_2]$.
(26) amounts to saying that $1 \in \langle x_3 \rangle$ in $\mathbf{R}[x_2^{-1}, y_2^{-1}, x_3]$.
We use the fact that $\mathsf{Kdim}(\mathbf{R}[x_0, x_1, x_2, x_3]) \leqslant 3$.
We have a polynomial $P \in \mathbf{R}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ with trailing coefficient 1 (for the lexicographic monomial order with $X_3 > X_2 > X_1 > X_0$) which vanishes at (x_0, x_1, x_2, x_3). Let $X_3^n X_2^m X_1^p X_0^q$ be the trailing monomial of P. Dividing $P(x_0, x_1, x_2, x_3)$ by $x_3^m x_2^n x_1^p x_0^q$, we obtain an equality

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_1 f_1(x_1, x_0^{\pm 1}) + x_2 f_2(x_2, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1}) + x_3 f_3(x_3, x_2^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1}) = 0,$$

where $f_0 \in \mathbf{R}[X_0]$, $f_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{\pm 1}]$, $f_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1^{\pm 1}, X_0^{\pm 1}]$ and $f_3 \in \mathbf{R}[X_3, X_2^{\pm 1}, X_1^{\pm 1}, X_0^{\pm 1}]$:

- $x_0 f_0(x_0)$ comes from monomials of P other than M whose degree in X_3 is equal to m, the degree in X_2 is equal to n and the degree in X_1 is equal to p;
- $x_1 f_1(x_1, x_0^{\pm 1})$ comes from the other monomials of P whose degree in X_3 is equal to m and whose degree in X_2 is equal to n;
- $x_2 f_2(x_2, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1})$ comes from the other monomials of P whose degree in X_3 is equal to m;
- $x_3 f_3(x_3, x_2^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1})$ comes from the monomials of P whose degree in X_3 is $> m$.

For some $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$, we have

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_0^{r_0}\big(x_1 g_1(x_1, x_0^{-1}) + x_1^{r_1}\big(x_2 g_2(x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1}) + \frac{x_3}{x_2^{r_2}}\, g_3(x_3, x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1})\big)\big) = 0, \tag{27}$$

where $g_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{-1}]$, $g_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1^{-1}, X_0^{-1}]$, and $g_3 \in \mathbf{R}[X_3, X_2, X_1^{-1}, X_0^{-1}]$.
Let $y_0 = \dfrac{1 + x_0 f_0(x_0)}{x_0^{r_0}}$, $y_1 = \dfrac{y_0 + x_1 g_1(x_1, x_0^{-1})}{x_1^{r_1}}$, $y_2 = \dfrac{x_3}{x_2^{r_2}}$.
Condition (22): $1 = x_0^{r_0} y_0 - x_0 f_0(x_0) \in \langle x_0, y_0\rangle$ in $\mathbf{R}[x_0, y_0]$ (even if $r_0 = 0$).
Condition (23): $y_0 = y_1 x_1^{r_1} - x_1 g_1(x_1, x_0^{-1})$; if $y_0 \neq 0$ we divide by y_0 and we obtain $1 \in \langle x_1, y_1\rangle$ in $\mathbf{R}[x_1, y_1, x_0^{-1}, y_0^{-1}]$.
Condition (26): $y_2 x_2^{r_2} = x_3$ (and we divide by $y_2 x_2^{r_2}$ if $y_2 \neq 0$).
Condition (25): Equality (27) may be rewritten as follows:

$$x_2 g_2(x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1}) + y_2 g_3(y_2 x_2^{r_2}, x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1}) = -y_1.$$

If $y_1 \neq 0$ we divide by y_1.
Moreover, we may also conclude if $y_0 = 0$ or $y_1 = 0$ (see the comment after Equality (13)).

$\boxed{\mathsf{vdim} \leqslant 4 \implies \mathsf{Vdim} \leqslant 4}$

Let x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 be nonzero in the field of fractions $\mathbf{K}$ of $\mathbf{R}$. We look for $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_4$ in the distributive lattice generated by the $V'(x)$ which form a complementary sequence of x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 (see the inequalities in (4)). In other words:

$$1 = V'(x_0) \vee \mathfrak{u}_0, V'(x_0) \wedge \mathfrak{u}_0 \leqslant V'(x_1) \vee \mathfrak{u}_1, \ldots, V'(x_3) \wedge \mathfrak{u}_3 \leqslant V'(x_4) \vee \mathfrak{u}_4, V'(x_4) \wedge \mathfrak{u}_4 = 0.$$

We propose to find the $\mathfrak{u}_i$ in the form

$$\mathfrak{u}_0 = \mathrm{V}'(y_0), \mathfrak{u}_1 = \mathrm{V}'(y_1) \wedge \mathrm{V}'(x_0), \mathfrak{u}_2 = V'(y_2) \wedge V'(x_1) \wedge V'(x_0), \mathfrak{u}_3 = \mathrm{V}'(y_3), \mathfrak{u}_4 = 0$$

with $y_0, y_1, y_2, y_3 \in \mathbf{K}$ such that

$$V'(x_0) \vee V'(y_0) = 1, \tag{28}$$
$$V'(x_0) \wedge V'(y_0) \leqslant V'(x_1) \vee \mathfrak{u}_1, \text{ or also}$$
$$V'(x_0) \wedge V'(y_0) \leqslant V'(x_1) \vee V'(y_1), \tag{29}$$
$$V'(x_1) \wedge \mathfrak{u}_1 \leqslant V'(x_2) \vee \mathfrak{u}_2, \text{ or also}$$
$$V'(x_1) \wedge V'(y_1) \wedge V'(x_0) \leqslant V'(x_2) \vee V'(y_2) \text{ and} \tag{30}$$
$$V'(x_2) \wedge \mathfrak{u}_2 \leqslant V'(x_3) \vee V'(y_3), \tag{31}$$
$$V'(x_3) \wedge V'(y_3) \leqslant V'(x_4) \vee \mathfrak{u}_4 = V'(x_4), \tag{32}$$
$$V'(x_4) \wedge \mathfrak{u}_4 = 0 \text{ (this is guaranteed by } \mathfrak{u}_4 = 0).$$

(28) amounts to saying that $1 \in \langle x_0, y_0\rangle$ in $\mathbf{R}[x_0, y_0]$.
(29) amounts to saying that $1 \in \langle x_1, y_1\rangle$ in $\mathbf{R}[y_0^{-1}, x_0^{-1}, x_1, y_1]$.
(30) amounts to saying that $1 \in \langle x_2, y_2\rangle$ in $\mathbf{R}[y_1^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}, x_2, y_2]$.
(31) amounts to saying that $1 \in \langle x_3, y_3\rangle$ in $\mathbf{R}[y_2^{-1}, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}, x_3, y_3]$.
(32) amounts to saying that $1 \in \langle x_4\rangle$ in $\mathbf{R}[x_3^{-1}, y_3^{-1}, x_4]$.

We use the fact that $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \leqslant 4$. We have a polynomial $P \in \mathbf{R}[X_0, X_1, X_2, X_3, X_4]$ with trailing coefficient 1 (for the lexicographic monomial order with

$X_4 > X_3 > X_2 > X_1 > X_0$) which vanishes at $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Let $X_4^\ell X_3^n X_2^m X_1^p X_0^q$ be the trailing monomial of P. Dividing $P(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ by $x_4^\ell x_3^m x_2^n x_1^p x_0^q$, we obtain an equality

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_1 f_1(x_1, x_0^{\pm 1}) + x_2 f_2(x_2, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1}) + x_3 f_3(x_3, x_2^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1}) \\ + x_4 f_4(x_4, x_3^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1}) = 0,$$

where $f_0 \in \mathbf{R}[X_0]$, $f_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{\pm 1}]$, $f_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1^{\pm 1}, X_0^{\pm 1}]$, $f_3 \in \mathbf{R}[X_3, X_2^{\pm 1}, X_1^{\pm 1}, X_0^{\pm 1}]$, and $f_4 \in \mathbf{R}[X_4, X_3^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}, X_1^{\pm 1}, X_0^{\pm 1}]$:

- $x_0 f_0(x_0)$ comes from monomials of P other than M whose degree in X_4 is equal to ℓ, the degree in X_3 is equal to m, the degree in X_2 is equal to n and the degree in X_1 is equal to p,
- $x_1 f_1(x_1, x_0^{\pm 1})$ comes from the other monomials of P whose degree in X_4 is equal to ℓ, the degree in X_3 is equal to m, the degree in X_2 is equal to n,
- $x_2 f_2(x_2, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1})$ comes from the other monomials of P whose degree in X_4 is equal to ℓ and the degree in X_3 is equal to m,
- $x_3 f_3(x_3, x_2^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1})$ comes from the monomials of P whose degree in X_4 is equal to ℓ,
- $x_4 f_4(x_4, x_3^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1})$ comes from the monomials of P whose degree in X_4 is $> \ell$.

For some $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N}$, we have

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_0^{r_0}\Big(x_1 g_1(x_1, x_0^{-1}) + x_1^{r_1}\Big(x_2 g_2(x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1}) \\ + x_2^{r_2}\big(x_3 g_3(x_3, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}) + \frac{x_4}{x_3^{r_3}}\, g_4(x_4, x_3, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1})\big)\Big)\Big) = 0, \quad (33)$$

where $g_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{-1}]$, $g_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1^{-1}, X_0^{-1}]$, $g_3 \in \mathbf{R}[X_3, X_2^{-1}, X_1^{-1}, X_0^{-1}]$, and $g_4 \in \mathbf{R}[X_4, X_3, X_2^{-1}, X_1^{-1}, X_0^{-1}]$.
Let $y_0 = \dfrac{1 + x_0 f_0(x_0)}{x_0^{r_0}}$, $y_1 = \dfrac{y_0 + x_1 g_1(x_1, x_0^{-1})}{x_1^{r_1}}$, $y_2 = \dfrac{y_1 + x_2 g_2(x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1})}{x_2^{r_2}}$, $y_3 = \dfrac{x_4}{x_3^{r_3}}$.
Condition (28): $1 = x_0^{r_0} y_0 - x_0 f_0(x_0) \in \langle x_0, y_0 \rangle$ in $\mathbf{R}[x_0, y_0]$ (even if $r_0 = 0$).
Condition (29): $y_0 = y_1 x_1^{r_1} - x_1 g_1(x_1, x_0^{-1})$; if $y_0 \neq 0$ we divide by y_0 and we obtain $1 \in \langle x_1, y_1 \rangle$ in $\mathbf{R}[x_1, y_1, x_0^{-1}, y_0^{-1}]$.
Condition (30): $y_1 = y_2 x_2^{r_2} - x_2 g_2(x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1})$; if $y_1 \neq 0$ we divide by y_1 and we obtain $1 \in \langle x_2, y_2 \rangle$ in $\mathbf{R}[y_1^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}, x_2, y_2]$.
Condition (31): Equality (33) reads

$$x_3 g_3(x_3, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}) + y_3 g_4(y_3 x_3^{r_3}, x_3, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}) = -y_2$$

If $y_2 \neq 0$ we divide by y_2 and get that $1 \in \langle x_3, y_3 \rangle$ in $\mathbf{R}[y_2^{-1}, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}, x_3, y_3]$.
Condition (32): $y_3 x_3^{r_3} = x_4$ (and we divide by $y_3 x_3^{r_3}$ if $y_3 \neq 0$).

$\boxed{\mathsf{vdim} \leqslant n \implies \mathsf{Vdim} \leqslant n}$

Let $x_0, \ldots, x_n$ be nonzero in the field of fractions $\mathbf{K}$ of $\mathbf{R}$. We look for $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_n$ in the distributive lattice generated by the $V'(x)$ which form a complementary sequence of $x_0, x_1, \ldots, x_n$. In other words:

$$1 = V'(x_0) \vee \mathfrak{u}_0,\ V'(x_0) \wedge \mathfrak{u}_0 \leqslant V'(x_1) \vee \mathfrak{u}_1, \ldots,\ V'(x_{n-1}) \wedge \mathfrak{u}_{n-1} \leqslant V'(x_n) \vee \mathfrak{u}_n,\ V'(x_n) \wedge \mathfrak{u}_n = 0.$$

We use the fact that $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[x_0, \ldots, x_n] \leqslant n$. We have a polynomial $P \in \mathbf{R}[X_0, \ldots, X_n]$ with trailing coefficient 1 (for the lexicographic monomial order with $X_n > X_{n-1} > \cdots > X_0$) which vanishes at $(x_0, \ldots, x_n)$. Let $X_n^{q_n} \cdots X_0^{q_0}$ be the trailing monomial of P. By dividing $P(x_0, \ldots, x_n)$ by $x_n^{q_n} \cdots x_0^{q_0}$, we obtain an equality

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_1 f_1(x_1, x_0^{\pm 1}) + \ldots + x_n f_n(x_n, x_{n-1}^{\pm 1}, \ldots, x_0^{\pm 1}) = 0,$$

where $f_0 \in \mathbf{R}[X_0]$, $f_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{\pm 1}], \ldots,$ $f_n \in \mathbf{R}[X_n, X_{n-1}^{\pm 1}, \ldots, X_0^{\pm 1}]$.

For some $r_0, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$, we have

$$\begin{aligned} &1 + x_0 f_0(x_0) + x_0^{r_0}\Bigg(x_1 g_1(x_1, x_0^{-1}) + \cdots + x_{n-3}^{r_{n-3}}\Big(x_{n-2} g_{n-2}(x_{n-2}, x_{n-3}^{-1}, \ldots, x_0^{-1}) \\ &+ x_{n-2}^{r_{n-2}}\big(x_{n-1} g_{n-1}(x_{n-1}, x_{n-2}^{-1}, \ldots, x_0^{-1}) + \frac{x_n}{x_{n-1}^{r_{n-1}}}\, g_n(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}^{-1}, \ldots x_0^{-1}) \cdots\big)\Big)\Bigg) = 0, \end{aligned}$$

where $g_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{-1}]$, $\ldots$, $g_{n-1} \in \mathbf{R}[X_{n-1}, X_{n-2}^{-1}, \ldots, X_0^{r}-1]$, $g_n \in \mathbf{R}[X_n, X_{n-1}, X_{n-2}^{-1}, \ldots, X_0^{-1}]$.

Let $y_0 = \dfrac{1 + x_0 f_0(x_0)}{x_0^{r_0}}$, $y_1 = \dfrac{y_0 + x_1 g_1(x_1, x_0^{-1})}{x_1^{r_1}}$, $\ldots$, $y_{n-2} = \dfrac{y_{n-3} + x_{n-2} g_{n-2}(x_{n-2}, x_{n-3}^{-1}, \ldots, x_0^{-1})}{x_{n-2}^{r_{n-2}}}$, $y_{n-1} = \dfrac{x_n}{x_{n-1}^{r_{n-1}}}$.

It is then sufficient to take $\mathfrak{u}_0 = V'(y_0)$, $\mathfrak{u}_1 = V'(y_1) \wedge V'(x_0)$, $\mathfrak{u}_2 = V'(y_2) \wedge V'(x_1) \wedge V'(x_0)$, $\ldots$, $\mathfrak{u}_{n-2} = V'(y_{n-2}) \wedge V'(x_{n-3}) \wedge \cdots \wedge V'(x_0)$, $\mathfrak{u}_{n-1} = V'(y_{n-1})$, and $\mathfrak{u}_n = 0$.

vdim = Vdim in the general case

We note that when $\mathbf{R}$ is a pp-ring, the ring $\mathrm{Frac}(\mathbf{R})$ is a reduced zero-dimensional ring. Moreover a discrete field is a reduced zero-dimensional ring in which any idempotent is equal to 0 or 1.

We then start with the following remark which follows from the elementary local-global machinery No. 1.

Lemma 3.5. *Let* $\mathbf{R}$ *be a pp-ring. Let us define* $\mathsf{Val}(\mathbf{R}) := \mathsf{Val}(\mathrm{Frac}(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ *and* $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R}) := \mathsf{Kdim}(\mathsf{Val}(\mathbf{R}))$ *as in* (10) *by replacing* $\mathbf{K}$ *by* $\mathrm{Frac}(\mathbf{R})$*. Then we obtain the equality* $\mathsf{vdim}(\mathbf{R}) = \mathsf{Vdim}(\mathbf{R})$ *as in the integral case.*

In the remainder of this paragraph, we do not give proofs: we refer to the general study Lombardi and Mahboubi 2023.

We define a dynamical theory *val* as follows. We consider the signature

$$(\cdot \,|\, \cdot ; \cdot + \cdot, \cdot \times \cdot, - \cdot, 0, 1).$$

The axioms are as follows.

Col$_{\mathsf{val}}$ $0 \mid 1 \vdash \bot$ (collapse)

av1 $\vdash 1 \mid -1$

av2 $a \mid b \vdash ac \mid bc$

Av1 $a \mid b, b \mid c \vdash a \mid c$

Av2 $a \mid b, a \mid c \vdash a \mid b + c$

AV1 $\vdash a \mid b$ **or** $b \mid a$

AV2 $ax \mid bx \vdash a \mid b$ **or** $0 \mid x$

The equality $x = 0$ is defined as an abbreviation for $x \mid 0$.

Definition 3.6.

1. If $\mathbf{R}$ is a commutative ring, the dynamical algebraic structure $\mathcal{val}(\mathbf{R})$ is obtained by taking as presentation the positive diagram of the ring $\mathbf{R}$.

2. If $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{R}$ are two rings,[8] or more generally if $\varphi\colon \mathbf{k} \to \mathbf{R}$ is an algebra, we denote by $\mathcal{val}(\mathbf{R}, \mathbf{k})$ the dynamical algebraic structure whose presentation is given by

   - the positive diagram of $\mathbf{R}$ as a commutative ring;
   - the axioms $\vdash 1 \mid \varphi(x)$ for the elements x of $\mathbf{k}$.

The two dynamical algebraic structures $\mathcal{val}(\mathbf{R})$ and $\mathcal{val}(\mathbf{R}, \mathbf{Z})$, where $\mathbf{Z}$ is the smallest subring of $\mathbf{R}$, are canonically isomorphic.

Definition 3.7. Let $\mathbf{k}$ be a subring of a ring $\mathbf{R}$. We define the distributive lattice $\mathsf{val}(\mathbf{R}, \mathbf{k})$ through the entailment relation $\vdash_{\mathbf{R},\mathbf{k},\mathrm{val}}$ on the set $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ given by the following equivalence.

$$\begin{array}{rl} & (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \ \vdash_{\mathbf{R},\mathbf{k},\mathrm{val}} \ (c_1, d_1), \dots, (c_m, d_m) \\ \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} & a_1 \mid b_1, \dots, a_n \mid b_n \ \vdash_{\mathcal{val}(\mathbf{R},\mathbf{k})} \ c_1 \mid d_1 \ \textbf{or} \ \dots \ \textbf{or} \ c_m \mid d_m. \end{array} \tag{34}$$

The following result can be proved.

Lemma 3.8. *Let $\mathbf{R}$ be an integral ring with field of fractions $\mathbf{K}$. We have natural morphisms $\mathsf{Val}(\mathbf{K}, \mathbf{R}) \to \mathsf{val}(\mathbf{K}, \mathbf{R})$ and $\mathsf{val}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathsf{val}(\mathbf{K}, \mathbf{R})$. These are isomorphisms.*

The following definition is therefore reasonable. We shall see that it coincides with the one given in Lemma 3.5 in the case of pp-rings.

Definition 3.9. Let $\mathbf{R}$ be an arbitrary commutative ring. We define $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R}) \leqslant n$ by $\mathsf{Kdim}(\mathsf{val}(\mathbf{R}, \mathbf{R})) \leqslant n$.

This dimension coincides with the one already defined when $\mathbf{R}$ is integral. But it is not in general equal to the dimension of the lattice $\mathsf{val}(\mathrm{Frac}(\mathbf{R}), \mathbf{R})$.

From our point of view, this means that $\mathrm{Frac}(\mathbf{R}_{\min})$ is a much better substitute than $\mathrm{Frac}(\mathbf{R})$ for the field of fractions when $\mathbf{R}$ is not an integral ring. In fact $\mathbf{R}_{\min}$ coincides with $\mathrm{Frac}(\mathbf{R})$ only for pp-rings.

Finally, we can prove the following theorem.

[8] We use $\mathbf{k}$ as notation for the small ring in order to invoke the intuition provided by the frequent situation where $\mathbf{k}$ is a discrete field.

Theorem 3.10. *The distributive lattices*

$$\mathsf{val}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ and } \mathsf{val}(\mathbf{R}_{\min},\mathbf{R}_{\min}) \simeq \mathsf{val}(\mathrm{Frac}(\mathbf{R}_{\min}),\mathbf{R}_{\min})$$

have the same Krull dimension.

With Lemma 3.5 and Definitions 3.6 and 3.9 this completes the work.

Note. We could have defined $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R}) = \mathsf{Vdim}(\mathbf{R}_{\min})$ directly without using the theory $\mathcal{val}$, but this would have been an ad hoc definition, because $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R})$ has no direct natural definition for an arbitrary ring if we use only the theory $\mathcal{Val}$.

Bibliography

Marc Bezem and Thierry Coquand. Automating coherent logic. In Geoff Sutcliffe and Andrei Voronkov, editors, *Logic for programming, artificial intelligence, and reasoning: 12th international conference, LPAR 2005, Montego Bay, Jamaica, December 2–6, 2005: proceedings*, Lecture Notes in Computer Science, 3835, pages 246–260. Berlin: Springer, 2005. doi:10.1007/11591191_18. E9

Errett Bishop. *Foundations of constructive analysis*. McGraw-Hill, New York, 1967. E2, E25

Errett Bishop and Douglas Bridges. *Constructive analysis*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 279. Springer-Verlag, Berlin, 1985. doi:10.1007/978-3-642-61667-9. E2

Douglas Bridges and Fred Richman. *Varieties of constructive mathematics*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 97. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. doi:10.1017/CBO9780511565663. E2

Paul-Jean Cahen. Construction B, I, D et anneaux localement ou résiduellement de Jaffard. *Arch. Math.*, 54(2):125–141, 1990. doi:10.1007/BF01198107. E3, E11, E12

Jan Cederquist and Thierry Coquand. Entailment relations and distributive lattices. In Samuel R. Buss, Petr Hájek, and Pavel Pudlák, editors, *Logic Colloquium '98: proceedings of the annual European summer meeting of the Association for symbolic logic, held in Prague, Czech Republic, August 9–15, 1998*, Lecture Notes in Logic, 13, pages 127–139. Association for Symbolic Logic, Urbana, 2000. E6, E8

Thierry Coquand. A completeness proof for geometrical logic. In Petr Hájek, Luis Valdés-Villanueva, and Dag Westerståhl, editors, *Logic, methodology and philosophy of science: proceedings of the twelth international congress: Oviedo, Spain, August 2003*, pages 79–89. London: King's College Publications, 2005. E9

Thierry Coquand. Space of valuations. *Ann. Pure Appl. Logic*, 157(2–3):97–109, 2009. doi:10.1016/j.apal.2008.09.003. E2, E12, E13, E16

Thierry Coquand and Henri Lombardi. Hidden constructions in abstract algebra: Krull dimension of distributive lattices and commutative rings. In Marco Fontana, Salah-Eddine Kabbaj, and Sylvia Wiegand, editors, *Commutative ring theory and applications: proceedings of the fourth international conference (Fez, 2001)*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 231, pages 477–499. Dekker, New York, 2003. arXiv:1801.00097. E7, E8, E12

Thierry Coquand and Henri Lombardi. A logical approach to abstract algebra. *Math. Structures Comput. Sci.*, 16(5):885–900, 2006. doi:10.1017/S0960129506005627. E2

Thierry Coquand and Henri Lombardi. Constructions cachées en algèbre abstraite : dimension de Krull, Going up, Going down. Technical report, Laboratoire de mathématiques de Besançon, Université de Franche-Comté, 2018. arXiv:1712.04728. Update of a preprint from 2001. E12

Thierry Coquand and Henrik Persson. Valuations and Dedekind's Prague theorem. *J. Pure Appl. Algebra*, 155(2-3):121–129, 2001. doi:10.1016/S0022-4049(99)00095-X. E12

Michel Coste, Henri Lombardi, and Marie-Françoise Roy. Dynamical method in algebra: effective Nullstellensätze. *Ann. Pure Appl. Logic*, 111(3):203–256, 2001. doi:10.1016/S0168-0072(01)00026-4. E2, E9

Jean Della Dora, Claire Dicrescenzo, and Dominique Duval. About a new method for computing in algebraic number fields. In Bob F. Caviness, editor, *EUROCAL '85. European conference on computer algebra, Linz, Austria, April 1–3, 1985: proceedings. Vol. 2: research contributions*, Lecture Notes in Computer Science, 204, pages 289–290. Springer, Berlin, 1985. E9

M. Hochster. Prime ideal structure in commutative rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 142: 43–60, 1969. doi:10.2307/1995344. E8

André Joyal. Spectral spaces and distributive lattices. *Notices Amer. Math. Soc.*, 18(2): 393–394, 1971. https://www.ams.org/journals/notices/197102/197102FullIssue.pdf. E8

André Joyal. Les théorèmes de Chevalley-Tarski et remarques sur l'algèbre constructive. *Cah. Topol. Géom. Différ.*, 16(3):256–258, 1975. http://www.numdam.org/item/CTGDC_1975__16_3_217_0. E8, E12

Gregor Kemper and Ngo Viet Trung. Krull dimension and monomial orders. *J. Algebra*, 399:782–800, 2014. doi:10.1016/j.jalgebra.2013.10.005. E3, E15

Gregor Kemper and Ihsen Yengui. Valuative dimension and monomial orders. *J. Algebra*, 557:278–288, 2020. doi:10.1016/j.jalgebra.2020.04.017. E2, E3, E15

Henri Lombardi. Relecture constructive de la théorie d'Artin-Schreier. *Ann. Pure Appl. Logic*, 91(1):59–92, 1998. doi:10.1016/S0168-0072(97)80700-2. E9

Henri Lombardi. Une généralisation du Positivstellensatz pour les corps valués algébriquement clos. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(5):345–348, 2000. doi:10.1016/S0764-4442(00)01637-2. E14

Henri Lombardi. Dimension de Krull, Nullstellensätze et évaluation dynamique. *Math. Z.*, 242(1):23–46, 2002. doi:10.1007/s002090100305. E7, E9

Henri Lombardi. Structures algébriques dynamiques, espaces topologiques sans points et programme de Hilbert. *Ann. Pure Appl. Logic*, 137(1–3):256–290, 2006. doi:10.1016/j.apal.2005.05.023. E2, E3, E9, E12, E15

Henri Lombardi. Spectral spaces versus distributive lattices: a dictionary. In Alberto Facchini, Marco Fontana, Alfred Geroldinger, and Bruce Olberding, editors, *Advances in rings, modules and factorizations: selected papers based on the presentations at the international conference on rings and factorizations, Graz, Austria, February 19–23, 2018*, Springer proceedings in mathematics & statistics, 321, pages 223–245. Cham: Springer, 2020. doi:10.1007/978-3-030-43416-8_13. E2, E7, E9

Henri Lombardi. Théories géométriques pour l'algèbre constructive. http://hlombardi.free.fr/TGM.pdf, 2024. E9

Henri Lombardi and Assia Mahboubi. Valuative lattices and spectra. In Jean-Luc Chabert, Marco Fontana, Sophie Frisch, Sarah Glaz, and Keith Johnson, editors, *Algebraic, number theoretic, and topological aspects of ring theory*, pages 275–341. Springer, Cham, 2023. doi:10.1007/978-3-031-28847-0_17. E9, E21

Henri Lombardi and Claude Quitté. *Commutative algebra: constructive methods. Finite projective modules*. Algebra and applications, 20. Springer, Dordrecht, 2015. arXiv:1605.04832. Translated from the French (Calvage & Mounet, Paris, 2011, revised and extended by the authors) by Tania K. Roblot. E2, E5, E7, E9, E11, E16

Henri Lombardi and Claude Quitté. *Algèbre commutative. Méthodes constructives. Modules projectifs de type fini. Cours et exercices.* Paris: Calvage & Mounet, 2021. Second revised and extended edition of the book published in 2011. E2

Paul Lorenzen. Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände. *J. Symb. Logic*, 16:81–106, 1951. http://www.jstor.org/stable/2266681. Translation by Stefan Neuwirth: *Algebraic and logistic investigations on free lattices*, arXiv:1710.08138. E6

Ray Mines, Fred Richman, and Wim Ruitenburg. *A course in constructive algebra*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1988. doi:10.1007/978-1-4419-8640-5. E2

John Myhill. Review of Bishop 1967. *J. Symb. Logic*, 37(4):744–747, 1972. http://www.jstor.org/stable/2272421. E2

Gabriel Stolzenberg. Review of Bishop 1967. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76:301–323, 1970. doi:10.1090/S0002-9904-1970-12455-7. E2

M. H. Stone. Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics. *Časopis Pěst. Mat. Fys.*, 67(1):1–25, 1937. doi:10.21136/CPMF.1938.124080. E8

Ihsen Yengui. *Constructive commutative algebra: projective modules over polynomial rings and dynamical Gröbner bases.* Lecture Notes in Mathematics, 2138. Springer, Cham, 2015. doi:10.1007/978-3-319-19494-3. E2

Dimension valuative, points de vue constructifs

Henri Lombardi, Stefan Neuwirth, Ihsen Yengui

21 mars 2025

Résumé

Il existe plusieurs caractérisations de la dimension valuative d'un anneau commutatif. Des versions constructives de cette dimension ont été proposées, et démontrées équivalentes à la notion classique dans le cadre des mathématiques classiques. Contrairement aux version classiques, les versions constructives ont un contenu calculatoire clair et elles peuvent être utilisées dans les cas usuels d'anneaux commutatifs. Cet article étudie les relations en termes de calculs explicites entre trois définitions constructives qui ont été proposées. De cette manière ces trois versions sont prouvées équivalentes directement en mathématiques constructives.

Keywords : Mathématiques constructives, dimension valuative d'un anneau commutatif, algorithmes, programme de Hilbert pour l'algèbre abstraite.

MSC : 13B40, 13J15, 03F65

1 Introduction **F2**
Définition et propriétés caractéristiques de la dimension valuative en mathématiques classiques . . . F3
Terminologie constructive de base . . . F4
Domaines de valuation . . . F5
Dimension des treillis distributifs . . . F5
Dimension de Krull d'un anneau commutatif . . . F8
Structures algébriques dynamiques . . . F9

2 Trois définitions constructives de la dimension valuative **F10**
Clôture quasi intègre minimale d'un anneau réduit . . . F10
Première approche constructive de la dimension valuative : vdim . . . F11
Deuxième approche : treillis valuatif et spectre valuatif, Vdim . . . F12
Troisième approche : ordre monomiaux rationnels gradués, dimv . . . F15

3 Équivalence constructive des trois définitions constructives **F17**
vdim = dimv . . . F17
vdim = Vdim dans le cas intègre . . . F18
vdim = Vdim dans le cas général . . . F22

Bibliographie **F24**

1 Introduction

Cet article est écrit dans le style des mathématiques constructives à la Bishop (Bishop (1967), Bishop et Bridges (1985), Bridges et Richman (1987), Lombardi et Quitté (2021), Mines *et al.* (1988), Yengui (2015)).

On utilisera quand c'est nécessaire le vocabulaire et les notations des structures algébriques dynamiques. Voir Coste *et al.* (2001), Coquand et Lombardi (2006), Lombardi (2006, 2020).

Nous comparons dans cet article les différentes versions constructives de la dimension valuative que l'on trouve dans Coquand (2009), Kemper et Yengui (2020), Lombardi et Quitté (2015, 2021), ainsi qu'une version constructive qui étend celle de (Coquand 2009, Coquand) au cas d'un anneau non nécessairement intègre.

Le lecteur qui ne connait pas les mathématiques constructives dans le style de Bishop peut consulter les chapitres 1 et 2 de Bishop 1967, l'article Coquand et Lombardi 2006 et les recensions Myhill 1972 and Stolzenberg 1970.

Quand une définition ou un théorème classiques utilisent des notions abstraites sans contenu calculatoire, nous essayons en mathématiques constructives de trouver ce que nous appelons une *version constructive* de cette définition ou de ce théorème. Cette version doit être équivalente en mathématiques classiques à la version classique. De plus il est nécessaire que les exemples de base usuels puissent être traités avec la version constructive. Par exemple la version constructive d'un anneau local est simplement un anneau dans lequel, lorsqu'une somme finie d'éléments est inversible, l'un des termes de la somme doit être inversible.

Définition et propriétés caractéristiques de la dimension valuative en mathématiques classiques

En mathématiques classiques, la dimension valuative d'un anneau intègre $\mathbf{R}$ est la longueur maximum n d'une chaine d'anneaux de valuation $\mathbf{V}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{V}_n = \mathbf{K}$ du corps de fractions $\mathbf{K} = \operatorname{Frac} \mathbf{R}$ qui contiennent $\mathbf{R}$.

La dimension valuative d'un anneau arbitraire est définie comme la borne supérieure des dimensions valuatives de ses quotients intègres (Cahen (1990)).

En mathématiques classiques, les équivalences suivantes sont bien connues (on note $\mathsf{Kdim}(\mathbf{R})$ la dimension de Krull de l'anneau $\mathbf{R}$, i.e. la longueur maximale d'une chaine d'idéaux premiers dans $\mathbf{R}$).

Rappelons qu'un corps discret est de dimension de Krull 0, que la dimension de l'anneau trivial, qui n'a pas de quotient intègre, est par convention égale à -1.

Théorème 1.1. *Soit $\mathbf{R}$ un anneau commutatif intègre non trivial avec $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}(\mathbf{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$\mathbf{R}$ est de dimension valuative $\leqslant n$.*
2. *Pour tout entier k et tous $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{K}$, $\mathsf{Kdim}(\mathbf{R}[x_1, \dots, x_k]) \leqslant n + k$.*
3. *Pour tout entier k, $\mathsf{Kdim}(\mathbf{R}[X_1, \dots, X_k]) \leqslant n + k$.*
4. *$\mathsf{Kdim}(\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]) \leqslant 2n$.*

En outre, sans supposer $\mathbf{R}$ intègre, mais en le supposant non trivial, les points 1, 3 et 4 sont toujours équivalents.

Enfin, dans l'article Kemper et Yengui (2020), qui fait suite à (Kemper et Viet Trung 2014, Kemper & Trung), une nouvelle caractérisation constructive de la dimension valuative d'un anneau commutatif est proposée, inspirée de la caractérisation constructive de la dimension de Krull donnée dans Lombardi (2006).

Nous sommes donc en possession d'au moins trois approches possibles de la dimension valuative d'un anneau commutatif en mathématiques classiques. Celle correspondant au point *1* ci-dessus, celle correspondant aux points *3* et *4* et celle proposée par Kemper et Yengui.

Nous proposons dans la section 2 de rappeler des définitions constructives précises concernant ces trois approches.

Nous notons $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R})$ une définition constructive correspondant à la caractérisation donnée dans le point *1* du théorème 1.1.

Nous notons $\mathsf{vdim}(\mathbf{R})$ une définition constructive correspondant à la caractérisation donnée dans le point *3* du théorème 1.1.

Nous notons $\mathsf{dimv}(\mathbf{R})$ la définition constructive donnée par Kemper et Yengui.

Ces définitions constructives ont déjà été démontrées équivalentes à la définition classique en mathématiques classiques, au moins dans le cas d'un anneau intègre. Dans la section 3 nous démontrons <u>constructivement</u> l'équivalence de ces trois définitions en toute généralité.

Terminologie constructive de base

Une partie P d'un ensemble E est dite *détachable* lorsque la propriété $x \in P$ est décidable pour les $x \in E$. Autrement dit, la règle suivante est satisfaite :

- $\vdash x \in P$ **ou** $x \notin P$.

Pour décrire cette situation, il faut donc introduire à la fois le prédicat d'appartenance et le prédicat opposé.

Nous disons qu'un anneau est *intègre* (ou est un domaine d'intégrité), lorsque tout élément est nul ou régulier, et qu'un anneau est un *corps discret* lorsque tout élément est nul ou inversible. Cela n'exclut pas l'anneau trivial.

Un anneau est dit *sans diviseur de zéro* lorsque la règle

- $xy = 0 \vdash x = 0$ **ou** $y = 0$

est satisfaite. Un anneau intègre est sans diviseur de zéro. La réciproque, valable en mathématiques classiques, n'est pas assurée constructivement[1].

Certaines versions locales des notions d'anneau intègre et d'anneau sans diviseur de zéro sont discernables y compris en mathématiques classiques.

Un anneau est dit *localement sans diviseur de zéro*[2] lorsque, la règle suivante est satisfaite

- $ab = 0 \vdash \exists s, t\ (sa = 0, tb = 0, s + t = 1)$.

Alors, dans $\mathbf{R}[1/s]$ l'élément a est nul, et dans $\mathbf{R}[1/t]$ l'élément b est nul[3].

Un anneau est dit *quasi intègre*[4] si l'annulateur de tout élément a est engendré par un idempotent (nécessairement unique), noté $1 - e_a$. On a $\mathbf{R} \simeq \mathbf{R}[1/e_a] \times \mathbf{R}/\langle e_a \rangle$. Dans l'anneau $\mathbf{R}[1/e_a]$, l'élément a est régulier, et dans $\mathbf{R}/\langle e_a \rangle$, a est nul[5]. Un anneau quasi intègre est localement sans diviseur de zéro mais la réciproque n'est pas valable. Notons que l'on a $e_{ab} = e_a e_b$, $e_a a = a$ et $e_0 = 0$. Les anneaux quasi intègres ont une définition purement équationnelle. Supposons en effet qu'un anneau commutatif soit muni d'une loi unaire $a \mapsto a^\circ$ qui vérifie les trois axiomes suivants :

$$a^\circ a = a, \quad (ab)^\circ = a^\circ b^\circ, \quad 0^\circ = 0 \tag{1}$$

Alors, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Ann}(a) = \langle 1 - a^\circ \rangle$ et a° est idempotent, de sorte que l'anneau est quasi intègre.

Lemme 1.2 (lemme de scindage quasi intègre)**.** *Soient n éléments $x_1, \ldots, x_n$ dans un anneau quasi intègre $\mathbf{R}$. Il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux (e_j) de cardinal 2^n tel que dans chacune des composantes $\mathbf{R}[1/e_j]$, chaque x_i est nul ou régulier.*

1. En mathématiques constructives, « ou » a son sens intuitif, *i.e.* l'une des deux propriétés est valide de manière explicite. Sachant d'un anneau est sans diviseur de zéro avec un « ou » explicite, il n'y a pas de démonstration constructive que tout élément est nul ou régulier avec un « ou » explicite.
2. En anglais, un « pf-ring » : les idéaux principaux sont plats.
3. En mathématiques classiques, les éléments d'un anneau peuvent être vus comme des « fonctions » définies sur le spectre de Zariski. Ici nous avons deux ouverts de base $\mathrm{D}(s)$ et $\mathrm{D}(t)$ qui recouvrent le spectre de Zariski ; sur le premier $a = 0$, sur le second $b = 0$.
4. En anglais, un « pp-ring » : les idéaux principaux sont projectifs.
5. En mathématiques classiques nous avons une partition du spectre de Zariski en deux ouverts de base $\mathrm{D}(1 - e_a)$ et $\mathrm{D}(e_a)$; sur le premier $a = 0$, sur le second a est régulier.

Le fait de pouvoir scinder systématiquement en deux composantes un anneau quasi intègre conduit à la méthode générale suivante. La différence essentielle avec le lemme de scindage précédent est que l'on ne connait pas à priori la famille finie d'éléments qui va provoquer le scindage.

Machinerie locale-globale élémentaire n°1. *La plupart des algorithmes qui fonctionnent avec les anneaux intègres non triviaux peuvent être modifiés de manière à fonctionner avec les anneaux quasi intègres, en scindant l'anneau en deux composantes chaque fois que l'algorithme écrit pour les anneaux intègres utilise le test «cet élément est-il nul ou régulier ?». Dans la première composante l'élément en question est nul, dans la seconde il est régulier.*

Nous disons qu'un idéal est *premier* s'il produit au quotient un anneau sans diviseur de zéro. Cela n'exclut pas l'idéal $\langle 1\rangle$. Ces conventions (adoptées dans Lombardi et Quitté (2015)) n'utilisent pas la négation et permettent d'éviter certains raisonnements cas par cas litigieux d'un point de vue constructif.

Domaines de valuation

Un *domaine de valuation* $\mathbf{V}$ est un sous-anneau d'un corps discret $\mathbf{K}$ satisfaisant l'axiome

- $xy = 1 \vdash x \in \mathbf{V}$ **ou** $y \in \mathbf{V} \quad (x, y \in \mathbf{K})$

On dit alors que $\mathbf{V}$ est un *anneau de valuation du corps discret* $\mathbf{K}$ et que $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$ est un *corps valué*.

Un domaine de valuation est la même chose qu'un domaine de Bézout local, ou encore un anneau intègre dont le groupe de divisibilité est totalement ordonné.

Dans un corps valué $(\mathbf{K}, \mathbf{V})$ on dit que x divise y et l'on écrit $x \mid y$ s'il existe un $z \in \mathbf{V}$ tel que $xz = y$. On note $\Gamma(\mathbf{V})$ (ou Γ si le contexte est clair) le groupe $\mathbf{K}^\times/\mathbf{V}^\times$ (noté additivement), avec la relation d'ordre $\leqslant$ induite par la relation $\mid$ dans $\mathbf{K}^\times$. On note $\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\infty\}$ (où ∞ est un élément maximum). Dans ces conditions, l'application naturelle $v : \mathbf{K} \to \Gamma_\infty$ est appelée la *valuation* du corps valué. On a

$$v(xy) = v(x) + v(y), \text{ et } v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y)) \text{ avec égalité si } v(x) \neq v(y).$$

On a aussi $\mathbf{V} = \{\, x \in \mathbf{K} \;;\; v(x) \geqslant 0 \,\}$ et $\mathbf{V}^\times = \{\, x \in \mathbf{K} \;;\; v(x) = 0 \,\}$.

Dimension des treillis distributifs

Dans ce paragraphe nous expliquons la définition constructive de la dimension d'un treillis distributif. Un treillis distributif $\mathbf{T}$ peut être vu comme l'ensemble des ouverts quasi-compacts d'un espace spectral, que l'on appelle *l'espace dual* de $\mathbf{T}$. La définition constructive de cette dimension correspond à la définition de la dimension de l'espace spectral dual en mathématiques classiques, qui est également la longueur maximum d'une chaine croissante d'idéaux premiers de $\mathbf{T}$: voir le théorème 1.5.

Un *idéal* $\mathfrak{b}$ d'un treillis distributif $(\mathbf{T}, \wedge, \vee, 0, 1)$ est une partie qui satisfait les contraintes :

$$\left.\begin{array}{rcl} & & 0 \in \mathfrak{b} \\ x, y \in \mathfrak{b} & \Longrightarrow & x \vee y \in \mathfrak{b} \\ x \in \mathfrak{b},\ z \in \mathbf{T} & \Longrightarrow & x \wedge z \in \mathfrak{b} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

On note $\mathbf{T}/(\mathfrak{b}=0)$ le treillis quotient obtenu en forçant les éléments de $\mathfrak{b}$ à être nuls. On peut aussi définir les idéaux comme les noyaux de morphismes entre treillis.

Un *idéal principal* est un idéal engendré par un seul élément a, il est noté $\downarrow a$. On a $\downarrow a = \{\, x \in \mathbf{T} \,;\, x \leqslant a \,\}$. L'idéal $\downarrow a$, muni des lois $\wedge$ et $\vee$ de $\mathbf{T}$ est un treillis distributif dans lequel l'élément maximum est a. L'injection canonique $\downarrow a \to \mathbf{T}$ n'est pas un morphisme de treillis distributifs parce que l'image de a n'est pas égale à $1_{\mathbf{T}}$. Par contre l'application $\mathbf{T} \to \downarrow a,\ x \mapsto x \wedge a$ est un morphisme surjectif, qui définit donc $\downarrow a$ comme la structure quotient $\mathbf{T}/(a=1)$.

La notion de *filtre* est la notion opposée (c'est-à-dire obtenue en renversant la relation d'ordre) à celle d'idéal.

Une règle particulièrement importante pour les treillis distributifs, appelée *coupure*, est la suivante

$$(x \wedge a \leqslant b) \;\boldsymbol{\wedge}\; (a \leqslant x \vee b) \;\Rightarrow\; (a \leqslant b). \tag{3}$$

Si $A \in \mathrm{P_{fe}}(\mathbf{T})$ (ensemble des parties finiment énumérées de $\mathbf{T}$) on notera

$$\bigvee A := \bigvee\nolimits_{x \in A} x \qquad \text{et} \qquad \bigwedge A := \bigwedge\nolimits_{x \in A} x.$$

On note $A \vdash B$ ou $A \vdash_{\mathbf{T}} B$ la relation définie comme suit sur l'ensemble $\mathrm{P_{fe}}(\mathbf{T})$:

$$A \vdash B \quad \overset{\text{déf}}{\iff} \quad \bigwedge A \leqslant \bigvee B.$$

Cette relation vérifie les axiomes suivants, dans lesquels on écrit x pour $\{x\}$ et A, B pour $A \cup B$.

$$\begin{array}{rcll} & x \;\vdash\; x & & (R) \\ \text{si } A \vdash B \text{ alors} & A, A' \;\vdash\; B, B' & & (M) \\ \text{si } (A, x \vdash B) \text{ et } (A \vdash B, x) \text{ alors} & A \;\vdash\; B & & (T). \end{array}$$

On dit que la relation est *réflexive*, *monotone* et *transitive*. La troisième règle (transitivité) peut être vue comme une généralisation de la règle (3) et s'appelle également la règle de *coupure*.

Définition 1.3. Pour un ensemble S arbitraire, une relation sur $\mathrm{P_{fe}}(S)$ qui est réflexive, monotone et transitive est appelée une *relation implicative* (en anglais, *entailment relation*).

Le théorème suivant est fondamental. Il dit que les trois propriétés des relations implicatives sont exactement ce qu'il faut pour que l'interprétation en forme de treillis distributif soit adéquate.

Théorème 1.4 (théorème fondamental des relations implicatives)**.** Cederquist et Coquand (2000), Lorenzen (1951)
Soit un ensemble S avec une relation implicative $\vdash_S$ sur $\mathrm{P_{fe}}(S)$. On considère le treillis distributif $\mathbf{T}$ défini par générateurs et relations comme suit : les générateurs sont les éléments de S et les relations sont les

$$A \;\vdash_{\mathbf{T}}\; B$$

chaque fois que $A \vdash_S B$. Alors, pour tous A, B dans $\mathrm{P_{fe}}(S)$, on a

$$A \;\vdash_{\mathbf{T}}\; B \implies A \;\vdash_S\; B.$$

En mathématiques classiques un *idéal premier* $\mathfrak{p}$ d'un treillis distributif $\mathbf{T} \neq \mathbf{1}$ est un idéal dont le complémentaire $\mathfrak{v}$ est un filtre (qui est alors un *filtre premier*). On a alors $\mathbf{T}/(\mathfrak{p} = 0, \mathfrak{v} = 1) \simeq \mathbf{2}$. Il revient au même de se donner un idéal premier de $\mathbf{T}$ ou un morphisme de treillis distributifs $\mathbf{T} \to \mathbf{2}$.

Théorème 1.5 (dimension d'un treillis distributif)**.** Voir Coquand et Lombardi (2003), Lombardi (2002), (Lombardi et Quitté 2021, chapitre XIII). *En mathématiques classiques, pour un treillis distributif non trivial et pour $n \geqslant 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

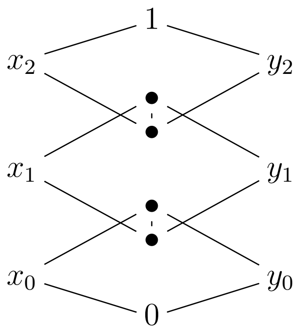
1. *Le treillis est de dimension $\leqslant n$, c'est-à-dire par définition la longueur de toute chaine d'idéaux premiers est $\leqslant n$.*

2. *Pour tout $x \in \mathbf{T}$ le treillis quotient $\mathbf{T}/(x = 0, I_x = 0)$, où $I_x = \{\, y \;;\; x \wedge y = 0 \,\}$, est de dimension $\leqslant n - 1$*[6]*.*

3. *Pour toute suite $(x_0, \dots, x_n)$ dans $\mathbf{T}$ il existe une suite* complémentaire $(y_0, \dots, y_n)$ *au sens suivant*

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & \vdash & y_n, x_n \\ y_n, x_n & \vdash & y_{n-1}, x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1, x_1 & \vdash & y_0, x_0 \\ y_0, x_0 & \vdash & 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Par exemple, pour $n = 2$ les inégalités dans le point *3* correspondent au dessin suivant dans $\mathbf{T}$.



Définition et remarque importantes. Les points *2* et *3* sont équivalents en mathématiques constructives et servent de définition pour la dimension de $\mathbf{T}$, notée $\mathsf{Kdim}(\mathbf{T})$ et appelée *dimension de Krull* du treillis distributif.

Notez cependant que d'un point de vue constructif on a seulement défini clairement la phrase $\mathsf{Kdim}(\mathbf{T}) \leqslant n$. Pour établir «$\mathsf{Kdim}(\mathbf{T}) = n$» il serait nécessaire de démontrer aussi $\neg(\mathsf{Kdim}(\mathbf{T}) \leqslant n + 1)$. Heureusement, la plupart des théorèmes en mathématiques classiques fonctionnent avec une hypothèse du type $\mathsf{Kdim}(\mathbf{T}) \leqslant n$.

On a en outre le résultat constructif suivant, qui simplifie l'utilisation du point *3*.

Lemme 1.6. *Soit S une partie d'un treillis distributif $\mathbf{T}$ qui engendre $\mathbf{T}$ en tant que treillis distributif. En mathématiques constructives, pour $n \geqslant 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

---

6. Un treillis est dit de dimension -1 s'il est trivial, i.e. réduit à un point, cela initialise la récurrence dans le point *2*. On vérifie facilement qu'un treillis est zéro-dimensionnel, c'est-à-dire de dimension $\leqslant 0$ si, et seulement si, c'est une algèbre de Boole.

1. *Pour toute suite* $(x_0, \dots, x_n)$ *dans* $\mathbf{T}$ *il existe une suite* complémentaire $(y_0, \dots, y_n)$ *dans* $\mathbf{T}$.

2. *Pour toute suite* $(x_0, \dots, x_n)$ *dans* S *il existe une suite* complémentaire $(y_0, \dots, y_n)$ *dans* $\mathbf{T}$.

Dans les deux paragraphes qui terminent cette section, nous expliquons comment les spectres des treillis distributifs conduisent à des espaces spectraux en algèbre abstraite. La dualité entre treillis distributifs et espaces spectraux a été établie par Stone (1937). Hochster (1969) a introduit la terminologie d'espace spectral et a popularisé leur utilisation. Mais il ne cite pas Stone 1937 et il n'indique pas le lien entre les espaces spectraux et les treillis distributifs.

Dimension de Krull d'un anneau commutatif

Nous rappelons tout d'abord l'idée principale de l'approche constructive du spectre d'un anneau commutatif développée dans Joyal (1971, 1976).

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbf{R}$, nous notons $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a})$ (ou $\mathrm{D}(\mathfrak{a})$ si le contexte est clair) le nilradical de l'idéal $\mathfrak{a}$:

$$\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}) \;=\; \sqrt[\mathbf{R}]{\mathfrak{a}} \;=\; \{\, x \in \mathbf{R} \,;\, \exists m \in \mathbb{N} \;\; x^m \in \mathfrak{a} \,\}. \tag{5}$$

Quand $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, nous notons $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a})$ sous la forme $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x_1, \dots, x_n)$. Si le contexte est clair nous notons aussi $\widetilde{x}$ pour $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x)$.

Par définition, le *treillis de Zariski* de $\mathbf{R}$, noté $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$, est l'ensemble des $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x_1, \dots, x_n)$ avec l'inclusion pour relation d'ordre. Les bornes inférieure et supérieure sont données par

$$\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_1) \wedge \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_2) = \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_1) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_2) = \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2).$$

Le treillis de Zariski de $\mathbf{R}$ est un treillis distributif et $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x_1, \dots, x_n) = \widetilde{x_1} \vee \cdots \vee \widetilde{x_n}$. les éléments $\widetilde{x}$ forment système générateur (stable par $\wedge$) de $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$.

Si M est un monoïde multiplicatif dans $\mathbf{R}$ engendré par $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ et si $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ est un idéal de type fini nous avons les équivalences

$$\bigwedge_{i \in \{1,\dots,m\}} \widetilde{u_i} \leqslant_{\mathsf{Zar}(\mathbf{R})} \bigvee_{j \in \{1,\dots,n\}} \widetilde{a_j} \iff \prod_{u \in \{1,\dots,m\}} u_i \in \sqrt[\mathbf{R}]{\mathfrak{a}} \iff M \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset \tag{6}$$

Cela décrit complètement le treillis distributif $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$. En effet la première formule dans (6) définit une relation implicative sur $\mathbf{R}$ qui donne une autre description $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$.

Nous avons aussi la caractérisation suivante (voir Cederquist et Coquand 2000, Coquand et Lombardi 2003).

Proposition 1.7 (définition à la Joyal du spectre d'un anneau commutatif)**.**
Le treillis distributif $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$ *est (à isomorphisme unique près) le treillis engendré par les symboles* $\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(a)$ *pour* $a \in \mathbf{R}$ *soumis aux relations suivantes :*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(0_{\mathbf{R}}) = 0,\;\; \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(1_{\mathbf{R}}) = 1,\;\; \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x+y) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(y),\;\; \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(xy) = \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(x) \wedge \mathrm{D}_{\mathbf{R}}(y).$$

La construction $\mathbf{R} \mapsto \mathsf{Zar}(\mathbf{R})$ donne un foncteur de la catégorie des anneaux commutatifs vers celle des treillis distributifs. Via ce foncteur la projection $\mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(0_{\mathbf{R}})$ donne un isomorphisme $\mathsf{Zar}(\mathbf{R}) \to \mathsf{Zar}(\mathbf{R}/\mathrm{D}_{\mathbf{R}}(0_{\mathbf{R}}))$. Nous avons $\mathsf{Zar}(\mathbf{R}) = \mathbf{1}$ si, et seulement si, $1_{\mathbf{R}} = 0_{\mathbf{R}}$.

En mathématiques classiques on a une démonstration simple du fait que la dimension du treillis distributif $\mathsf{Zar}(\mathbf{R})$ est la dimension de Krull de l'anneau $\mathbf{R}$.

Le treillis de Zariski d'un anneau est l'exemple paradigmatique d'un treillis distributif engendré par une structure algébrique dynamique. Nous expliquons la méthode générale dans le paragraphe qui suit.

Structures algébriques dynamiques

Références : Coste *et al.* (2001), Lombardi (1998, 2006, 2020), Bezem et Coquand (2005), Coquand (2005). Les structures algébriques dynamiques (du premier ordre) sont explicitement nommées dans Lombardi (1998, 2006). Dans Coste *et al.* (2001) elles sont implicites, mais décrites sous la forme de leurs présentations. Elles sont également implicites dans Lombardi (2002), et, last but not least, dans (Della Dora *et al.* 1985, D5, 1985), qui a été une source d'inspiration essentielle : on peut calculer de manière sûre dans la clôture algébrique d'un corps discret, même quand il n'est pas possible de construire cette clôture algébrique. Il suffit donc de considérer la clôture algébrique comme une structure algébrique dynamique «à la D5» plutôt que comme une structure algébrique usuelle : *l'évaluation paresseuse à la D5 fournit une sémantique constructive pour la clôture algébrique d'un corps discret.*

Une étude plus détaillée en cours de rédaction se trouve dans (Lombardi 2024, Théories géométriques pour l'algèbre constructive). Voir aussi Lombardi et Mahboubi 2023.

Une théorie dynamique (finitaire) $\mathcal{T} = (\mathcal{L}, \mathcal{A})$ est une version purement calculatoire, sans logique, d'une théorie cohérente. Le langage $\mathcal{L}$ est donné par une signature, les axiomes (éléments de $\mathcal{A}$) sont des règles dynamiques.

Une *structure algébrique dynamique* $\mathbf{D}$ *pour une théorie dynamique* $\mathcal{T}$ est donnée par générateurs et relations : $\mathbf{D} = \big((G, R), \mathcal{T}\big)$. Si (G, R) est le diagramme positif d'une structure algébrique usuelle $\mathbf{R}$ on note $\mathbf{D} = \mathcal{T}(\mathbf{R})$.

Considérons une structure algébrique dynamique $\mathbf{D} = \big((G, R), \mathcal{T}\big)$ pour une théorie dynamique $\mathcal{T} = (\mathcal{L}, \mathcal{A})$. Soit S un ensemble de formules atomiques closes de $\mathbf{D}$. On définit la relation implicative $\vdash_{\mathbf{D},S}$ sur S associée à $\mathbf{D}$ comme suit pour des A_i et $B_j \in S$:

$$\begin{array}{ll} A_1, \dots, A_n \vdash_{\mathbf{D},S} B_1, \dots, B_m & \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \\ A_1, \dots, A_n \;\boldsymbol{\vdash}_{\mathbf{D}}\; B_1 \;\textsf{\textbf{ou}}\; \dots \;\textsf{\textbf{ou}}\; B_m & \end{array} \tag{7}$$

On pourra noter $\mathsf{Zar}(\mathbf{D}, S)$ le treillis distributif engendré par cette relation implicative. Intuitivement ce treillis est le treillis des valeurs de vérité des formules de S dans la structure algébrique dynamique $\mathbf{D}$.

Le *treillis de Zariski (complet) d'une structure algébrique dynamique* $\mathbf{D}$ est défini en prenant pour S l'ensemble $\mathrm{Atcl}(\mathbf{D})$ de toutes les formules atomiques closes de $\mathbf{D}$. On le note $\mathsf{Zar}(\mathbf{D}, \mathcal{T})$ ou $\mathsf{Zar}(\mathbf{D})$ ou avec un nom particulier correspondant à la théorie $\mathcal{T}$.

L'espace spectral dual est appelé le *spectre de Zariski de la structure algébrique dynamique* $\mathbf{D}$, ou peut aussi lui attribuer un nom particulier.

Enfin la *dimension de Krull de* $\mathbf{D}$ est par définition égale à $\mathsf{Kdim}(\mathsf{Zar}(\mathbf{D}))$. La définition de $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R})$ dans le paragraphe suivant est donnée selon ce schéma.

2 Trois définitions constructives de la dimension valuative

Clôture quasi intègre minimale d'un anneau réduit

Nous rappelons ici quelques résultats essentiels donné dans Lombardi et Quitté (2015). Si le contexte $a \in \mathbf{R}$ est clair, nous notons $a^\perp$ l'idéal annulateur de l'élément a dans $\mathbf{R}$. Nous utilisons aussi la notation $\mathfrak{a}^\perp$ pour l'annulateur d'un idéal $\mathfrak{a}$.

Lemme 2.1. *Soit $\mathbf{R}$ un anneau réduit et $a \in \mathbf{R}$. On définit*

$$\mathbf{R}_{\{a\}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R}/a^\perp \times \mathbf{R}/(a^\perp)^\perp$$

et l'on note $\psi_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_{\{a\}}$ l'homomorphisme canonique.

1. *$\psi_a(a)^\perp$ est engendré par l'idempotent $(\overline{0}, \widetilde{1})$, donc $\psi_a(a)^\perp = (\overline{1}, \widetilde{0})^\perp$.*
2. *ψ_a est injectif (on peut identifier $\mathbf{R}$ à un sous-anneau de $\mathbf{R}_{\{a\}}$).*
3. *Soit $\mathfrak{b}$ un idéal dans $\mathbf{R}_{\{a\}}$, alors l'idéal $\psi_a^{-1}(\mathfrak{b}^\perp) = \mathfrak{b}^\perp \cap \mathbf{R}$ est un idéal annulateur dans $\mathbf{R}$.*
4. *L'anneau $\mathbf{R}_{\{a\}}$ est réduit.*

Lemme 2.2. *Soit $\mathbf{R}$ réduit et $a, b \in \mathbf{R}$. Alors avec les notations du lemme 2.1 les deux anneaux $(\mathbf{R}_{\{a\}})_{\{b\}}$ et $(\mathbf{R}_{\{b\}})_{\{a\}}$ sont canoniquement isomorphes.*

Remarque. Le cas où $ab = 0$ est typique : quand on le rencontre, on voudrait bien scinder l'anneau en composantes où les choses sont «claires». La construction précédente donne alors les trois composantes

$$\mathbf{R}/(ab^\perp)^\perp\ ,\ \mathbf{R}/(a^\perp b)^\perp \ \text{ et } \ \mathbf{R}/(a^\perp b^\perp)^\perp\ .$$

Dans la première a est régulier et $b = 0$, dans la seconde b est régulier et $a = 0$, et dans la troisième $a = b = 0$. ■

Lemme 2.3. *Si $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$ avec $\mathbf{C}$ quasi intègre, le plus petit sous-anneau quasi intègre de $\mathbf{C}$ contenant $\mathbf{R}$ est égal à $\mathbf{R}[(e_a)_{a\in\mathbf{R}}]$, où e_a est l'idempotent de $\mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Ann}_{\mathbf{C}}(a) = \langle 1 - e_a\rangle_{\mathbf{C}}$. Plus généralement, si $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{B}$ avec $\mathbf{B}$ réduit et si tout élément a de $\mathbf{R}$ admet un annulateur dans $\mathbf{B}$ engendré par un idempotent $1-e_a$, alors le sous-anneau $\mathbf{R}[(e_a)_{a\in\mathbf{R}}]$ de $\mathbf{B}$ est quasi intègre.*

On note $\mathbf{R}_{\mathrm{red}} = \mathbf{R}/\sqrt[\mathbf{R}]{\langle 0\rangle}$ l'anneau réduit engendré par $\mathbf{R}$.

Théorème et définition 2.4 (clôture quasi intègre minimale).
Soit $\mathbf{R}$ un anneau réduit. On peut définir un anneau $\mathbf{R}_{\min}$ comme limite inductive filtrante en itérant la construction de base qui consiste à remplacer $\mathbf{E}$ (l'anneau «en cours», qui contient $\mathbf{R}$) par

$$\mathbf{E}_{\{a\}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{E}/a^\perp \times \mathbf{E}/(a^\perp)^\perp = \mathbf{E}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}(a) \times \mathbf{E}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}(\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}(a))\ ,$$

lorsque a parcourt $\mathbf{R}$.

1. *Cet anneau* $\mathbf{R}_{\min}$ *est quasi intègre, il contient* $\mathbf{R}$ *et il est entier sur* $\mathbf{R}$.
2. *Pour tout* $x \in \mathbf{R}_{\min}$, $x^{\perp} \cap \mathbf{R}$ *est un idéal annulateur dans* $\mathbf{R}$.

Cet anneau $\mathbf{R}_{\min}$ *est appelé la* clôture quasi intègre minimale de $\mathbf{R}$.
Lorsque $\mathbf{R}$ *n'est pas nécessairement réduit, on prendra* $\mathbf{R}_{\min} \overset{\text{déf}}{=} (\mathbf{R}_{\text{red}})_{\min}$.

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties finies de $\{1, \ldots, n\}$. Voici une description de chaque anneau obtenu à un étage fini de la construction de $\mathbf{R}_{\min}$.

Lemme 2.5. *Soit* $\mathbf{R}$ *un anneau réduit et* $(\underline{a}) = (a_1, \ldots, a_n)$ *une suite de* n *éléments de* $\mathbf{R}$. *Pour* $I \in \mathcal{P}_n$, *on note* $\mathfrak{a}_I$ *l'idéal*

$$\mathfrak{a}_I = \left(\prod\nolimits_{i \in I} \langle a_i \rangle^{\perp} \prod\nolimits_{j \notin I} a_j\right)^{\perp} = \left(\langle a_i, i \in I \rangle^{\perp} \prod\nolimits_{j \notin I} a_j\right)^{\perp}.$$

Alors $\mathbf{R}_{\min}$ *contient l'anneau suivant, produit de* 2^n *anneaux quotients de* $\mathbf{R}$ *(certains éventuellement nuls) :*

$$\mathbf{R}_{\{\underline{a}\}} = \prod\nolimits_{I \in \mathcal{P}_n} \mathbf{R}/\mathfrak{a}_I .$$

On note $\mathbb{B}(\mathbf{R})$ l'algèbre de Boole des idempotents de l'anneau $\mathbf{R}$.

Lemme 2.6.

1. *Soit* $\mathbf{R}$ *un anneau quasi intègre.*
   (a) $\mathbf{R}_{\min} = \mathbf{R}$.
   (b) $\mathbf{R}[X]$ *est quasi intègre, et* $\mathbb{B}(\mathbf{R}) = \mathbb{B}(\mathbf{R}[X])$.
2. *Pour tout anneau* $\mathbf{R}$ *on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{R}_{\min}[X_1, \ldots, X_n] \simeq (\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n])_{\min}.$$

Notre suggestion est que la bonne généralisation de la notion du corps de fractions d'un anneau $\mathbf{R}$ n'est pas l'anneau $\operatorname{Frac}\mathbf{R}$ mais l'anneau zéro-dimensionnel réduit $\operatorname{Frac}\mathbf{R}_{\min}$.

Première approche constructive de la dimension valuative : vdim

Dans l'ouvrage Lombardi et Quitté (2015), les auteurs notent $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R})$ au lieu de $\mathsf{vdim}(\mathbf{R})$. Nous préférons dans cet article, réserver $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R})$ pour la notion définie par T. Coquand.

Dans Lombardi et Quitté (2015) la définition suivante est constructive parce qu'il y a une définition constructive de la dimension de Krull. Et le théorème suivant est démontré constructivement. Donc, pour le cas d'un anneau intègre, le théorème 2.8 donne une version constructive de l'équivalence entre les points *2*, *3* et *4* dans le théorème classique 1.1.

Définition 2.7 (selon Lombardi et Quitté (2015))**.**

1. Si $\mathbf{R}$ est un anneau quasi intègre, la *dimension valuative* est définie comme suit. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}\mathbf{R}$, on dit que *la dimension valuative de* $\mathbf{R}$ *est inférieure ou égale à* n et l'on écrit $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$ si pour toute suite $(x_1, \ldots, x_m)$ dans $\mathbf{K}$ on a $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_m] \leqslant n$. Par convention $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} = -1$ si $\mathbf{R}$ est trivial.

2. Dans le cas général on définit «$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$» par «$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R}_{\min} \leqslant n$»[7].

Pour $n = 0, -1$, on a $\mathsf{vdim}(\mathbf{R}) = n \Leftrightarrow \mathsf{Kdim}(\mathbf{R}) = n$.

On note que, comme pour la dimension de Krull, on n'a pas vraiment défini $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R}$ comme un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$: seule la propriété «$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$» est bien définie, constructivement, pour tout entier $n \geqslant -1$.

Théorème 2.8 (Lombardi et Quitté 2015, Theorem XIII-8.19)**.** *Les équivalences suivantes sont valides.*

1. *Si $n \geqslant 1$ et $k \geqslant -1$, alors*
$$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant k \iff \mathsf{vdim}\,\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] \leqslant n + k. \tag{8}$$
Si $\mathbf{R}$ est non trivial et $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} < \infty$, cela signifie intuitivement que l'on a une égalité $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] = n + \mathsf{vdim}\,\mathbf{R}$.

2. *Si $n \geqslant 0$, alors*
$$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \iff \mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] \leqslant 2n. \tag{9}$$

3. *Dans le cas où $\mathbf{R}$ est quasi intègre, ceci est aussi équivalent à :*
pour tous $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathrm{Frac}\,\mathbf{R}$, on a $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n] \leqslant n$.

Deuxième approche : treillis valuatif et spectre valuatif, Vdim

Tout d'abord rappelons que concernant la dimension d'un treillis distributif ou de l'espace spectral dual, il y a trois approches constructives constructivement équivalentes. La première historiquement est celle définie par Joyal (1976), reprise dans Coquand et Persson 2001 et Coquand (2009). La deuxième provient de la notion de chaine potentielle d'idéaux premiers, à la manière de ce qui est fait pour les anneaux commutatifs dans Lombardi (2006). La troisième est basée sur la notion d'idéal «bord» (ou de filtre «bord») et donne lieu à une définition par récurrence. L'équivalence de ces notions est pour l'essentiel démontrée dans Coquand et Lombardi (2003) et traitée très en détail dans Coquand et Lombardi (2018).

Dans le cas d'un sous-anneau (intègre) $\mathbf{R}$ d'un corps discret $\mathbf{K}$, l'article Coquand (2009) définit le treillis valuatif $\mathsf{Val}(\mathbf{K}, \mathbf{R})$ comme le treillis distributif qui traduit les règles valides pour le prédicat Vr[8] dans la théorie dynamique $\mathcal{Val}(\mathbf{K}, \mathbf{R})$ des anneaux de valuation du corps $\mathbf{K}$ qui contiennent $\mathbf{R}$ [9]. Enfin le treillis $\mathsf{Val}(\mathbf{R})$ est une notation abrégée de $\mathsf{Val}(\mathrm{Frac}\,\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

La structure algébrique dynamique $\mathcal{Val}(\mathbf{K}, \mathbf{R})$ peut être décrite comme la théorie dynamique construite sur la signature
$$(\cdot = 0, \mathrm{Vr}(\cdot)\ ;\ 0, 1, \cdot + \cdot, -\cdot, \cdot \times \cdot, (a)_{a \in \mathbf{K}})$$
dans laquelle les éléments de $\mathbf{K}$ sont des constantes de la théorie[10].

Tout d'abord il y a les axiomes des corps discrets non triviaux sur le langage des anneaux commutatifs.

7. Lombardi et Quitté (2015) démontrent qu'en mathématiques classiques on a l'équivalence $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant d \iff \mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} \leqslant d$ où $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R}$ est définie comme dans Cahen 1990. Par suite, cela démontre que $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} = \mathsf{Vdim}\,\mathbf{R}_{\min}$ en mathématiques classiques. C'est une manière de ramener le cas général au cas d'un anneau intègre sans utiliser d'idéaux premiers.

8. Vr rappelle «Valuation ring».

9. Sans toutefois utiliser en tant que tel le langage des théories dynamiques.

10. Pour la théorie dynamique $\mathcal{Val}$ toute nue, on supprime tout ce qui concerne $\mathbf{R}$ et $\mathbf{K}$.

- $\vdash 0 = 0$
- $x = 0 \vdash xy = 0$
- $x = 0, y = 0 \vdash x + y = 0$
- $1 = 0 \vdash \bot$
- $\vdash x = 0$ **ou** $\exists y\, xy = 1$

Ensuite on ajoute le diagramme de $\mathbf{K}$:

- $\vdash 0_{\mathbf{K}} = 0$
- $\vdash a + b = c \quad (\text{si } a + b =_{\mathbf{K}} c)$
- $\vdash 1_{\mathbf{K}} = 1$
- $\vdash ab = c \quad (\text{si } ab =_{\mathbf{K}} c)$

Enfin il y a les axiomes décrivant les propriétés du prédicat $\mathrm{Vr}(x)$ qui signifie que x appartient à l'anneau de valuation supposé du corps $\mathbf{K}$.

- $\vdash \mathrm{Vr}(a) \quad (\text{si } a \in \mathbf{R})$
- $\mathrm{Vr}(x), \mathrm{Vr}(y) \vdash \mathrm{Vr}(xy)$
- $\mathrm{Vr}(x), \mathrm{Vr}(y) \vdash \mathrm{Vr}(x + y)$
- $xy = 1 \vdash \mathrm{Vr}(x)$ **ou** $\mathrm{Vr}(y)$

Le treillis $\mathsf{Val}(\mathbf{K}, \mathbf{R})$ est alors le treillis distributif engendré par la relation implicative $\vdash_{\mathsf{Val},\mathbf{K},\mathbf{R}}$ sur $\mathbf{K}^\times$ définie par l'équivalence

$$\begin{array}{c} x_1, \dots, x_n \vdash_{\mathsf{Val},\mathbf{K},\mathbf{R}} y_1, \dots, y_m \qquad \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \\ \mathrm{Vr}(x_1), \dots, \mathrm{Vr}(x_n) \vdash_{\mathcal{V}al(\mathbf{K},\mathbf{R})} \mathrm{Vr}(y_1) \text{ ou } \dots \text{ ou } \mathrm{Vr}(y_m) \end{array} \tag{10}$$

Enfin on note $\mathsf{Val}(\mathbf{R})$ pour $\mathsf{Val}(\operatorname{Frac}\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Dans ce cadre, la dimension valuative de $\mathbf{R}$, que nous noterons $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R}$, est définie comme égale à $\mathsf{Kdim}(\mathsf{Val}(\mathbf{R}))$.

Le théorème 8 de l'article Coquand (2009) donne un Valuativstellensatz sous la forme de l'équivalence suivante (pour des y_i et $x_j \in \mathbf{K}^\times$)

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vr}(x_1), \dots, \mathrm{Vr}(x_n) \vdash_{\mathcal{V}al(\mathbf{K},\mathbf{R})} \mathrm{Vr}(y_1) \text{ ou } \dots \text{ ou } \mathrm{Vr}(y_m) \\ &\qquad\qquad \Longleftrightarrow \quad 1 \in \left\langle y_1^{-1}, \dots, y_m^{-1} \right\rangle \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n, y_1^{-1}, \dots, y_m^{-1}]. \end{aligned}$$

En chassant les dénominateurs on obtient la formulation équivalente suivante

$$\begin{array}{l} y_1^{p_1} \cdots y_m^{p_m} = Q(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m] \\ \qquad\qquad \text{un polynôme dont tous les monômes ont un degré} \\ \qquad\qquad \text{en } \underline{Y} \text{ strictement inférieur à } (p_1, \dots, p_m). \end{array} \tag{11}$$

Que se passe-t-il si nous acceptons que certains x_i ou y_j soient éventuellement nuls ? Comme la règle $\vdash \mathrm{Vr}(0)$ est valide, la règle

- $\mathrm{Vr}(x_1), \dots, \mathrm{Vr}(x_n) \vdash \mathrm{Vr}(y_1)$ **ou** $\dots$ **ou** $\mathrm{Vr}(y_m)$

est toujours satisfaite si l'un des y_j est nul ; et si l'un des x_i est nul, elle est équivalente à la même règle où l'on a supprimé le $\mathrm{Vr}(x_i)$ correspondant à la gauche du $\vdash$. On constate les mêmes faits pour le Valuativstellensatz exprimé sous la forme (11) : si l'un des y_j est nul on prend $Q = 0$; si l'un des x_i est nul, il n'intervient pas dans (11). Ainsi le Valuativstellensatz sous la forme (11) est toujours valable, ce qui évite d'avoir à raisonner cas par cas.

Le treillis $\mathsf{Val}\,\mathbf{R}$ peut donc être caractérisé comme le treillis distributif engendré par la relation implicative $\vdash_{\mathsf{Val}\,\mathbf{R}}$ sur $\mathbf{K}$ définie par l'équivalence

$$x_1,\dots,x_n \vdash_{\mathsf{Val}\,\mathbf{R}} y_1,\dots,y_m \quad \overset{\text{déf}}{\iff} \quad \begin{array}{l}\exists p_1,\dots,p_m \geqslant 0\ \exists Q \in \mathbf{R}[\underline{X},\underline{Y}]\ \ y_1^{p_1}\cdots y_m^{p_m} = \\ Q(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m), \text{ les monômes de } Q \\ \text{dont le degré en } \underline{Y} \text{ est } < (p_1,\dots,p_m).\end{array} \tag{12}$$

Pour rendre les calculs à venir plus lisibles, nous introduisons le prédicat

$$\mathrm{V}'(x) \quad \overset{\text{déf}}{\iff} \quad \exists u(ux = 1,\ \mathrm{Vr}(u)).$$

En d'autres termes, nous ajoutons un prédicat $\mathrm{V}'(x)$ dans la signature avec les deux axiomes

- $ux = 1,\ \mathrm{Vr}(u)\ \vdash \mathrm{V}'(x)$
- $\mathrm{V}'(x)\ \vdash \exists u\ (ux = 1,\ \mathrm{Vr}(u))$

La nouvelle théorie est une extension conservative de la précédente. En outre on a les règles valides suivantes qui permettent de retrouver Vr à partir de V′

- $\vdash \mathrm{Vr}(0)$
- $ux = 1,\ \mathrm{V}'(u)\ \vdash \mathrm{Vr}(x)$
- $\mathrm{Vr}(x)\ \vdash x = 0$ **ou** $\exists u\ (ux = 1,\ \mathrm{V}'(u))$

On peut lire $\mathrm{V}'(x)$ comme $\mathrm{Vr}(1/x)$ en considérant que $\mathrm{Vr}(1/0)\ \vdash \bot$ (effondrement de la théorie). Le prédicat $\mathrm{V}'(x)$ signifie que l'élément x de $\mathbf{K}$ n'est pas un élément résiduellement nul de $\mathbf{V}$. Ce prédicat satisfait notamment les axiomes suivants dans la théorie dynamique considérée :

- $\vdash \mathrm{V}'(a)$ (si $a \in \mathbf{R}^\times$)
- $\mathrm{V}'(0)\ \vdash \bot$
- $\mathrm{V}'(x+y)\ \vdash \mathrm{V}'(x)$ **ou** $\mathrm{V}'(y)$
- $\mathrm{V}'(x),\ \mathrm{V}'(y)\ \vdash \mathrm{V}'(xy)$
- $xy = 1\ \vdash \mathrm{V}'(x)$ **ou** $\mathrm{V}'(y)$

Le Valuativstellensatz devient, cette fois-ci pour des x_i et $y_j \in \mathbf{K}$ sans restriction

- $\mathrm{V}'(y_1),\ \dots,\ \mathrm{V}'(y_n)\ \vdash \mathrm{V}'(x_1)$ **ou** $\dots$ **ou** $\mathrm{V}'(x_m)$
  $\iff \quad 1 \in \langle x_1,\dots,x_m\rangle\,\mathbf{R}[x_1,\dots,x_m,y_1^{-1},\dots,y_n^{-1}]$

qu'il faut réécrire sous la forme suivante pour éviter les 0^{-1} : il existe des exposants $p_1,\dots,p_m$ et des polynômes $P_j \in \mathbf{R}[\underline{X},\underline{Y}]$ tels que

$$\exists p_1,\dots,p_m\ \exists P_1,\dots,P_n \in \mathbf{R}[\underline{X},\underline{Y}]\ \ y_1^{p_1}\dots y_m^{p_m} = x_1P_1(\underline{x},\underline{y}) + \dots + x_nP_n(\underline{x},\underline{y}),$$
$$\text{où les multiexposants } \underline{Y} \text{ dans les } P_j\text{'s sont tous} \leqslant (p_1,\dots,p_m). \tag{13}$$

Si l'un des y_i est nul, l'égalité est automatiquement satisfaite car on peut prendre les P_j nuls.

Ce prédicat V′ est le prédicat Nrn dans l'article Lombardi (2000) qui donne un Valuativstellensatz très général.

Remarque 2.9. On peut introduire le treillis $\mathsf{Val}'\,\mathbf{R}$ associé au prédicat V′. On peut démontrer alors que $\mathsf{Val}'\,\mathbf{R}$ est isomorphe au treillis opposé à $\mathsf{Val}\,\mathbf{R}$. Cela tient à ce que $x \mapsto x^{-1}$ est une bijection de $\mathbf{K}^\times$ sur lui-même. Dans cet article, nous utilisons seulement le fait que les caractérisations (11) et (13) sont équivalentes. ■

Nous introduirons le treillis valuatif d'un anneau arbitraire dans la toute dernière section page F22.

Troisième approche : ordre monomiaux rationnels gradués, dimv

On note $<_{\text{lex}}$ l'ordre monomial sur $\mathbb{Z}^n$ correspondant à l'ordre lexicographique.

Un *ordre monomial rationnel gradué* $<_M$ sur $\mathbb{Z}^n$ ou, de manière équivalente, sur les monômes de $\mathbf{R}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_1^{\pm 1}]$ est défini au moyen d'une matrice $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{N})$ inversible dans $\text{Mat}_n(\mathbb{Q})$ avec les coefficients de la première ligne tous > 0, de la manière suivante :

$$(e_1, \ldots, e_n) <_M (f_1, \ldots, f_n) \overset{\text{déf}}{\iff} M \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} <_{\text{lex}} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Lorsque les coefficients de la première ligne de M sont égaux à 1, l'ordre monomial $<_M$ est un ordre subordonné au degré total. L'ordre monomial $<_{\text{grlex}}$ «gradué lexicographique» est celui défini par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans Lombardi (2006), la dimension de Krull d'un anneau arbitraire $\mathbf{R}$ est caractérisée constructivement par l'équivalence entre $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$ et le fait que pour tous $x_0, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ on a un polynôme $P \in \mathbf{R}[X_0, \ldots, X_n]$ qui annule $(x_0, \ldots, x_n)$ et dont le plus petit coefficient pour l'ordre lexicographique est égal à 1. Par exemple $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{R} \leqslant 1$ si, et seulement si, pour tous $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$ on peut trouver une égalité $0 = x_0^{e_0}(x_1^{e_1}(1 + c_1 x_1) + c_0 x_0)$: ici les c_i sont des éléments de $\mathbf{R}$ ou tout aussi bien des éléments de $\mathbf{R}[x_0, x_1]$.

Dans Kemper et Viet Trung (2014), les auteurs ont montré, en mathématiques classiques, que pour un anneau noethérien, on peut caractériser la dimension de Krull de la même manière en utilisant un ordre monomial arbitraire.

Dans Kemper et Yengui (2020), les auteurs ont montré, en mathématiques classiques, que pour un anneau arbitraire, on peut caractériser la dimension valuative de la même manière à condition d'utiliser un ordre monomial rationnel gradué à la place de l'ordre lexicographique.

Autrement dit, nous pouvons les paraphraser en définissant l'inégalité «$\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant n$» pour $n \geqslant 0$ comme suit.

Définition 2.10. considérons un ordre monomial rationnel gradué $<_M$, on demande que pour tous $x_0, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ on ait un polynôme $P \in \mathbf{R}[X_0, \ldots, X_n]$ qui annule $(x_0, \ldots, x_n)$ et dont le plus petit coefficient pour l'ordre $<_M$ est égal à 1.

Le résultat dans Kemper et Yengui (2020) est alors le suivant.

Théorème 2.11.

1. *Cette définition de* $\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant n$ *ne dépend pas de la matrice* M *considérée.*
2. *Elle équivaut en mathématiques classiques au fait que la dimension valuative de* $\mathbf{R}$ *est* $\leqslant n$.

Par convention $\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} = -1$ signifie que l'anneau est trivial.

En fait, la démonstration du théorème 2.11 dans Kemper et Yengui (2020) est clairement constructive pour le cas d'un anneau intègre $\mathbf{R}$: pour tout $n \geqslant 0$ on a constructivement l'équivalence

$$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \quad \text{(définition 2.7.1)} \iff \mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant n \quad \text{(définition 2.10)} \tag{14}$$

3 Équivalence constructive des trois définitions constructives

vdim = dimv

On a un premier lemme qui prolonge (14) au cas quasi intègre.

Lemme 3.1. *Pour un anneau quasi intègre* $\mathbf{R}$ *on a l'équivalence*

$$\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant d \iff \mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant d \tag{15}$$

Démonstration. On reprend la démonstration constructive de (14) donnée dans le cas intègre et on utilise la machinerie locale-globale élémentaire n°1. □

Pour étendre l'équivalence constructive (14) du cas d'un anneau intègre au cas d'un anneau arbitraire, étant donné que dans le cas général on a défini $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant d$ comme signifiant $\mathsf{vdim}\,\mathbf{R}_{\min} \leqslant d$, et vu le lemme 3.1, il nous suffit de démontrer constructivement l'équivalence

$$\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant d \iff \mathsf{dimv}\,\mathbf{R}_{\min} \leqslant d \tag{16}$$

Cela implique en particulier constructivement l'analogue de l'équivalence (9) pour dimv.

Cette équivalence (16) se ramène aux deux lemmes suivants.

Lemme 3.2. *On a toujours*

$$\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant d \iff \mathsf{dimv}\,\mathbf{R}_{\mathrm{red}} \leqslant d \tag{17}$$

Démonstration. La démonstration est laissée à la lectrice. □

Lemme 3.3. *Soient* $\mathbf{R}$ *un anneau réduit et* $a \in \mathbf{R}$*. Alors on a*

$$\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant d \iff \mathsf{dimv}\,\mathbf{R}_{\{a\}} \leqslant d \tag{18}$$

Démonstration. L'implication ⇒ est assez simple. D'une part, l'implication

$$\mathsf{dimv}\,\mathbf{R} \leqslant d \Rightarrow \mathsf{dimv}(\mathbf{R}/\mathfrak{a}) \leqslant d$$

est claire pour tout quotient $\mathbf{R}/\mathfrak{a}$. Et d'autre part on voit que

$$(\mathsf{dimv}\,\mathbf{B} \leqslant d,\ \mathsf{dimv}\,\mathbf{C} \leqslant d) \Rightarrow \mathsf{dimv}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \leqslant d.$$

Voyons l'implication réciproque. On considère $x_0, \ldots, x_d \in \mathbf{R}$. On a tout d'abord un polynôme $P_1(X_0, \ldots, X_d) \in \mathbf{R}[\underline{X}]$ de coefficient minimum égal à $c_1 = 1 + y_1$ et tel que $P_1(x_0, \ldots, x_d) = z_1$ avec $y_1, z_1 \in a^\perp$. On a par ailleurs un polynôme $P_2(\underline{X})$ de coefficient minimum $c_2 = 1 + y_2$ et tel que $P_2(\underline{x}) = z_2$, avec $y_2, z_2 \in (a^\perp)^\perp$. On a alors

$$y_1 y_2 = y_1 z_2 = z_1 y_2 = z_1 z_2 = 0.$$

Quitte à multiplier P_1 et P_2 par des monômes convenables, on peut supposer que leurs monômes initiaux coïncident. Alors $Q_2 = P_2 - y_2 P_1$ a pour coefficient minimum $(1 + y_2) - y_2(1 + y_1) = 1$ et vérifie $Q_2(\underline{x}) = z_2$. De même $Q_1 = P_1 - y_1 P_2$ a pour coefficient minimum $(1 + y_1) - y_1(1 + y_2) = 1$ et vérifie $Q_1(\underline{x}) = z_1$. Donc le polynôme $Q_1 Q_2$ nous convient. □

vdim = Vdim dans le cas intègre

Lemme 3.4. *Pour un anneau intègre* $\mathbf{R}$*, et pour un entier* $n \geqslant -1$

$$\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \Rightarrow \mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$$

Démonstration. L'article Coquand (2009) montre d'une part que

$$\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \Rightarrow \mathsf{Kdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$$

et d'autre part que

$$\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \Rightarrow \mathsf{Vdim}\,\mathbf{R}[X] \leqslant n+1.$$

Donc $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n \Rightarrow \mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[X_1,\dots,X_n] \leqslant 2n$. Dans Lombardi et Quitté (2015) il est démontré que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{R}[X_1,\dots,X_n] \leqslant 2n \Rightarrow \mathsf{vdim}\,\mathbf{R} \leqslant n$. □

Nous allons maintenant démontrer l'inégalité opposée.

Nous allons démontrer l'implication $\mathsf{vdim} \leqslant n \implies \mathsf{Vdim} \leqslant n$ en construisant des suites complémentaires. Pour comprendre la démonstration, nous traiterons d'abord les cas $n = 2, 3, 4$: lorsque $n = 2$, la suite complémentaire est fabriquée avec des éléments de la forme $\mathrm{V}'(y)$, tandis que les cas $n = 3$ et $n = 4$ donnent des idées successives pour construire une suite complémentaire dans le treillis distributif engendré par ce type d'éléments.

$\boxed{\mathsf{vdim} \leqslant 2 \Rightarrow \mathsf{Vdim} \leqslant 2}$

Supposons que l'on a x_0, x_1, x_2 non nuls dans le corps de fractions $\mathbf{K}$ de $\mathbf{R}$. On cherche $y_0, y_1, y_2 \in \mathbf{K}$ (on sait que y_2 est nul) tels que :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{V}'(x_0) \vee \mathrm{V}'(y_0) = 1, && (19)\\
&\mathrm{V}'(x_0) \wedge \mathrm{V}'(y_0) \leqslant \mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(y_1), && (20)\\
&\mathrm{V}'(x_1) \wedge \mathrm{V}'(y_1) \leqslant \mathrm{V}'(x_2) \vee \mathrm{V}'(y_2) = \mathrm{V}'(x_2) \text{ (car } y_2 = 0), && (21)\\
&\mathrm{V}'(x_2) \wedge \mathrm{V}'(y_2) = 0 \text{ (c'est certifié par } y_2 = 0).
\end{aligned}$$

(19) revient à dire que $1 = \langle x_0, y_0 \rangle$ dans $\mathbf{R}[x_0, y_0]$.
(20) revient à dire que $1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ dans $\mathbf{R}[x_0^{-1}, y_0^{-1}, x_1, y_1]$.
(21) revient à dire que $1 = \langle x_2 \rangle$ dans $\mathbf{R}[x_1^{-1}, y_1^{-1}, x_2]$.
On utilise le fait que $\mathsf{Kdim}(\mathbf{R}[x_0, x_1, x_2]) \leqslant 2$. On a un polynôme $P \in \mathbf{R}[X_0, X_1, X_2]$ de plus petit coefficient 1 (pour l'ordre monomial lexicographique avec $X_2 > X_1 > X_0$) qui s'annule en (x_0, x_1, x_2). Soit $X_2^n X_1^m X_0^\ell$ le plus petit monôme de P. En divisant $P(x_0, x_1, x_2)$ par $x_2^n x_1^m x_0^\ell$, on obtient une égalité

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_1 f_1(x_1, x_0^\pm) + x_2 f_2(x_2, x_1^\pm, x_0^\pm) = 0,$$

où $f_0 \in \mathbf{R}[X_0]$, $f_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^\pm]$ et $f_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1^\pm, X_0^\pm]$ (le $x_0 f_0(x_0)$ provient des monômes de P autres que M dont le degré en X_2 est égal à n et le degré en X_1 est égal à m, $x_1 f_1(x_1, x_0^\pm)$ provient des autres monômes de P dont le degré en X_2 est égal à n, alors que $x_2 f_2(x_2, x_1^\pm, x_0^\pm)$ provient des monômes de P dont le degré en X_2 est $> n$). Pour certains $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_0^{r_0}\left(x_1 g_1(x_1, x_0^{-1}) + \frac{x_2}{x_1^{r_1}} g_2(x_2, x_1, x_0^{-1})\right) = 0,$$

où $g_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{-1}]$ et $g_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1, X_0^{-1}]$. On voit que $y_0 = \frac{1+x_0 f(x_0)}{x_0^{r_0}}$ et $y_1 = \frac{x_2}{x_1^{r_1}}$ conviennent (notons que $x_2 = x_1^{r_1} y_1 \in \mathbf{R}[x_1, y_1] \subseteq \mathbf{R}[x_0^{-1}, y_0^{-1}, x_1, y_1]$).
Prenons comme exemple d'effondrement :

$$x_0 x_1^2 x_2^2 + 2x_0^2 x_1^2 x_2^2 + 3x_1^4 x_2^2 + x_0^2 x_1^5 x_2^2 + 3x_2^3 + 2x_1 x_2^3 + x_0^2 x_1^3 x_2^4 = 0.$$

En divisant par $x_0 x_1^2 x_2^2$, on obtient une égalité

$$1 + 2x_0^2 + x_0\Big(x_1\big(\frac{3x_1}{x_0^2} + x_1^2\big) + \frac{x_2}{x_1^2}\big(\frac{3}{x_0^2} + \frac{2x_1}{x_0^2} + x_2 x_1^3\big)\Big) = 0.$$

On voit que $y_0 = \frac{1+2x_0^2}{x_0}$ et $y_1 = \frac{x_2}{x_1^2}$ conviennent.

$\boxed{\mathsf{vdim} \leqslant 3 \Rightarrow \mathsf{Vdim} \leqslant 3}$

Soient x_0, x_1, x_2, x_3 non nuls dans le corps de fractions $\mathbf{K}$ de $\mathbf{R}$. On cherche $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ dans le treillis distributif engendré par les $V'(x)$ qui forment une suite complémentaire de x_0, x_1, x_2, x_3 (voir les inégalités (4) dans le théorème 1.5). Autrement dit :

$$1 = V'(x_0) \vee \mathfrak{u}_0,\ V'(x_0) \wedge \mathfrak{u}_0 \leqslant V'(x_1) \vee \mathfrak{u}_1, \ldots,\ V'(x_2) \wedge \mathfrak{u}_2 \leqslant V'(x_3) \vee \mathfrak{u}_3,\ V'(x_3) \wedge \mathfrak{u}_3 = 0.$$

On propose de trouver les $\mathfrak{u}_i$ sous la forme

$$\mathfrak{u}_0 = \mathrm{V}'(y_0), \mathfrak{u}_1 = \mathrm{V}'(y_1) \wedge \mathrm{V}'(x_0),\ \mathfrak{u}_2 = \mathrm{V}'(y_2),\ \mathfrak{u}_3 = 0$$

avec $y_0, y_1, y_2 \in \mathbf{K}$, tels que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{V}'(x_0) \vee \mathrm{V}'(y_0) = 1, && (22)\\
&\mathrm{V}'(x_0) \wedge \mathrm{V}'(y_0) \leqslant \mathrm{V}'(x_1) \vee \mathfrak{u}_1 = \big(\mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(y_1)\big) \wedge \big(\mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(x_0)\big) \text{ ou aussi} &&\\
&\mathrm{V}'(x_0) \wedge \mathrm{V}'(y_0) \leqslant \mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(y_1) \text{ et} && (23)\\
&\mathrm{V}'(x_0) \wedge \mathrm{V}'(y_0) \leqslant \mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(x_0), && (24)\\
&\quad \mathrm{V}'(x_1) \wedge \mathfrak{u}_1 \leqslant \mathrm{V}'(x_2) \vee \mathrm{V}'(y_2), && (25)\\
&\mathrm{V}'(x_2) \wedge \mathrm{V}'(y_2) \leqslant \mathrm{V}'(x_3) \vee \mathfrak{u}_3 = \mathrm{V}'(x_3), && (26)\\
&\quad \mathrm{V}'(x_3) \wedge \mathfrak{u}_3 = 0 \text{ (c'est certifié par } \mathfrak{u}_3 = 0).
\end{aligned}$$

(22) revient à dire que $1 \in \langle x_0, y_0 \rangle$ dans $\mathbf{R}[x_0, y_0]$.
(23) revient à dire que $1 \in \langle x_1, y_1 \rangle$ dans $\mathbf{R}[x_0^{-1}, y_0^{-1}, x_1, y_1]$.
(24) est toujours satisfaite car $\mathrm{V}'(x_0) \wedge \mathrm{V}'(y_0) \leqslant \mathrm{V}'(x_0) \leqslant \mathrm{V}'(x_1) \vee \mathrm{V}'(x_0)$.
(25) revient à dire que $1 \in \langle x_2, y_2 \rangle$ dans $\mathbf{R}[x_1^{-1}, y_1^{-1}, x_0^{-1}, x_2, y_2]$.
(26) revient à dire que $1 \in \langle x_3 \rangle$ dans $\mathbf{R}[x_2^{-1}, y_2^{-1}, x_3]$.
On utilise le fait que $\mathsf{Kdim}(\mathbf{R}[x_0, x_1, x_2, x_3]) \leqslant 3$.
On a un polynôme $P \in \mathbf{R}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ de plus petit coefficient 1 (pour l'ordre monomial lexicographique avec $X_3 > X_2 > X_1 > X_0$) qui s'annule en (x_0, x_1, x_2, x_3). Soit $X_3^n X_2^m X_1^p X_0^q$ le plus petit monôme de P. En divisant $P(x_0, x_1, x_2, x_3)$ par $x_3^m x_2^n x_1^p x_0^q$, on obtient une égalité

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_1 f_1(x_1, x_0^{\pm 1}) + x_2 f_2(x_2, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1}) + x_3 f_3(x_3, x_2^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1}) = 0,$$

où $f_0 \in \mathbf{R}[X_0]$, $f_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{\pm 1}]$, $f_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1^{\pm 1}, X_0^{\pm 1}]$ et $f_3 \in \mathbf{R}[X_3, X_2^{\pm 1}, X_1^{\pm 1}, X_0^{\pm 1}]$:

- $x_0 f_0(x_0)$ provient des monômes de P autres que M dont le degré en X_3 est égal à m, le degré en X_2 est égal à n et le degré en X_1 est égal à p,
- $x_1 f_1(x_1, x_0^{\pm})$ provient des autres monômes de P dont le degré en X_3 est égal à m et le degré en X_2 est égal à n,
- $x_2 f_2(x_2, x_1^{\pm}, x_0^{\pm})$ provient des autres monômes de P dont le degré en X_3 est égal à m,
- $x_3 f_3(x_3, x_2^{\pm}, x_1^{\pm}, x_0^{\pm})$ provient des monômes de P dont le degré en X_3 est $> m$)

Pour certains $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$, on a :

$$1+x_0f_0(x_0)+x_0^{r_0}\big(x_1g_1(x_1,x_0^{-1})+x_1^{r_1}\big(x_2g_2(x_2,x_1^{-1},x_0^{-1})+\frac{x_3}{x_2^{r_2}}\,g_3(x_3,x_2,x_1^{-1},x_0^{-1})\big)\big) = 0, \quad (27)$$

où $g_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{-1}]$, $g_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1^{-1}, X_0^{-1}]$ et $g_3 \in \mathbf{R}[X_3, X_2, X_1^{-1}, X_0^{-1}]$.
On pose $y_0 = \dfrac{1 + x_0 f_0(x_0)}{x_0^{r_0}}$, $y_1 = \dfrac{y_0 + x_1 g_1(x_1, x_0^{-1})}{x_1^{r_1}}$, $y_2 = \dfrac{x_3}{x_2^{r_2}}$.
Condition (22) : $1 = x_0^{r_0} y_0 - x_0 f_0(x_0) \in \langle x_0, y_0\rangle$ dans $\mathbf{R}[x_0, y_0]$ (même si $r_0 = 0$).
Condition (23) : $y_0 = y_1 x_1^{r_1} - x_1 g_1(x_1, x_0^{-1})$, si $y_0 \neq 0$ on divise par y_0 et l'on obtient $1 \in \langle x_1, y_1\rangle$ dans $\mathbf{R}[x_1, y_1, x_0^{-1}, y_0^{-1}]$.
Condition (26) : $y_2 x_2^{r_2} = x_3$, (et on divise par $y_2 x_2^{r_2}$ si $y_2 \neq 0$)
Condition (25) : l'égalité (27) se relit comme suit

$$x_2 g_2(x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1}) + y_2 g_3(y_2 x_2^{r_2}, x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1}) = -y_1$$

Si $y_1 \neq 0$ on divise par y_1.
Par ailleurs on a aussi un bon résultat si $y_0 = 0$ ou $y_1 = 0$ (voir le commentaire après l'égalité (13)).

$\boxed{\mathsf{vdim} \leqslant 4 \Rightarrow \mathsf{Vdim} \leqslant 4}$

Soient x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 non nuls dans le corps de fractions $\mathbf{K}$ de $\mathbf{R}$. On cherche $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$, $\mathfrak{u}_4$ dans le treillis distributif engendré par les $V'(x)$ qui forment une suite complémentaire de x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 (voir les inégalités (4) dans le théorème 1.5). Autrement dit :

$$1 = V'(x_0) \vee \mathfrak{u}_0,\ V'(x_0) \wedge \mathfrak{u}_0 \leqslant V'(x_1) \vee \mathfrak{u}_1, \ldots,\ V'(x_3) \wedge \mathfrak{u}_3 \leqslant V'(x_4) \vee \mathfrak{u}_4, ,\ V'(x_4) \wedge \mathfrak{u}_4 = 0.$$

On propose de trouver les $\mathfrak{u}_i$ sous la forme

$$\mathfrak{u}_0 = \mathrm{V}'(y_0), \mathfrak{u}_1 = \mathrm{V}'(y_1) \wedge \mathrm{V}'(x_0), \mathfrak{u}_2 = V'(y_2) \wedge V'(x_1) \wedge V'(x_0), \mathfrak{u}_3 = \mathrm{V}'(y_3), \mathfrak{u}_4 = 0$$

avec $y_0, y_1, y_2, y_3 \in \mathbf{K}$, tels que

$$\begin{aligned}
V'(x_0) \vee V'(y_0) &= 1, && (28)\\
V'(x_0) \wedge V'(y_0) &\leqslant V'(x_1) \vee \mathfrak{u}_1, \text{ ou aussi} \\
V'(x_0) \wedge V'(y_0) &\leqslant V'(x_1) \vee V'(y_1), && (29)\\
V'(x_1) \wedge \mathfrak{u}_1 &\leqslant V'(x_2) \vee \mathfrak{u}_2, \text{ ou aussi} \\
V'(x_1) \wedge V'(y_1) \wedge V'(x_0) &\leqslant V'(x_2) \vee V'(y_2) \text{ et} && (30)\\
V'(x_2) \wedge \mathfrak{u}_2 &\leqslant V'(x_3) \vee V'(y_3), && (31)\\
V'(x_3) \wedge V'(y_3) &\leqslant V'(x_4) \vee \mathfrak{u}_4 = V'(x_4), && (32)\\
V'(x_4) \wedge \mathfrak{u}_4 &= 0 \text{ (c'est certifié par } \mathfrak{u}_4 = 0).
\end{aligned}$$

(28) revient à dire que $1 \in \langle x_0, y_0 \rangle$ dans $\mathbf{R}[x_0, y_0]$.
(29) revient à dire que $1 \in \langle x_1, y_1 \rangle$ dans $\mathbf{R}[y_0^{-1}, x_0^{-1}, x_1, y_1]$.
(30) revient à dire que $1 \in \langle x_2, y_2 \rangle$ dans $\mathbf{R}[y_1^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}, x_2, y_2]$.
(31) revient à dire que $1 \in \langle x_3, y_3 \rangle$ dans $\mathbf{R}[y_2^{-1}, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}, x_3, y_3]$.
(32) revient à dire que $1 \in \langle x_4 \rangle$ dans $\mathbf{R}[x_3^{-1}, y_3^{-1}, x_4]$.

On utilise le fait que $\operatorname{Kdim} \mathbf{R}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \leqslant 4$. On a un polynôme $P \in \mathbf{R}[X_0, \dots, X_4]$ de plus petit coefficient 1 (pour l'ordre monomial lexicographique avec $X_4 > \cdots > X_0$) qui s'annule en $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Soit $X_4^\ell X_3^n X_2^m X_1^p X_0^q$ le plus petit monôme de P. En divisant $P(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ par $x_4^\ell x_3^m x_2^n x_1^p x_0^q$, on obtient une égalité

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_1 f_1(x_1, x_0^{\pm 1}) + x_2 f_2(x_2, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1}) + x_3 f_3(x_3, x_2^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1}) \\ + x_4 f_4(x_4, x_3^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, x_0^{\pm 1}) = 0,$$

où $f_0 \in \mathbf{R}[X_0]$, $f_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^\pm]$, $f_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1^\pm, X_0^\pm]$, $f_3 \in \mathbf{R}[X_3, X_2^\pm, X_1^\pm, X_0^\pm]$ et $f_4 \in \mathbf{R}[X_4, X_3^\pm, X_2^\pm, X_1^\pm, X_0^\pm]$:

- $x_0 f_0(x_0)$ provient des monômes de P autres que M dont le degré en X_4 est égal à ℓ, le degré en X_3 est égal à m, le degré en X_2 est égal à n et le degré en X_1 est égal à p,
- $x_1 f_1(x_1, x_0^\pm)$ provient des autres monômes de P dont le degré en X_4 est égal à ℓ, le degré en X_3 est égal à m, le degré en X_2 est égal à n,
- $x_2 f_2(x_2, x_1^\pm, x_0^\pm)$ provient des autres monômes de P dont le degré en X_4 est égal à ℓ et le degré en X_3 est égal à m,
- $x_3 f_3(x_3, x_2^\pm, x_1^\pm, x_0^\pm)$ provient des monômes de P dont le degré en X_4 est égal à ℓ,
- $x_4 f_4(x_4, x_3^\pm, x_2^\pm, x_1^\pm, x_0^\pm)$ provient des monômes de P dont le degré en X_4 est $> \ell$.

Pour certains $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_0^{r_0}\Big(x_1 g_1(x_1, x_0^{-1}) + x_1^{r_1}\Big(x_2 g_2(x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1}) \\ + x_2^{r_2}\big(x_3 g_3(x_3, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}) + \frac{x_4}{x_3^{r_3}}\, g_4(x_4, x_3, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1})\big)\Big)\Big) = 0, \quad (33)$$

où $g_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{-1}]$, $g_2 \in \mathbf{R}[X_2, X_1^{-1}, X_0^{-1}]$, $g_3 \in \mathbf{R}[X_3, X_2^{-1}, X_1^{-1}, X_0^{-1}]$ et $g_4 \in \mathbf{R}[X_4, X_3, X_2^{-1}, X_1^{-1}, X_0^{-1}]$.
On pose $y_0 = \frac{1 + x_0 f_0(x_0)}{x_0^{r_0}}$, $y_1 = \frac{y_0 + x_1 g_1(x_1, x_0^{-1})}{x_1^{r_1}}$, $y_2 = \frac{y_1 + x_2 g_2(x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1})}{x_2^{r_2}}$ et $y_3 = \frac{x_4}{x_3^{r_3}}$.
Condition (28) : $1 = x_0^{r_0} y_0 - x_0 f_0(x_0) \in \langle x_0, y_0 \rangle$ dans $\mathbf{R}[x_0, y_0]$ (même si $r_0 = 0$).
Condition (29) : $y_0 = y_1 x_1^{r_1} - x_1 g_1(x_1, x_0^{-1})$, si $y_0 \neq 0$ on divise par y_0 et l'on obtient $1 \in \langle x_1, y_1 \rangle$ dans $\mathbf{R}[x_1, y_1, x_0^{-1}, y_0^{-1}]$.
Condition (30) : $y_1 = y_2 x_2^{r_2} - x_2 g_2(x_2, x_1^{-1}, x_0^{-1})$, si $y_1 \neq 0$ on divise par y_1 et l'on obtient $1 \in \langle x_2, y_2 \rangle$ dans $\mathbf{R}[y_1^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}, x_2, y_2]$.
Condition (31) : l'égalité (33) se relit

$$x_3 g_3(x_3, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}) + y_3 g_4(y_3 x_3^{r_3}, x_3, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}) = -y_2$$

Si $y_2 \neq 0$ on divise par y_2 et l'on obtient $1 \in \langle x_3, y_3 \rangle$ dans $\mathbf{R}[y_2^{-1}, x_2^{-1}, x_1^{-1}, x_0^{-1}, x_3, y_3]$.
Condition (32) : $y_3 x_3^{r_3} = x_4$, (et on divise par $y_3 x_3^{r_3}$ si $y_3 \neq 0$).

$\boxed{\mathsf{vdim} \leqslant n \Rightarrow \mathsf{Vdim} \leqslant n}$

Soient $x_0, \dots, x_n$ non nuls dans le corps de fractions $\mathbf{K}$ de $\mathbf{R}$. On cherche $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \dots, \mathfrak{u}_n$ dans le treillis distributif engendré par les $V'(x)$ qui forment une suite complémentaire de $x_0, x_1, \dots, x_n$. Autrement dit :

$$1 = V'(x_0) \vee \mathfrak{u}_0,\ V'(x_0) \wedge \mathfrak{u}_0 \leqslant V'(x_1) \vee \mathfrak{u}_1, \dots,\ V'(x_{n-1}) \wedge \mathfrak{u}_{n-1} \leqslant V'(x_n) \vee \mathfrak{u}_n,\ V'(x_n) \wedge \mathfrak{u}_n = 0.$$

On utilise le fait que Kdim $\mathbf{R}[x_0, \dots, x_n] \leqslant n$. On a un polynôme $P \in \mathbf{R}[X_0, \dots, X_n]$ de plus petit coefficient 1 (pour l'ordre monomial lexicographique avec $X_n > X_{n-1} > \dots > X_0$) qui s'annule en $(x_0, \dots, x_n)$. Soit $X_n^{q_n} \cdots X_0^{q_0}$ le plus petit monôme de P. En divisant $P(x_0, \dots, x_n)$ par $x_n^{q_n} \cdots x_0^{q_0}$, on obtient une égalité

$$1 + x_0 f_0(x_0) + x_1 f_1(x_1, x_0^{\pm}) + \ldots + x_n f_n(x_n, x_{n-1}^{\pm}, \dots, x_0^{\pm}) = 0,$$

où $f_0 \in \mathbf{R}[X_0]$, $f_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{\pm}], \dots,$ $f_n \in \mathbf{R}[X_n, X_{n-1}^{\pm}, \dots, X_0^{\pm}]$.

Pour certains $r_0, \dots, r_n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}1 + x_0 f_0(x_0) + x_0^{r_0}\Bigg(& x_1 g_1(x_1, x_0^{-1}) + \cdots + x_{n-3}^{r_{n-3}}\Big(x_{n-2} g_{n-2}(x_{n-2}, x_{n-3}^{-1}, \dots, x_0^{-1}) \\ &+ x_{n-2}^{r_{n-2}}\big(x_{n-1} g_{n-1}(x_{n-1}, x_{n-2}^{-1}, \dots, x_0^{-1}) + \tfrac{x_n}{x_{n-1}^{r_{n-1}}}\, g_n(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}^{-1}, \dots x_0^{-1}) \cdots \big)\Big)\Bigg) = 0,\end{aligned}$$

où $g_1 \in \mathbf{R}[X_1, X_0^{-1}], \dots,$ $g_{n-1} \in \mathbf{R}[X_{n-1}, X_{n-2}^{-1}, \dots, X_0^{r}-1]$, $g_n \in \mathbf{R}[X_n, X_{n-1}, X_{n-2}^{-1}, \dots, X_0^{-1}]$.

On pose $y_0 = \frac{1+x_0 f_0(x_0)}{x_0^{r_0}}$, $y_1 = \frac{y_0 + x_1 g_1(x_1, x_0^{-1})}{x_1^{r_1}}, \dots,$ $y_{n-2} = \frac{y_{n-3} + x_{n-2} g_{n-2}(x_{n-2}, x_{n-3}^{-1}, \dots, x_0^{-1})}{x_{n-2}^{r_{n-2}}}$ et $y_{n-1} = \frac{x_n}{x_{n-1}^{r_{n-1}}}$.

Il suffit alors de prendre $\mathfrak{u}_0 = V'(y_0)$, $\mathfrak{u}_1 = V'(y_1) \wedge V'(x_0), \mathfrak{u}_2 = V'(y_2) \wedge V'(x_1) \wedge V'(x_0), \dots, \mathfrak{u}_{n-2} = V'(y_{n-2}) \wedge V'(x_{n-3}) \wedge \cdots \wedge V'(x_0)$, $\mathfrak{u}_{n-1} = V'(y_{n-1})$ et $\mathfrak{u}_n = 0$.

vdim = Vdim dans le cas général

On note que lorsque $\mathbf{R}$ est un anneau quasi intègre, l'anneau Frac($\mathbf{R}$) est un anneau zéro-dimensionnel réduit. Par ailleurs un corps discret est un anneau zéro-dimensionnel réduit dans lequel tout idempotent est égal à 0 ou 1.

Nous commençons alors par la remarque suivante qui découle de la machinerie constructive élémentaire n°1.

Lemme 3.5. *Soit $\mathbf{R}$ un anneau quasi intègre. Définissons* $\mathsf{Val}(\mathbf{R}) := \mathsf{Val}(\mathrm{Frac}(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ *et* $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R}) = \mathsf{Kdim}(\mathsf{Val}(\mathbf{R}))$ *comme dans (10) en remplaçant $\mathbf{K}$ par* Frac($\mathbf{R}$)*. Alors on obtient l'égalité* $\mathsf{vdim}(\mathbf{R}) = \mathsf{Vdim}(\mathbf{R})$ *comme dans le cas intègre.*

Dans la suite de ce paragraphe, nous ne donnons pas de démonstration.

Nous renvoyons à l'étude générale Lombardi et Mahboubi (2023).

Nous définissons une théorie dynamique *val* comme suit. On considère la signature

$$\Sigma_{\mathrm{val}} = (\,\cdot \mid \cdot\ ;\ \cdot + \cdot, \cdot \times \cdot, - \cdot, 0, 1\,)$$

Les axiomes sont les suivants.

Col$_{\mathsf{val}}$ $\;0 \,|\, 1 \;\vdash\; \bot$ (effondrement)

av1 $\;\vdash\; 1 \,|\, -1$

av2 $\;a \,|\, b \;\vdash\; ac \,|\, bc$

Av1 $\;a \,|\, b, b \,|\, c \;\vdash\; a \,|\, c$

Av2 $\;a \,|\, b, a \,|\, c \;\vdash\; a \,|\, b + c$

AV1 $\;\vdash\; a \,|\, b$ **ou** $b \,|\, a$

AV2 $\;ax \,|\, bx \;\vdash\; a \,|\, b$ **ou** $0 \,|\, x$

L'égalité $x = 0$ est définie comme une abrviation de $x \,|\, 0$.

Définition 3.6.

1. Si $\mathbf{R}$ est un anneau commutatif, la structure algébrique dynamique $\mathcal{val}(\mathbf{R})$ est obtenue en prenant comme présentation le diagramme positif de l'anneau $\mathbf{R}$.

2. Si $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{R}$ sont deux anneaux[11], ou plus généralement si $\varphi : \mathbf{k} \to \mathbf{R}$ est une algèbre, on note $\mathcal{val}(\mathbf{k}, \mathbf{R})$ la structure algébrique dynamique dont la présentation est donnée par

   - le diagramme positif de $\mathbf{R}$ comme anneau commutatif ;
   - les axiomes $\vdash 1 \,|\, \varphi(x)$ pour les éléments x de $\mathbf{k}$.

Les deux structures algébriques dynamiques $\mathcal{val}(\mathbf{R})$ et $\mathcal{val}(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$, où $\mathbf{Z}$ est le plus petit sous-anneau de $\mathbf{R}$, sont canoniquement isomorphes.

Définition 3.7. Soit $\mathbf{k}$ un sous-anneau d'un anneau $\mathbf{R}$. On définit le treillis distributif $\mathsf{val}(\mathbf{R}, \mathbf{k})$ par la relation implicative $\vdash_{\mathbf{R},\mathbf{k},\mathrm{val}}$ sur l'ensemble $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ donnée par l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} & (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \vdash_{\mathbf{R},\mathbf{k},\mathrm{val}} (c_1, d_1), \dots, (c_m, d_m) \\ \overset{\text{déf}}{\iff} \quad & a_1 \,|\, b_1, \dots, a_n \,|\, b_n \vdash_{\mathcal{val}(\mathbf{R},\mathbf{k})} c_1 \,|\, d_1 \text{ or } \dots \text{ or } c_m \,|\, d_m. \end{aligned} \tag{34}$$

On peut démontrer le résultat suivant.

Lemme 3.8. *Soit* $\mathbf{R}$ *un anneau intègre de corps de fraction* $\mathbf{K}$. *On a des morphismes naturels* $\mathsf{Val}(\mathbf{R}, \mathbf{K}) \to \mathsf{val}(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ *et* $\mathsf{val}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathsf{val}(\mathbf{R}, \mathbf{K})$. *Ce sont des isomorphismes.*

La définition suivante est donc raisonnable. Nous allons voir qu'elle coïncide avec celle du lemme 3.5 dans le cas des anneaux quasi intègres.

Définition 3.9. Pour un anneau commutatif $\mathbf{R}$ arbitraire on définit $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R}) \leqslant n$ par $\mathsf{Kdim}(\mathsf{val}(\mathbf{R}, \mathbf{R})) \leqslant n$.

Cette dimension coïncide avec celle déjà définie lorsque $\mathbf{R}$ est intègre. Mais elle n'est pas en général égale à la dimension du treillis $\mathsf{val}(\mathbf{R}, \mathrm{Frac}(\mathbf{R}))$.

De notre point de vue, cela signifie que $\mathrm{Frac}(\mathbf{R}_{\min})$ est un bien meilleur substitut que $\mathrm{Frac}(\mathbf{R})$ au corps de fractions lorsque $\mathbf{R}$ n'est pas un anneau intègre. En fait $\mathbf{R}_{\min}$ coïncide avec $\mathrm{Frac}(\mathbf{R})$ seulement pour les anneaux quasi intègres.

Enfin on peut démontrer le théorème suivant.

11. Nous utilisons $\mathbf{k}$ comme petit anneau pour nous référer à l'intuition donnée dans la situation fréquente où $\mathbf{k}$ est un corps discret.

Théorème 3.10. *Les treillis distributifs*

$$\mathsf{val}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ et } \mathsf{val}(\mathbf{R}_{\min},\mathbf{R}_{\min}) \simeq \mathsf{val}(\mathbf{R}_{\min},\mathrm{Frac}(\mathbf{R}_{\min}))$$

ont même dimension de Krull.

Avec le lemme 3.5 et les définitions 3.6 et 3.9 cela termine le travail.

Note. On aurait pu définir directement $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R}) = \mathsf{Vdim}(\mathbf{R}_{\min})$ sans utiliser la théorie $\mathcal{val}$, mais cela ressemblait un peu trop à priori à une définition ad hoc, car $\mathsf{Vdim}(\mathbf{R})$ n'a pas de définition naturelle directe pour un anneau arbitraire si on utilise uniquement la théorie $\mathcal{Val}$.

Bibliographie

Marc Bezem et Thierry Coquand : Automating coherent logic. *In Logic for programming, artificial intelligence, and reasoning. 12th international conference, LPAR 2005, Montego Bay, Jamaica, December 2–6, 2005. Proceedings*, pages 246–260. Berlin : Springer, 2005. F9

Errett Bishop : *Foundations of constructive analysis*. McGraw-Hill, New York, 1967. URL http://hlombardi.free.fr/Bishop.djvu. F2

Errett Bishop et Douglas Bridges : *Constructive analysis*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 279. Springer-Verlag, Berlin, 1985. F2

Douglas Bridges et Fred Richman : *Varieties of constructive mathematics*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 97. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. F2

Paul-Jean Cahen : Construction B, I, D et anneaux localement ou résiduellement de Jaffard. (B, I, D construction and locally or residually Jaffard rings). *Arch. Math.*, 54 (2):125–141, 1990. F3, F12

Jan Cederquist et Thierry Coquand : Entailment relations and distributive lattices. *In Logic Colloquium '98 (Prague)*, volume 13 de *Lect. Notes Log.*, pages 127–139. Assoc. Symbol. Logic, Urbana, IL, 2000. F6, F8

Thierry Coquand : A completeness proof for geometrical logic. *In Logic, methodology and philosophy of science. Proceedings of the 12th international congress, Oviedo, Spain, August 2003*, pages 79–89. London : King's College Publications, 2005. F9

Thierry Coquand : Space of valuations. *Ann. Pure Appl. Logic*, 157(2-3):97–109, 2009. F2, F12, F13, F18

Thierry Coquand et Henri Lombardi : Hidden constructions in abstract algebra : Krull dimension of distributive lattices and commutative rings. *In Commutative ring theory and applications (Fez, 2001)*, volume 231 de *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 477–499. Dekker, New York, 2003. URL http://arxiv.org/abs/1712.04725. F7, F8, F12

Thierry Coquand et Henri Lombardi : A logical approach to abstract algebra. *Math. Struct. Comput. Sci.*, 16(5):885–900, 2006. URL http://hlombardi.free.fr/publis/AlgebraLogicCoqLom.pdf. F2

Thierry Coquand et Henri Lombardi : Constructions cachées en algèbre abstraite. Dimension de Krull, Going up, Going down. Rapport technique, Département de Mathématiques de l'Université de Franche-Comté, 2018. URL http://arxiv.org/abs/1712.04728. Mise à jour en 2018 d'un preprint de 2001. F12

Thierry Coquand et Henrik Persson : Valuations and Dedekind's Prague theorem. *J. Pure Appl. Algebra*, 155(2-3):121–129, 2001. URL http://dx.doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00095-X. F12

Michel Coste, Henri Lombardi et Marie-Françoise Roy : Dynamical method in algebra : effective Nullstellensätze. *Ann. Pure Appl. Logic*, 111(3):203–256, 2001. F2, F9

Jean Della Dora, Claire Dicrescenzo et Dominique Duval : About a new method for computing in algebraic number fields. *In* Bob F. Caviness, éditeur : *EUROCAL '85. European Conference on Computer Algebra, Linz, Austria, April 1-3, 1985. Proceedings. Vol. 2 : Research contributions*, Lect. Notes Comput. Sci., 204, pages 289–290. Springer, Berlin, 1985. F9

M. Hochster : Prime ideal structure in commutative rings. *Trans. Am. Math. Soc.*, 142:43–60, 1969. F8

André Joyal : Spectral spaces and distributive lattices. *Notices Amer. Math. Soc.*, 18(2):393–394, 1971. URL https://www.ams.org/journals/notices/197102/197102FullIssue.pdf. F8

Andre Joyal : Les théorèmes de Chevalley-Tarski et remarques sur l'algèbre constructive. *Cah. Topologie Géom. Différ. Catégoriques*, 16:256–258, 1976. F8, F12

Gregor Kemper et Ngo Viet Trung : Krull dimension and monomial orders. *J. Algebra*, 399:782–800, 2014. URL https://arxiv.org/pdf/1303.3937.pdf. F3, F15

Gregor Kemper et Ihsen Yengui : Valuative dimension and monomial orders. *J. Algebra*, 557:278–288, 2020. URL https://arxiv.org/abs/1906.12067. F2, F3, F15, F16

Henri Lombardi : Relecture constructive de la théorie d'Artin-Schreier. *Ann. Pure Appl. Logic*, 91(1):59–92, 1998. F9

Henri Lombardi : Une généralisation du Positivstellensatz pour les corps valués algébriquement clos. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(5):345–348, 2000. F14

Henri Lombardi : Dimension de Krull, Nullstellensätze et évaluation dynamique. *Math. Z.*, 242(1):23–46, 2002. URL http://arxiv.org/abs/2308.10296. F7, F9

Henri Lombardi : Structures algébriques dynamiques, espaces topologiques sans points et programme de Hilbert. *Ann. Pure Appl. Logic*, 137(1-3):256–290, 2006. F2, F3, F9, F12, F15

Henri Lombardi : Spectral spaces versus distributive lattices : a dictionary. *In Advances in rings, modules and factorizations. Selected papers based on the presentations at the international conference on rings and factorizations, Graz, Austria, February 19–23, 2018*, pages 223–245. Cham : Springer, 2020. URL https://arxiv.org/abs/1812.06277. F2, F9

Henri Lombardi : Théories géométriques pour l'algèbre constructive. http://hlombardi.free.fr/TGM.pdf, 2024. F9

Henri Lombardi et Assia Mahboubi : Valuative lattices and spectra. *In* Jean-Luc Chabert, Marco Fontana, Sophie Frisch, Sarah Glaz et Keith Johnson, éditeurs : *Algebraic, number theoretic, and topological aspects of ring theory*, pages 275–341. Springer, Cham, 2023. F9, F22

Henri Lombardi et Claude Quitté : *Commutative algebra : constructive methods. Finite projective modules.* Algebra and applications, 20. Springer, Dordrecht, 2015. URL https://arxiv.org/abs/1605.04832. Traduit du français (Calvage & Mounet, Paris, 2011, revu et étendu par les auteurs) par Tania K. Roblot. F2, F5, F10, F11, F12, F18

Henri Lombardi et Claude Quitté : *Algèbre commutative. Méthodes constructives. Modules projectifs de type fini. Cours et exercices.* Paris : Calvage & Mounet, 2021. Second revised and extended edition of the book published in 2011. F2, F7

Paul Lorenzen : Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände. *J. Symbolic Logic*, 16:81–106, 1951. URL http://www.jstor.org/stable/2266681. Translation by Stefan Neuwirth : *Algebraic and logistic investigations on free lattices*, http://arxiv.org/abs/1710.08138. F6

Ray Mines, Fred Richman et Wim Ruitenburg : *A course in constructive algebra.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1988. URL https://pufc.univ-fcomte.fr/media/catalog/product/m/r/mrr-francais-avec-couverture_1.pdf. Traduction française par Henri Lombardi, révisée par Stefan Neuwirth. *Un cours d'algèbre constructive.* Presses Universitaires de Franche-Comté. 2020. F2

John Myhill : Review of Errett Bishop, *Foundations of constructive analysis* and *Mathematics as a numerical language. J. Symb. Logic*, 37(4):744–747, 1972. URL http://www.jstor.org/stable/2272421. F2

Gabriel Stolzenberg : Review : *Foundations of constructive analysis* by Errett Bishop. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76:301–323, 1970. F2

M. H. Stone : Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics. *Časopis Pěst. Mat. Fys.*, 67(1):1–25, 1937. F8

Ihsen Yengui : *Constructive commutative algebra : projective modules over polynomial rings and dynamical Gröbner bases.* Lecture Notes in Mathematics, 2138. Springer, Cham, 2015. F2