

Le mot de calcul a un sens clair pour les mathématiciens : il y a le calcul arithmétique qui régit les additions et multiplications de nombres entiers ; il y a le calcul différentiel et intégral qui régit les additions et multiplications de fonctions, ainsi que leur dérivation et intégration. Il s'agit de se donner un ensemble de règles, les règles du calcul, qui consistent à passer d'une étape du calcul à la suivante. À la fin du 19^e siècle, la notion de calcul a commencé à s'appliquer aux mathématiques elles-mêmes : Dedekind et Peano ont envisagé les nombres entiers comme un ensemble de deux règles, l'une produisant le zéro à partir de rien, l'autre produisant le successeur d'un nombre, qu'on peut par exemple écrire ainsi :

$$\begin{array}{l} \rightarrow 0 \\ x \rightarrow sx \end{array}$$
 Ce calcul produit $0, s0, ss0, sss0, \dots$. Au début du 20^e siècle, Hilbert a envisagé les théories mathématiques comme un ensemble de deux types de règles, les uns produisant des théorèmes à partir de rien, les autres produisant des théorèmes à partir de théorèmes : ce sont les axiomes et les règles de déduction. Dans ces deux calculs, on construit les objets du calcul ; dans le deuxième, ces constructions s'appellent des preuves formelles.

Le mot de sens est à prendre ici dans toute son épaisseur. Pour s'en faire une idée, je rappelle l'exemple de Frege dans « Sinn und Bedeutung » : l'étoile du matin et l'étoile du soir renvoient à une même chose, la deuxième planète du système solaire, mais n'ont pas le même sens, puisque l'une s'observe le matin et l'autre le soir. Vénus a ainsi pour sens l'ensemble des expériences humaines qui s'y rapportent, n'a donc pas le même sens pour chacune, et ce sens se construit aussi socialement dans l'intersubjectivité.

Jusqu'au 19^e siècle, la notion de calcul a été conçue comme une expérience de plus dans l'entreprise de saisir le sens des objets mathématiques, c'est-à-dire qu'un calcul n'abolissait pas le sens des objets concernés par le calcul. Par exemple, on peut concevoir la géométrie des Éléments d'Euclide comme une forme de calcul rhétorique avec les points, les lignes, les surfaces, les angles, mais ce calcul précise sans l'abolir le sens de ces objets.

Au 19^e siècle, c'est l'arithmétisation de l'analyse qui a mené sur un laps de temps de 50 ans à un changement radical qu'on peut qualifier de formalisation. Après la constitution du concept abstrait de fonction continue dans l'analyse algébrique de Cauchy et chez Bolzano, la propriété de valeurs intermédiaires est devenue un théorème dont la preuve nécessite l'existence de la borne supérieure d'un ensemble borné de grandeurs, et c'est cela que Dedekind a voulu exporter du domaine des grandeurs continues dans le domaine des

nombre entiers : il n'est agi de reconstruire à l'intérieur du domaine des nombres le concept de continuité. Voici sa démarche. En partant d'une ligne, en prenant un point O comme origine et un point distinct I , on peut importer les nombres entiers comme les points P tels que OP est un multiple de OI , puis les fractions en concevant les barycentres à poids entiers de ces points (le milieu, etc.). On se retrouve ainsi avec un ensemble de points partout dense sur la ligne issu du concept de nombre entier, mais cet ensemble ne satisfait pas la propriété d'existence de la borne supérieure : c'est ce qu'exprime l'existence de grandeurs incommensurables comme le côté et la diagonale d'un carré. L'idée de Dedekind a été, en partant d'un ensemble de fractions dont on voudrait qu'ils aient une borne supérieure mais qui n'en ont pas, de combler ce manque, cette absence, en rajoutant aux objets mathématiques une matérialisation de ce manque, qui est simplement l'ensemble de fractions dont on est parti lui-même : c'est le concept de coupure. Par exemple, on rajoute à l'ensemble des fractions l'ensemble $\{\frac{a}{x} : ab < 0 \text{ ou } a^2 < 2b^2\}$. Cependant, il faut s'assurer que l'existence de la borne supérieure soit réalisée aussi en considérant cette extension du domaine des fractions, et jusqu'à aujourd'hui, on ne sait pas faire autrement que de s'abstenir, à cette étape, à supposer que le concept de sous-ensemble de l'ensemble des fractions est non pas construit mais offert d'avance aux mathématiciens : c'est ce que recouvre l'accusation d'imprédictivité formulée par Poincaré autour du 20^e siècle. L'arithmétisation de l'analyse repose ainsi sur le socle de la théorie des ensembles comme saisie d'évidence du concept d'ensemble par Dedekind, théorisée par Cantor, systématisée par Zermelo et Fraenkel. Lorsque Dedekind réduit le concept de continuité de la ligne au concept de coupure, il ne prétend pas ajouter une précision au concept de continuité ; il entend substituer à un concept géométrique un concept ensembliste. Le concept géométrique est aboli dans l'arithmétisation de l'analyse et on retrouve dans son texte de 1872 tout l'enthousiasme de cette démarche, qu'il vit comme une libération : il se libère de la géométrie et travaille dorénavant à l'intérieur d'une théorie de ensembles qui n'a plus à s'embarrasser de considérations qui relèvent dorénavant de la physique. Le divorce entre sens et calcul est encore vécu comme une libération glorieuse par Hilbert dans sa correspondance avec Frege lorsqu'il affirme que l'exis-

tence d'un objet se réduit à la non-contradiction du calcul qui saisit cet objet. L'existence de la borne supérieure se réduit à la non-contradiction de la théorie des coupures qui se réduit à la non-contradiction de la théorie des ensembles. C'est pourquoi cette question de la non-contradiction devient cruciale pour cette démarche. Notons qu'elle ne devient pas cruciale pour ceux et celles qui ne consomment pas ce divorce et qui restent fidèles au sens des objets hors du calcul, comme Poincaré et Brouwer.

Le programme de Hilbert entreprend la démonstration de la non-contradiction en cherchant à saisir le concept de démonstration lui-même par une théorie, la théorie de la démonstration, qui travaille sans aucune conception de l'infini sur la matière même des démonstrations réduites à des suites de signes : on parle de mathématiques finitaires. Le théorème de Gödel établit dans ce cadre qu'on ne peut pas trouver de démonstration formelle de la non-contradiction d'une théorie formelle qui saisit le concept de nombre entier.

Pour conclure un peu artificiellement, je relève qu'Hilbert choisit ce cadre finitaire pour aller au-delà des exigences formulées par ses contempteurs Poincaré et Brouwer, mais aussi pour essayer de cantonner les mathématiques à l'intérieur d'un cadre formel. Le théorème de Gödel exprime qu'un cadre formel ne peut pas saisir le concept de nombre entier tel qu'il se présente à nous hors de tout cadre formel comme la succession $0, 1, 2, 3, \dots$. Le cadre correct pour continuer le programme de Hilbert consiste manifestement à partir du concept de nombre entier et du principe de récurrence : cela s'appelle les mathématiques constructives. Il s'agit de concevoir les calculs, dont les théories axiomatiques, dans le cadre des mathématiques (constructives), et non pas de concevoir les mathématiques dans le cadre d'une théorie axiomatisée. Il s'agit aussi de remettre sur l'établi le rapport entre démonstration formelle comme dans les logiques de certification de preuve et démonstration informelle qui consiste à procéder de l'hypothèse à la conclusion par des étapes qui chacune relèvent de l'évidence vécue comme une expérience humaine.